Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Абурто-Хагеман, Х. Пантоха, Х. Сото-Андрате, Тензорные произведения как индуцированные представления: случай конечной группы $GL(3)$, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 483–494

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8997>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:22:33

Тензорные произведения как индуцированные представления: случай конечной группы $GL(3)$

Л. Абурто-Гаагаман, Х. Пантоха, Х. Сото-Андраде

Мы описываем тензорные произведения двух неприводимых линейных комплексных представлений группы $G = GL(3, \mathbb{F}_q)$ в терминах представлений, индуцированных линейными характеристиками максимальных торов, а также в терминах представлений Гельфанда–Граева. Полученные результаты имеют отношение, в частности, к гипотезам Макдональда для G ; они обобщают на G конечные аналоги классических теорем о тензорных произведениях основных серий, равно как голоморфных и антиголоморфных представлений, групп $SL(2, \mathbb{R})$; кроме того, они дают метод, позволяющий легко разлагать эти тензорные произведения с помощью теоремы взаимности Фробениуса. Мы также формулируем гипотезы для общего случая группы $GL(n, \mathbb{F}_q)$.

Библиография: 23 названия.

1. Введение

Разложение тензорных произведений неприводимых представлений классических групп уже давно привлекает к себе внимание, что связано, в частности, с исследованием сложных систем в квантовой механике. В самом деле, описание собственных состояний сложной системы в терминах собственных состояний ее компонент требует разложения на неприводимые составляющие тензорных произведений неприводимых представлений соответствующей группы симметрий G . В наиболее классических примерах, таких как пара электронов в сферически симметричном электромагнитном поле, группа симметрий G совпадает с группой $SO(3, \mathbb{R})$ и разложение тензорных произведений ее неприводимых представлений дает знаменитую *серию Клебша–Гордана* [1], которая возникла, по существу, в теории инвариантов и позднее сыграла основополагающую роль в объяснении атомных спектров в физике и правил валентных связей в химии. Точнее, *коэффициенты Клебша–Гордана* возникают как коэффициенты разложения собственных состояний полного момента импульса в несвязанном базисе тензорного произведения. Однако в наши дни этот

Работа первого и второго авторов выполнена при поддержке Понтифийского Католического университета Вальпараисо. Работа второго и третьего авторов выполнена при поддержке фондов FONDECYT (грант 1070246) и PICS CNRS (грант 1413).

термин используется в расширенном смысле и относится к кратностям неприводимых представлений группы G в прямой сумме разложения тензорных произведений неприводимых представлений G , где в качестве G обычно выступает компактная группа Ли. Задача определения этих коэффициентов известна как *проблема Клебша–Гордана* [2].

Эту проблему можно сформулировать в более алгебраических терминах как проблему теории модулей, состоящую в описании структуры кольца Гротендика в категории представлений групповой алгебры группы G .

Для определенных семейств групп, таких как классические компактные группы Ли, общее решение проблемы Клебша–Гордана было получено в [3], [1]. Однако для других важных семейств, включая некомпактные редуктивные группы Ли, p -адические редуктивные алгебраические группы и конечные группы лиева типа, известно немного, хотя для некоторых специальных типов представлений, таких как основные серии представлений, был достигнут определенный прогресс [4]. Для таких семейств общая проблема Клебша–Гордана была решена только для групп малого ранга [5]–[15].

Тем не менее, результаты экспериментов свидетельствуют о том, что в конечных аналогах групп Ли происходит интригующее явление, удобное для решения проблемы Клебша–Гордана; а именно, для тензорных произведений неприводимых представлений общего положения прослеживается явная тенденция совпадения с представлениями, индуцированными линейными характерами подходящих торов группы G . По теореме взаимности Фробениуса этот факт сводит задачу разложения тензорных произведений неприводимых составляющих к вычислению кратностей линейных характеров коммутативных групп (подходящих торов) в ограничении неприводимых представлений группы G на эти торы, а такая задача решается гораздо проще.

Этот подход применял еще в 50-х гг. прошлого столетия Макки [16], [17], который раскладывал тензорное произведение двух унитарных неприводимых основных серий представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$, реализуя его как представление, индуцированное из бесконечномерного унитарного представления борелевских подгрупп рассматриваемой группы. Мартин [8]–[10] развил этот подход и обобщил его на случай вещественного и p -адического основных полей.

Однако наш подход основан на идее реализации тензорного произведения неприводимых составляющих в виде индуцированного представления линейного характера максимального тора рассматриваемой группы G . Результаты экспериментов показывают, что для конечных групп лиева типа, т.е. конечных аналогов групп Ли [4], тензорные произведения двух неприводимых представлений общего положения по существу индуцированы представлениями подходящих линейных характеров каждого из двух соответствующих торов; здесь слова “по существу” означают “с точностью до поправок малой размерности”. В настоящей статье мы доказываем этот факт для группы $G = GL(3, \mathbb{F}_q)$, что обобщает нашу предыдущую работу, где доказательство было проведено для $GL(2, \mathbb{F}_q)$ и $SL(2, \mathbb{F}_q)$ [5].

Результаты такого типа интересны по нескольким причинам.

Во-первых, для конечных классических групп тензорные произведения неприводимых представлений, реализованные как индуцированные представления подобного сорта, возникают в контексте знаменитой гипотезы Макдональда, которая утверждает, что в случае группы $GL(n, \mathbb{F}_q)$ тензорное произведение канонического пред-

ставления Штейнберга St и неприводимого представления $R_T(\theta)$ общего положения, ассоциированного с характером θ общего положения максимального тора T группы $GL(n, \mathbb{F}_q)$, совпадает с представлением, индуцированным из T на $GL(n, \mathbb{F}_q)$ характером θ . Эта гипотеза была доказана намного позже Делинем и Люстигом в качестве следствия их конструкции, представленной в [18].

Во-вторых, замечательный физик-теоретик Ридо [15] интересовался описанием тензорных произведений неприводимых унитарных представлений тех же серий для классических вещественных групп Ли, таких как $SL(2, \mathbb{R})$, и доказал, что тензорное произведение голоморфных и антиголоморфных дискретных серий представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$ задается подходящим представлением, индуцированным из соответствующего тора. В [19] было отмечено, что результаты Ридо можно распространить также на основные серии представлений и что аналогичные результаты можно получить для группы $GL(2, \mathbb{F}_q)$, если ввести нужные поправки. Таким образом, фактически результаты Ридо можно поставить на одну доску с гипотезами Макдональда. Полное описание тензорных произведений неприводимых представлений групп $GL(2, \mathbb{F}_q)$ и $SL(2, \mathbb{F}_q)$ в терминах индуцированных представлений было получено в [5].

В-третьих, как уже отмечалось, тензорные произведения неприводимых представлений легко раскладываются с помощью теоремы взаимности Фробениуса при наличии их описания в терминах индуцированных представлений.

В-четвертых, реализация тензорного произведения двух неприводимых представлений как представления, индуцированного линейным характером, позволяет угадывать и выявлять интересные отношения между специальными функциями разного рода. В самом деле, такое индуцированное представление можно рассматривать как “скрученное” естественное представление, для которого можно посчитать сферические функции в случае отсутствия кратностей, как в [20]. Например, недавно полученные результаты [21] о связи между классическими суммами Клустермана, так называемыми суммами Лежандра и суммами Сото-Андреаде для $G = PGL(2, q)$ можно рассматривать как следствие того, что тензорный квадрат представления Штейнберга группы G по существу является представлением, индуцированным единичным характером анизотропного тора группы G , т.е. естественным представлением группы G без кратностей, ассоциированным с гомографическим действием этой группы на (двойном накрытии) конечной верхней полуплоскости Пуанкаре, сферические группы которого задаются вышеупомянутыми суммами [20]. Таким же образом возникают и представления Гельфанда–Граева (см. [5] и дальнейшие рассуждения).

В-пятых, существует не очевидная, но тесная взаимосвязь между тензорными произведениями и моделями Гельфанда классических групп. Напомним, что модель Гельфанда группы G – это любое представление G , которое разлагается в сумму всех неприводимых представлений G с кратностью 1. Интригующие экспериментальные результаты показывают, что гельфандовы модели или “квази-модели” часто могут быть получены как тензорные произведения замечательных неприводимых представлений. Первым таким примером является группа $G = PGL(2, q)$, для которой с помощью тензорного квадрата представления Штейнберга можно построить квази-модель группы G , в которой отсутствует только знак представления.

В-шестых, хотя проблема разложения тензорных произведений в p -адическом случае рассматривалась в [6], [7], [22], по-видимому, тензорные произведения двух

разных серий представлений не изучались, и описание произведения любых двух представлений как представления, индуцированного из торов, не было получено.

Итак, в этой статье мы описываем тензорные произведения двух неприводимых представлений группы $G = \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_q)$ как представления, индуцированные линейными характерами торов группы G с точностью до поправок малой размерности. Отметим, что этот случай сложнее двумерного и в нем иногда возникают дополнительные тонкости (см., например, п. (10) в теореме 3). Мы сосредоточиваемся на неприводимых представлениях “общего положения”, поскольку неприводимые представления не общего положения (так называемые “вырожденные” неприводимые представления) малых размерностей можно получить как предел неприводимых представлений общего положения (см. лемму 2). Мы показываем, как вывести формулы для случая вырожденных представлений из формул для случая представлений в общем положении.

Неприводимое представление естественным образом ассоциируется с тором в зависимости от серии, которой это представление принадлежит. Рассматривая два неприводимых представления из одной серии, мы индуцируем представления с помощью соответствующего тора. Когда два неприводимых представления принадлежат разным сериям, мы даем два описания, по одному описанию в терминах каждого тора. Однако в этом случае можно использовать и другой подход, а именно, выразить наше тензорное произведение в терминах пересечения двух разных торов, например, центра группы G и верхней нильпотентной подгруппы N . Более подробно, пусть α – характер группы $k^\times = Z(G) = Z$, и пусть ψ – нетривиальный характер группы $k^\times$, который можно превратить в характер на N преобразованием

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \psi(x + y).$$

Тогда классическое представление Гельфанда–Граева группы G – это представление $\mathrm{Ind}_{Z_N}^G(\alpha\psi)$. Назовем *обобщенным представлением Гельфанда–Граева* группы G представление $\mathrm{Ind}_{Z_{N_0}}^G(\alpha\psi)$, где N_0 – подгруппа группы N , состоящая из матриц с $x = 0$. Предложение 5 описывает сумму этих двух представлений Гельфанда–Граева, классического и обобщенного, как тензорное произведение дискретной серии представлений и основной серии представлений группы G .

Аналогичное утверждение должно выполняться в общем случае размерности n . Мы формулируем его в виде гипотезы после предложения 5.

В качестве приложения мы вычисляем коэффициенты Клебша–Гордана для тензорного произведения двух каспидальных представлений группы G в п. 3.3.

Статья организована так: раздел 2 содержит предварительные сведения и таблицу характеров для группы G . Раздел 3 посвящен основным результатам и приложениям.

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathbb{F}_q$ – конечное поле из $q = p^n$ элементов, где p – простое число, и пусть $\mathbb{F}_{q^2}$ и $\mathbb{F}_{q^3}$ – квадратичное и кубическое расширения $\mathbb{F}_q$ соответственно. Мы отождествляем каждый элемент $z \in \mathbb{F}_{q^3}$ с $\mathbb{F}_q$ -автоморфизмом поля $\mathbb{F}_{q^3}$, действующим как $x \mapsto zx$, а каждый элемент $w \in \mathbb{F}_{q^2}$ – с $\mathbb{F}_q$ -автоморфизмом поля $\mathbb{F}_{q^2}$, действующим

как $x \mapsto wx$. Тем же символом z мы обозначаем матрицу указанного автоморфизма относительно базиса $\{1, \sigma, \sigma^2\}$, где σ – порождающий элемент поля $\mathbb{F}_{q^3}$ над $\mathbb{F}_q$. Аналогично, для элемента w поля $\mathbb{F}_{q^2}$ тот же символ w обозначает матрицу автоморфизма $x \mapsto wx$ относительно базиса $\{1, \tau\}$, где τ – порождающий элемент поля $\mathbb{F}_{q^2}$ над $\mathbb{F}_q$.

В соответствии с вышесказанным определен мономорфизм из группы $\mathbb{F}_{q^3}^\times$ в группу G , образом которого является анизотропный тор T_a . Обозначим через T_{iso} изотропный тор группы G ; тогда T_{iso} является образом произведения $\mathbb{F}_q^\times \times \mathbb{F}_q^\times \times \mathbb{F}_q^\times$ в G . Аналогично, символом T_m мы обозначаем промежуточный тор

$$T_m = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_q^\times, X \in \mathbb{F}_{q^2}^\times \right\}.$$

Наконец, через L мы обозначаем промежуточную подгруппу Леви $\text{GL}(2, \mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}_q^\times$. Если η – представление группы G , то тем же символом η мы обозначаем характер этого представления.

Элементы

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, & A_3 &= \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \\ A_4 &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, & A_5 &= \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, & T_1 &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(где $a \neq b$, $a \neq c$ и $b \neq c$) – представители разных классов сопряженности группы G . Положим, кроме того,

$$T_2 = \begin{pmatrix} \varkappa & \\ & a \end{pmatrix}, \quad T_3 = z$$

(где $\varkappa \in \mathbb{F}_{q^2}^\times$ и $z \in \mathbb{F}_{q^3}^\times$); тогда множество

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, T_1, T_2, T_3\}$$

матриц размера 3×3 представляет собой множество представителей классов сопряженности группы G , которые удовлетворяют условиям, сформулированным в следующей лемме.

ЛЕММА 1. (1) Матрицы с номерами $j = 2, 3, 5$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \{X \in G \mid XA_jX^{-1} \in T_{\text{iso}}\} &= \phi, \\ \{X \in G \mid XT_2X^{-1} \in T_{\text{iso}}\} &= \{X \in G \mid XT_3X^{-1} \in T_{\text{iso}}\} = \phi. \end{aligned}$$

(2) Имеет место равенство

$$\begin{aligned} &\{X \in G \mid XA_4X^{-1} \in T_{\text{iso}}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} r & s & 0 \\ t & u & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & r & s \\ 0 & t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} r & 0 & s \\ 0 & k & 0 \\ t & 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{F}_q^\times, \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_q) \right\}; \end{aligned}$$

кроме того,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ r & s & 0 \\ t & u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & r & s \\ 0 & t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r & s & 0 \\ 0 & 0 & k \\ t & u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 & s \\ 0 & k & 0 \\ t & 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Имеет место равенство

$$\{X \in G \mid XT_1X^{-1} \in T_{\text{iso}}\} = T_{\text{iso}} \times S_3.$$

(4) Матрицы с номерами $j = 2, 3, 4, 5$ удовлетворяют условиям

$$\{X \in G \mid XA_jX^{-1} \in T_a\} = \phi, \quad \{X \in G \mid XT_3X^{-1} \in T_a\} = \phi,$$

а также

$$\{X \in G \mid XT_2X^{-1} \in T_a\} = \phi.$$

(5) Имеет место равенство

$$\{X \in G \mid XT_3X^{-1} \in T_a\} = T_a \times \Gamma_3,$$

где Γ_3 естественно изоморфна группе Галуа кубического расширения поля $\mathbb{F}_q$.

(6) Матрицы с номерами $j = 2, 3, 5$ удовлетворяют условиям

$$\{X \in G \mid XA_jX^{-1} \in T_m\} = \phi, \quad \{X \in G \mid XT_3X^{-1} \in T_m\} = \phi.$$

(7) Имеет место равенство

$$\{X \in G \mid XA_4X^{-1} \in T_m\} = L.$$

(8) Имеет место равенство

$$\{X \in G \mid XT_2X^{-1} \in T_m\} = T_m \times \left\{ \begin{pmatrix} \Gamma_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

где Γ_2 естественно изоморфна группе Галуа квадратичного расширения поля $\mathbb{F}_q$.

Таблица 1 содержит неприводимые характеры группы G . Она основана на результатах работы Штейнберга [23].

Следующая лемма описывает разложение характера, полученного из неприводимого характера в “вырожденных” случаях, когда два или больше (разных) параметров равны.

ЛЕММА 2. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} (1) \quad & \chi_{\alpha \circ N_3}^{(q-1)(q^2-1)} = \chi_{\alpha}^1 - \chi_{\alpha}^{q^2+q} + \chi_{\alpha}^{q^3}; \\ (2) \quad & \chi_{\alpha, \beta \circ N_2}^{q^3-1} = \chi_{\alpha, \beta}^{q^3+q^2+q} - \chi_{\alpha, \beta}^{q^2+q+1}; \\ (3) \quad & \chi_{\alpha, \alpha \circ N_2}^{q^3-1} = \chi_{\alpha}^{q^3} - \chi_{\alpha}^1; \end{aligned}$$

ТАБЛИЦА 1. Таблица характеров группы $GL(3, \mathbb{F}_q)$

Элементарные делители классов сопряженности	Представители	χ_α^1	$\chi_\alpha^{q^2+q}$	$\chi_\alpha^{q^3}$
$x - a, x - a, x - a$	A_1	$\alpha^3(a)$	$(q^2 + q)\alpha^3(a)$	$q^3\alpha^3(a)$
$1, x - a, (x - a)^2$	A_2	$\alpha^3(a)$	$q\alpha^3(a)$	0
$1, 1, (x - a)^3$	A_3	$\alpha^3(a)$	0	0
$1, x - a, (x - a)(x - b)$	A_4	$\alpha(a^2b)$	$(q + 1)\alpha(a^2b)$	$q\alpha(a^2b)$
$1, 1, (x - a)^2(x - b)$	A_5	$\alpha(a^2b)$	$\alpha(a^2b)$	0
$1, 1, (x - a)(x - b)(x - c)$	T_1	$\alpha(abc)$	$2\alpha(abc)$	$\alpha(abc)$
$1, 1, (x - a)(x - \varkappa)(x - \varkappa^q)$	T_2	$\alpha(a\varkappa\varkappa^q)$	0	$-\alpha(a\varkappa\varkappa^q)$
$1, 1, (x - z)(x - z^q)(x - z^{q^2})$	T_3	$\alpha(zz^qz^{q^2})$	$-\alpha(zz^qz^{q^2})$	$\alpha(zz^qz^{q^2})$
$a, b, c \in \mathbb{F}_q^\times, a \neq b \neq c \neq a$ $\varkappa \in \mathbb{F}_{q^2} - \mathbb{F}_q, z \in \mathbb{F}_{q^3} - \mathbb{F}_q$				
Число характеров		$q - 1$	$q - 1$	$q - 1$
		основная серия		

Представители	$\chi_{\alpha, \beta}^{q^2+q+1}$	$\chi_{\alpha, \beta}^{q(q^2+q+1)}$
A_1	$(q^2 + q + 1)(\alpha\beta^2)(a)$	$q(q^2 + q + 1)(\alpha\beta^2)(a)$
A_2	$(q + 1)(\alpha\beta^2)(a)$	$q(\alpha\beta^2)(a)$
A_3	$(\alpha\beta^2)(a)$	0
A_4	$(q + 1)\alpha(a)\beta(ab) + \beta^2(a)\alpha(b)$	$(q + 1)\alpha(a)\beta(ab) + q\beta^2(a)\alpha(b)$
A_5	$\alpha(a)\beta(ab) + \beta^2(a)\alpha(b)$	$\alpha(a)\beta(ab)$
T_1	$\sum_{(a,b,c)} \alpha(a)\beta(bc)$	$\sum_{(a,b,c)} \alpha(a)\beta(bc)$
T_2	$\alpha(a)\beta(\varkappa\varkappa^q)$	$-\alpha(a)\beta(\varkappa\varkappa^q)$
T_3	0	0
Число характеров	$(q - 1)(q - 2)$	$(q - 1)(q - 2)$
	основная серия	

Представители	$\chi_{\alpha, \beta, \gamma}^{(q+1)(q^2+q+1)}$	$\chi_{\alpha, \lambda}^{q^3-1}$	$\chi_\varphi^{(q-1)(q^2-1)}$
A_1	$(q + 1)(q^2 + q + 1)(\alpha\beta\gamma)(a)$	$(q^3 - 1)\alpha(a)\lambda(a)$	$(q - 1)(q^2 - 1)\varphi(a)$
A_2	$(2q + 1)(\alpha\beta\gamma)(a)$	$-\alpha(a)\lambda(a)$	$-(q - 1)\varphi(a)$
A_3	$(\alpha\beta\gamma)(a)$	$-\alpha(a)\lambda(a)$	$\varphi(a)$
A_4	$(q + 1)\sum_{(\alpha, \beta, \gamma)} (\alpha\beta)(a)\gamma(b)$	$(q - 1)\alpha(b)\lambda(a)$	0
A_5	$\sum_{(\alpha, \beta, \gamma)} (\alpha\beta)(a)\gamma(b)$	$-\lambda(a)\alpha(b)$	0
T_1	$\sum_{(\alpha, \beta, \gamma)} \alpha(a)\beta(b)\gamma(c)$	0	0
T_2	0	$-\alpha(a)(\lambda + \lambda^q)(\varkappa)$	0
T_3	0	0	$(\varphi + \varphi^q + \varphi^{q^2})(z)$
		$\lambda \in (\mathbb{F}_{q^2}^\times)^\wedge,$ $\lambda \neq \lambda^q$	$\varphi \in (\mathbb{F}_{q^3}^\times)^\wedge,$ $\varphi \neq \varphi^q$
Число характеров	$(q - 1)(q - 2)(q - 3)/6$	$q(q - 1)^2/3$	$q(q^2 - 1)/3$
		промежуточная серия	дискретная серия

$$\begin{aligned}
(4) \quad & \chi_{\alpha,\alpha}^{q(q^2+q+1)} = \chi_{\alpha}^{q^3} + \chi_{\alpha}^{q^2+q}; \\
(5) \quad & \chi_{\alpha,\alpha}^{q^2+q+1} = \chi_{\alpha}^1 + \chi_{\alpha}^{q^2+q}; \\
(6) \quad & \chi_{\alpha,\beta,\beta}^{(q+1)(q^2+q+1)} = \chi_{\alpha,\beta}^{q^2+q+1} + \chi_{\alpha,\beta}^{q(q^2+q+1)}; \\
(7) \quad & \chi_{\alpha,\alpha,\alpha}^{(q+1)(q^2+q+1)} = \chi_{\alpha}^1 + 2\chi_{\alpha}^{q^2+q} + \chi_{\alpha}^{q^3}.
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перечисленные выше соотношения выводятся из таблицы характеров группы G .

3. Тензорные произведения неприводимых характеров группы G

3.1. Общие результаты. В дальнейшем через $\tilde{\alpha}$ мы обозначаем продолжение на $\mathbb{F}_{q^2}^{\times}$ или на $\mathbb{F}_{q^3}^{\times}$ (в зависимости от рассматриваемого случая) характера $\alpha \in \widehat{\mathbb{F}_q^{\times}}$. Обозначение $\lambda|$ используется для сужения на $\mathbb{F}_q^{\times}$ характера λ группы $\mathbb{F}_{q^2}^{\times}$. Наконец, через μ^q мы обозначаем $\mu \circ F$, где $F - \mathbb{F}_q^{\times}$ -автоморфизм группы $\mathbb{F}_{q^3}^{\times}$ (или $\mathbb{F}_{q^2}^{\times}$), заданный формулой $F(x) = x^q$.

ТЕОРЕМА 3. *Во введенных выше обозначениях выполнены следующие соотношения:*

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \text{i) } \chi_{\alpha,\lambda}^{q^3-1} \otimes \chi_{\beta,\gamma,\delta}^{(q+1)(q^2+q+1)} \\
& \quad = \text{Ind}_{T_m}^G(\gamma\delta\lambda, \alpha\beta) + \chi_{\alpha\beta,\gamma\delta\lambda}^{q^3-1} + (\chi_{\alpha\gamma,\beta\delta\lambda}^{q^3-1} + \chi_{\alpha\delta,\beta\gamma\lambda}^{q^3-1}) \otimes \chi_1^{q^2+q}; \\
& \quad \text{ii) } \chi_{\alpha\lambda,(\alpha \circ N_2)\lambda^2}^{q^3-1} \otimes \chi_{\beta,\gamma,\delta}^{(q+1)(q^2+q+1)} = \text{Ind}_{T_{\text{iso}}}^G(\alpha\lambda\beta, \alpha\lambda\gamma, \alpha\lambda\delta) - \chi_{\alpha\lambda\beta,\alpha\lambda\gamma,\alpha\lambda\delta}^{(q+1)(q^2+q+1)}; \\
(2) \quad & \chi_{\alpha,\lambda}^{q^3-1} \otimes \chi_{\beta,\mu}^{q^3-1} = \text{Ind}_{T_m}^G(\lambda\mu, \alpha\beta) - \chi_{\alpha\beta,\lambda\mu^q}^{q^3-1}; \\
(3) \quad & \text{i) } \chi_{\alpha,\lambda}^{q^3-1} \otimes \chi_{\varphi}^{(q-1)(q^2-1)} = \text{Ind}_{T_a}^G(\tilde{\alpha}\tilde{\lambda}|_{\varphi}) - \chi_{\tilde{\alpha}\tilde{\lambda}|_{\varphi}}^{(q-1)(q^2-1)}; \\
& \quad \text{ii) } \chi_{\alpha,\lambda}^{q^3-1} \otimes \chi_{\varphi}^{(q-1)(q^2-1)} = \text{Ind}_{T_m}^G(\lambda, \alpha\varphi) + \chi_{\alpha\varphi,\lambda}^{q^3-1} \otimes (\chi_1^1 - \chi_1^{q^2+q}); \\
(4) \quad & \chi_{\delta}^{q^3} \otimes \chi_{\alpha,\beta,\gamma}^{(q+1)(q^2+q+1)} = \text{Ind}_{T_{\text{iso}}}^G(\alpha\delta, \beta\delta, \gamma\delta); \\
(5) \quad & \chi_{\alpha}^{q^3} \otimes \chi_{\varphi}^{(q-1)(q^2-1)} = \text{Ind}_{T_a}^G(\alpha \circ N_3)\varphi; \\
(6) \quad & \chi_{\alpha}^{q^3} \otimes \chi_{\beta,\lambda}^{q^3-1} = \text{Ind}_{T_m}^G((\alpha \circ N_2)\lambda, \alpha\beta); \\
(7) \quad & \text{i) } \chi_{\alpha}^{q^3} \otimes \chi_{\beta}^{q^3} = \text{Ind}_{T_m}^G(\alpha\beta \circ N_2, \alpha\beta) + \chi_{\alpha\beta}^{q^3}; \\
& \quad \text{ii) } \chi_{\alpha}^{q^3} \otimes \chi_{\beta}^{q^3} = \text{Ind}_{T_{\text{iso}}}^G(\alpha\beta, \alpha\beta, \alpha\beta) - \chi_{\alpha\beta}^{q^3} \otimes (2\chi_1^{q^2+q} + \chi_1^1); \\
& \quad \text{iii) } \chi_{\alpha}^{q^3} \otimes \chi_{\beta}^{q^3} = \text{Ind}_{T_a}^G \alpha\beta \circ N_3 + \chi_{\alpha\beta}^{q^3} \otimes (\chi_1^{q^2+q} - \chi_1^1); \\
(8) \quad & \text{i) } \chi_{\varphi}^{(q-1)(q^2-1)} \otimes \chi_{\alpha,\beta,\gamma}^{(q+1)(q^2+q+1)} = \text{Ind}_{T_a}^G \varphi(\alpha\beta\gamma) + \chi_{\varphi(\alpha\beta\gamma)}^{(q-1)(q^2-1)} \otimes (2\chi_1^{q^2+q} + \chi_1^1); \\
& \quad \text{ii) } \chi_{\varphi}^{(q-1)(q^2-1)} \otimes \chi_{\alpha,\beta,\gamma}^{(q+1)(q^2+q+1)} = \text{Ind}_{T_{\text{iso}}}^G(\alpha, \beta, \varphi\gamma) + \chi_{\alpha,\beta,\varphi\gamma}^{(q+1)(q^2+q+1)} \otimes (\chi_1^1 - \chi_1^{q^2+q}); \\
(9) \quad & \chi_{\varphi}^{(q-1)(q^2-1)} \otimes \chi_{\psi}^{(q-1)(q^2-1)} \\
& \quad = \text{Ind}_{T_a}^G \varphi\psi + \chi_{\varphi\psi^q}^{(q-1)(q^2-1)} + \chi_{\varphi\psi^{q^2}}^{(q-1)(q^2-1)} - \chi_{\varphi\psi}^{(q-1)(q^2-1)} \otimes (\chi_1^{q^2+q} + \chi_1^1); \\
(10) \quad & \chi_{\alpha,\beta,\gamma}^{(q+1)(q^2+q+1)} \otimes \chi_{\delta,\varepsilon,\eta}^{(q+1)(q^2+q+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{Ind}_{T_{\text{iso}}}^G(\alpha\delta, \beta\varepsilon, \gamma\eta) + \sum_{(\delta\varepsilon\eta) \in S_3 - \{I\}} \chi_{\alpha\delta, \beta\varepsilon, \gamma\eta}^{(q+1)(q^2+q+1)} \\
 &\quad + (\chi_{\alpha\varepsilon, \beta\eta, \gamma\delta}^{(q+1)(q^2+q+1)} + \chi_{\alpha\eta, \beta\delta, \gamma\varepsilon}^{(q+1)(q^2+q+1)}) \otimes (\chi_1^{q^2+q} - 2\chi_1^1).
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в вычислении соответствующих характеров на разных классах сопряженности группы G (см. раздел 2) с помощью леммы 2.

Докажем, например, равенство (8)_i.

Оно непосредственно вытекает из таблицы характеров и леммы 2 для классов сопряженности, содержащих A_i с $i = 1, 2, 3, 4, 5$ и T_2 .

Для T_3 имеем

$$(\chi_{\varphi}^{(q-1)(q^2-1)} \otimes \chi_{\alpha, \beta, \gamma}^{(q+1)(q^2+q+1)})(T_3) = (\varphi + \varphi^q + \varphi^{q^2})(z) = 0.$$

С другой стороны, выполнены равенства

$$\begin{aligned}
 &(\text{Ind}_{T_a}^G \varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma}) + \chi_{\varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma})}^{(q-1)(q^2-1)} \otimes (2\chi_1^{q^2+q} + \chi_1^1))(T_3) \\
 &= \frac{1}{|T_a|} \sum_{\substack{X \in G \\ XT_3X^{-1} \in T_a}} \varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma})(XT_3X^{-1}) - (\varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma}) + (\varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma}))^q + (\varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma}))^{q^2})(z) \\
 &= \frac{1}{|T_a|} \sum_{X \in T_a \times \Gamma_3} \varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma})(XT_3X^{-1}) - \varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma})(z) - (\varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma}))^q(z) - (\varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma}))^{q^2}(z) \\
 &= \frac{|T_a|}{|T_a|} (\varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma})(z) + \varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma})(z^q) + \varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma})(z^{q^2}) - \\
 &\quad - \varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma})(z) - (\varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma}))^q(z) - (\varphi(\widetilde{\alpha\beta\gamma}))^{q^2}(z)) = 0.
 \end{aligned}$$

Наконец, следующее следствие дает формулы для неприводимых представлений, которые получаются из предыдущих формул в предельных случаях совпадения параметров с помощью леммы 2.

СЛЕДСТВИЕ 4. В тех же обозначениях, что и выше, выполнены следующие соотношения:

- (1) $\chi_{\alpha}^{q^3} \otimes [\chi_{\beta, \gamma}^{q^2+q+1} + \chi_{\beta, \gamma}^{q(q^2+q+1)}] = \text{Ind}_{T_{\text{iso}}}^G(\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\gamma);$
- (2) $\chi_{\alpha}^{q^3} \otimes \chi_{\beta}^{q^2+q} = 2\chi_{\alpha\beta}^{q^3} + \text{Ind}_{T_m}^G(\alpha\beta \circ N_2, \alpha\beta) - \text{Ind}_{T_a}^G(\alpha \circ N_3)(\beta \circ N_3).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, (1) получается из равенства (4) теоремы 3 при приравнивании двух параметров; (2) получается из равенства (1) леммы 2 с использованием равенств (7) и (5) теоремы 3.

3.2. Тензорные произведения и представления Гельфанда–Граева. Следующее предложение описывает сумму обобщенных представлений Гельфанда–Граева группы G как тензорное произведение дискретной и основной серий представлений. Пусть N – стандартная унипотентная подгруппа группы G , и пусть N_0 – подгруппа N , состоящая из матриц, у которых на (1, 2)-м месте стоит 0, т.е.

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in k \right\} \quad \text{и} \quad N_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in k \right\}.$$

Предположим, что φ – нетривиальный характер поля k ; тем же символом φ мы обозначаем характер на N , определенный формулой

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \varphi(x+y).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. В тех же обозначениях, что и выше, выполнено равенство

$$\chi_{\psi}^{(q-1)(q^2-1)} \otimes \chi_{\beta, \gamma, \delta}^{(q+1)(q^2+q+1)} = \text{Ind}_{ZN}^G(\psi\beta\gamma\delta)\varphi + \text{Ind}_{ZN_0}^G(\psi\beta\gamma\delta)\varphi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы вычислим нужные характеры на классе сопряженности матрицы A_2 . Положим

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$[\chi_{\psi}^{(q-1)(q^2-1)} \otimes \chi_{\beta, \gamma, \delta}^{(q+1)(q^2+q+1)}](A) = -(q-1)(2q+1)(\psi\beta\gamma\delta)(a).$$

Пусть

$$D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & r \\ 0 & 0 & t \\ z & w & s \end{pmatrix} \mid xw - yz \neq 0, t \neq 0, r, s \in k \right\},$$

$$D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & r \\ 0 & l & t \\ 0 & w & s \end{pmatrix} \mid xw \neq 0, l, t \neq 0, r, s \in k \right\}$$

и $D = D_1 \cup D_2$. Тогда

$$\begin{aligned} & [\text{Ind}_{ZN}^G(\psi\beta\gamma\delta)\varphi + \text{Ind}_{ZN_0}^G(\psi\beta\gamma\delta)\varphi](A) \\ &= \frac{1}{|ZN|} \sum_{X \in D} (\psi\beta\gamma\delta)\varphi(X^{-1}AX) + \frac{1}{|ZN_0|} \sum_{X \in D} (\psi\beta\gamma\delta)\varphi(X^{-1}AX) \\ &= \frac{1}{|ZN|} \sum_{X \in D_1} (\psi\beta\gamma\delta)(a)\varphi\left(\frac{-a^{-1}tz}{xw - zy}\right) + \frac{1}{|ZN|} \sum_{X \in D_2} (\psi\beta\gamma\delta)(a)\varphi\left(\frac{a^{-1}x}{t}\right) \\ &\quad + \frac{1}{|ZN_0|} \sum_{X \in D_1} (\psi\beta\gamma\delta)(a)\varphi\left(\frac{-a^{-1}tz}{xw - zy}\right) \\ &= \frac{1}{|ZN|} [q^3(q-1)^3 - q^4(q-1)^2](\psi\beta\gamma\delta)(a) + \frac{1}{|ZN|} [-q^4(q-1)^2](\psi\beta\gamma\delta)(a) \\ &\quad + \frac{1}{|ZN_0|} [q^3(q-1)^3 - q^4(q-1)^2](\psi\beta\gamma\delta)(a) \\ &= [-(q-1)(q+1) - (q-1)(2q+1)](\psi\beta\gamma\delta)(a) \\ &= -(q-1)(2q+1)(\psi\beta\gamma\delta)(a). \end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляются характеры на классе сопряженности матрицы A_3 . В этом случае сумма, соответствующая ZN_0 , не имеет носителя.

Остальные случаи проверяются непосредственными вычислениями.

Доказанное выше предложение дает основания полагать, что для представлений Гельфанда–Граева группы $GL(n)$ выполнено следующее утверждение.

ГИПОТЕЗА 6. *Имеет место равенство*

$$\chi_{\psi}^{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^{n-1}-1)} \otimes \chi_{\beta_1, \dots, \beta_n}^{(q+1)(q^2+q+1)\cdots(q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots+q+1)} \\ = \text{Ind}_{ZN}^G(\psi\beta_1 \dots \beta_n)\varphi + \text{Ind}_{ZN_{(2)}}^G(\psi\beta_1 \dots \beta_n)\varphi + \cdots + \text{Ind}_{ZN_{(n-1)}}^G(\psi\beta_1 \dots \beta_n)\varphi,$$

где $N_{(t)}$, $1 < t \leq n-1$, – подгруппа группы N , состоящая из матриц, в которых $a_{ij} = 0$ для $1 < i < j \leq t$.

3.3. Приложение: вычисление коэффициентов Клебша–Гордана для тензорного произведения двух неприводимых каспидальных представлений. С помощью полученных выше результатов можно легко вычислять разложения тензорных произведений неприводимых представлений группы G в их неприводимые составляющие. Например, для стандартного внутреннего произведения $\langle \Omega, \Theta \rangle_G$ двух комплекснозначных функций на G , которое определяется формулой

$$\langle \Omega, \Theta \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \Omega(t) \overline{\Theta(t)},$$

коэффициенты Клебша–Гордана тензорного произведения двух каспидальных представлений

$$\chi_{\varphi}^{(q-1)(q^2-1)} \otimes \chi_{\psi}^{(q-1)(q^2-1)}$$

удовлетворяют следующим условиям:

- (1) $\langle \chi_{\varphi}^{(q-1)(q^2-1)} \otimes \chi_{\psi}^{(q-1)(q^2-1)}, \chi_{\alpha}^1 \rangle = 1 \iff \varphi\psi = \alpha \circ N_3;$
- (2) $\langle \chi_{\varphi}^{(q-1)(q^2-1)} \otimes \chi_{\psi}^{(q-1)(q^2-1)}, \chi_{\alpha, \beta, \gamma}^{(q+1)(q^2+q+1)} \rangle_G = \langle \varphi\psi, \alpha\beta\gamma \rangle_{k \times};$
- (3) $\langle \chi_{\varphi}^{(q-1)(q^2-1)} \otimes \chi_{\psi}^{(q-1)(q^2-1)}, \chi_{\Lambda}^{(q-1)(q^2-1)} \rangle \\ = \langle \varphi\psi, \Lambda \rangle_{T_a} + \langle \varphi\psi, \Lambda^q \rangle_{T_a} + \langle \varphi\psi, \Lambda^{q^2} \rangle_{T_a} + (q-3)\langle \varphi\psi, \Lambda \rangle_{k \times} \\ + \langle \chi_{\varphi\psi^q}^{(q-1)(q^2-1)}, \chi_{\Lambda}^{(q-1)(q^2-1)} \rangle + \langle \chi_{\varphi\psi^{q^2}}^{(q-1)(q^2-1)}, \chi_{\Lambda}^{(q-1)(q^2-1)} \rangle \\ = \langle \varphi\psi, \Lambda \rangle_{T_a} + \langle \varphi\psi, \Lambda^q \rangle_{T_a} + \langle \varphi\psi, \Lambda^{q^2} \rangle_{T_a} + \langle \varphi\psi^q, \Lambda \rangle_{T_a} + \langle \varphi\psi^q, \Lambda^q \rangle_{T_a} \\ + \langle \varphi\psi^q, \Lambda^{q^2} \rangle_{T_a} + \langle \varphi\psi^{q^2}, \Lambda \rangle_{T_a} + \langle \varphi\psi^{q^2}, \Lambda^q \rangle_{T_a} \\ + \langle \varphi\psi^{q^2}, \Lambda^{q^2} \rangle_{T_a} + (q-3)\langle \varphi\psi, \Lambda \rangle_{k \times}.$

Мы благодарим А. Гишарде за мотивацию обсуждений и инициирование нашего исследования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover Publ., New York, 1950.
- [2] A. C. Kable, N. Sanat, “The exterior and symmetric square of the reaclion representation of $A_n(q)$ and $D_n(q)$ ”, *J. Algebra*, **288**:2 (2005), 409–444.
- [3] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory. A First Course*, Grad. Texts in Math., **129**, Springer-Verlag, New York, 1991.

- [4] F. L. Williams, “Tensor Products of Principal Series Representations. Reduction of Tensor Products of Principal Series. Representations of Complex Semisimple Lie Groups”, *Lecture Notes in Math.*, **358**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [5] L. Aburto-Hageman, J. Pantoja, “Tensor products of irreducible representations of the groups $GL(2, k)$ and $SL(2, k)$, k a finite field”, *Comm. Algebra*, **28**:5 (2000), 2507–2514.
- [6] C. Asmuth, J. Repka, “Tensor products for $SL_2(K)$. II. Supercuspidal representations”, *Pacific J. Math.*, **97**:1 (1981), 1–18.
- [7] C. Asmuth, J. Repka, “Tensor products for $SL_2(K)$. I. Complementary series and the special representation”, *Pacific J. Math.*, **97**:2 (1981), 271–282.
- [8] R. P. Martin, “Tensor products for $SL(2, k)$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **239** (1978), 197–211.
- [9] R. P. Martin, “On the decomposition of tensor products of principal series representations for real-rank one semisimple groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **201** (1975), 177–211.
- [10] R. P. Martin, “Tensor products for the de Sitter group”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **284**:2 (1984), 795–814.
- [11] D. Prasad, “Trilinear forms for representations of $GL(2)$ and local ε -factors”, *Compositio Math.*, **75**:1 (1990), 1–46.
- [12] L. Pukánszky, “On the Kronecker products of irreducible representations of the 2×2 real unimodular group. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **100** (1961), 116–152.
- [13] L. Pukánszky, “On the Kronecker product of irreducible unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group”, *J. Math. Mech.*, **10** (1961), 475–491.
- [14] J. Repka, “Tensor products of unitary representations of $SL_2(\mathbb{R})$ ”, *Amer. J. Math.*, **100**:4 (1978), 747–774.
- [15] G. Rideau, “Sur la réduction du produit tensoriel des représentations de la série discrete de $SL(2, \mathbb{R})$ ”, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, **4** (1966), 67–76.
- [16] G. W. Mackey, “Induced representations of locally compact groups. I”, *Ann. of Math. (2)*, **55** (1952), 101–139.
- [17] G. W. Mackey, “Induced representations of locally compact groups. II. The Frobenius reciprocity theorem”, *Ann. of Math. (2)*, **58** (1953), 193–221.
- [18] P. Deligne, G. Lusztig, “Representations of reductive groups over finite fields”, *Ann. of Math. (2)*, **103**:1 (1976), 103–161.
- [19] A. Guichardet, J. Soto-Andrade, *Produits Tensoriel et Représentations Induites*, Preprint, 1990.
- [20] J. Soto-Andrade, J. Vargas, “Twisted spherical functions on the finite Poincaré upper half-plane”, *J. Algebra*, **248**:2 (2002), 724–746.
- [21] A. C. Kable, “Legendre sums, Soto-Andrade sums and Kloosterman sums”, *Pacific J. Math.*, **206**:1 (2002), 139–157.
- [22] M. Tsuchikawa, “The Plancherel transform on $SL_2(k)$ and its applications to the decomposition of tensor products of irreducible representations”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **22**:3 (1982/83), 369–433.
- [23] R. Steinberg, “The representations of $GL(3, q)$, $GL(4, q)$, $PGL(3, q)$ and $PGL(4, q)$ ”, *Canad. J. Math.*, **3** (1951), 225–235.

Л. Абурто-Гаагаман

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Чили
E-mail: laburto@ucv.cl

Поступило

03.05.2010

Х. Пантоха

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Чили
E-mail: jpantoja@ucv.cl

Х. Сото-Андрате

Universidad de Chile, Чили
E-mail: sotoandrade@u.uchile.cl