Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, А. А. Чесноков, О матрицах, обратных к брауновским и родственным им матрицам, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 1, 89–99

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 04:50:09

УДК 512.64

О МАТРИЦАХ, ОБРАТНЫХ К БРАУНОВСКИМ И РОДСТВЕННЫМ ИМ МАТРИЦАМ

Х. Д. Икрамов, А. А. Чесноков

В нескольких статьях Ф. Валви указал достаточные условия для того, чтобы брауновские и родственные им матрицы имели хессенберговы обратные. Мы интерпретируем эти условия с точки зрения известных фактов о матрицах малого треугольного ранга, что позволяет сформулировать более общие утверждения о хессенберговости обратной матрицы. Кроме того, при некотором естественном условии “неразложимости” найден явный вид матрицы, обратной к брауновской. Он схож с хорошо известным явным видом матрицы, обратной к неразложимой трехдиагональной матрице. При этом параметры, определяющие обратную к $(n \times n)$ -матрице, могут быть вычислены за $O(n)$ арифметических операций.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Брауновской называется $(n \times n)$ -матрица следующего строения:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ c_1 & c_2 & a_3 & \dots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Таким образом, A определяется всего лишь $3n - 2$ параметрами. Матрицу, получаемую из матрицы (1) отражением относительно ее центра, будем называть *отраженной брауновской*. Обе разновидности брауновских матриц обладают одинаковыми свойствами (возможно, с точностью до указанной центральной симметрии).

Брауновские матрицы издавна используются как тестовые. Например, в известной книге [1] матрица 3.24 является брауновской, а матрицы 3.12, 3.13 и 4.14 – отраженными брауновскими.

В статье 1977 г. [2] Валви показал, что симметричная (отраженная) брауновская матрица вида

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \\ k_2 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \\ k_3 & k_3 & k_3 & \dots & k_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n & k_n & k_n & \dots & k_n \end{pmatrix}, \quad (2)$$

если она невырождена, имеет трехдиагональную обратную. (В дальнейшем невырожденность интересующих нас матриц предполагается без специального упоминания.) Позднее в [3] это наблюдение было обобщено: оказалось, что для матрицы типа

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ a_1 & a_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

обратная матрица $B = A^{-1}$ является верхней хессенберговой, т.е. $b_{ij} = 0$ при $i - j > 1$.

Еще один любопытный результат, содержащийся в [2], состоит в том, что трехдиагональную форму имеет обратная для симметричной матрицы вида

$$\begin{pmatrix} k_1 a_1 & k_2 a_1 & k_3 a_1 & \dots & k_n a_1 \\ k_2 a_1 & k_2 a_2 & k_3 a_2 & \dots & k_n a_2 \\ k_3 a_1 & k_3 a_2 & k_3 a_3 & \dots & k_n a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n a_1 & k_n a_2 & k_n a_3 & \dots & k_n a_n \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Последняя представляет собой адамарово (т.е. поэлементное) произведение отраженной брауновской матрицы (2) и брауновской матрицы типа (3). В [4] и этот результат был обобщен: для адамарова произведения матрицы (2) и несимметричной матрицы (3) обратная матрица имеет верхнюю форму Хессенберга.

Цель настоящей статьи заключается в том, чтобы объяснить указанные результаты в свете общих фактов о матрицах малого вне- и поддиагонального рангов. Авторы работ [2]–[4] не были знакомы (а в некоторых случаях, исходя из хронологии, и не могли быть знакомы) с этими фактами. Кроме того, при некотором естественном ограничении на брауновскую матрицу (1) мы указываем явный вид обратной к ней матрицы, аналогичный хорошо известному виду матрицы, обратной к неразложимой трехдиагональной матрице. При этом параметры, определяющие обратную матрицу, могут быть вычислены за $O(n)$ операций.

Хотя брауновские матрицы составляют довольно узкий и экзотический матричный класс, приемы, используемые при работе с ними, получили далекое развитие в таких важных вопросах современной линейной алгебры, как семисепарабельность [5], мозаичные ранги [6], и др.

2. Структурные ранги взаимно обратных матриц. Пусть A – квадратная матрица порядка n . *Внедиагональным рангом* $w(A)$ этой матрицы называется наивысший порядок ее ненулевых миноров, целиком составленных из внедиагональных элементов. Для диагональной матрицы D (единственная ситуация, когда все указанные миноры равны нулю) полагаем $w(D) = 0$.

Для невырожденной диагональной матрицы D обратная матрица D^{-1} , очевидно, тоже диагональна, поэтому

$$w(D^{-1}) = w(D) = 0.$$

Как установлено в [7], равенство внедиагональных рангов взаимно обратных матриц является общим правилом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – невырожденная квадратная матрица. Тогда

$$w(A^{-1}) = w(A). \quad (5)$$

Матрица, обратная к треугольной матрице A , сама является треугольной, причем верхней (или нижней), если A – верхняя (нижняя) треугольная. Этот элементарный факт получил в [7] нетривиальное обобщение. Назовем *верхнетреугольным (нижнетреугольным) рангом* квадратной матрицы A наивысший порядок ее ненулевых миноров, целиком составленных из наддиагональных (поддиагональных) элементов. Верхнетреугольный (нижнетреугольный) ранг нижнетреугольной (верхнетреугольной) матрицы A по определению равен нулю. В общем случае, верхнетреугольный ранг A обозначаем символом $r_u(A)$, а нижнетреугольный ранг – символом $r_l(A)$.

ТЕОРЕМА 2 ([8]). Пусть A – невырожденная квадратная матрица. Тогда

$$r_u(A^{-1}) = r_u(A), \quad (6)$$

$$r_l(A^{-1}) = r_l(A). \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что оба треугольных ранга каждой из матриц (1)–(4) не превосходят 1 и равны единице, если эти матрицы не являются треугольными.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если невырожденная брауновская матрица A не является треугольной, то

$$r_u(A^{-1}) = r_l(A^{-1}) = 1. \quad (8)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть A_1 – брауновская, а A_2 – отраженная брауновская матрицы, причем обе невырожденны и не являются треугольными. Тогда для адамарова произведения $A = A_1 \circ A_2$ имеем

$$r_u(A^{-1}) = r_l(A^{-1}) = 1. \quad (9)$$

Классическая ситуация, в которой реализуется треугольный ранг, равный единице, связана с хессенберговыми матрицами.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть A – невырожденная матрица Хессенберга, не являющаяся треугольной. Если A – верхняя хессенбергова матрица, то

$$r_l(A^{-1}) = 1. \quad (10)$$

Для нижней хессенберговой матрицы A имеем

$$r_u(A^{-1}) = 1. \quad (11)$$

Если A – трехдиагональная матрица, то выполняются оба равенства (10) и (11).

Посмотрим, как выглядит матрица, обратная к хессенберговой матрице A . Это даст нам представление об устройстве матрицы, обратной к брауновской.

Для определенности возьмем нижнюю матрицу Хессенберга порядка n , причем будем считать ее неразложимой, т.е.

$$a_{ij} \neq 0 \quad \text{при } j = i + 1. \quad (12)$$

Представим A в блочной форме

$$A = \begin{pmatrix} b & A_{n-1} \\ \alpha & c^T \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где A_{n-1} – квадратная матрица порядка $n-1$. В силу предположения (12) эта треугольная подматрица невырождена. Используя формулу Банахевича–Шура для обратной матрицы (один из вариантов этой формы можно найти в [9, раздел 0.7.3]) имеем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{s}c^T A_{n-1}^{-1} & \frac{1}{s} \\ A_{n-1}^{-1} + \frac{1}{s}A_{n-1}^{-1}bc^T A_{n-1}^{-1} & -\frac{1}{s}A_{n-1}^{-1}b \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где число

$$s = \alpha - c^T A_{n-1}^{-1}b \quad (15)$$

есть дополнение Шура подматрицы A_{n-1} . Вводя n -мерные векторы

$$u = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 1 \\ -A_{n-1}^{-1}b \end{pmatrix} \quad (16)$$

и

$$v^T = (-c^T A_{n-1}^{-1} \quad 1), \quad (17)$$

можем переписать (14) в виде

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix} + uv^T. \quad (18)$$

Для хессенберговой матрицы A подматрица A_{n-1} нижнетреугольная; следовательно, нижнетреугольной является и A_{n-1}^{-1} . Поэтому диагональная и наддиагональная части матрицы (18) совпадают с соответствующими частями одноранговой матрицы uv^T , откуда

$$(A^{-1})_{ij} = u_i v_j, \quad j \geq i. \quad (19)$$

Отметим, что эти рассуждения заимствованы нами из статьи [10].

Для верхней матрицы Хессенберга аналогичным образом определяются диагональные и поддиагональные элементы в A^{-1} . Если же A – неразложимая трехдиагональная матрица, т.е.

$$a_{ij} \neq 0 \quad \text{при} \quad |j - i| = 1, \quad (20)$$

то найдутся n -мерные векторы x, y, u, v такие, что

$$(A^{-1})_{ij} = \begin{cases} u_i v_j, & j \geq i, \\ y_i x_j, & i \geq j. \end{cases} \quad (21)$$

Тем самым должны выполняться условия согласования

$$u_i v_i = x_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Заметим, что матрицу (21) можно интерпретировать как адамарово произведение брауновской матрицы

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_1 & \dots & u_1 \\ x_1 & u_2 & \dots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & u_n \end{pmatrix},$$

относящейся (с точностью до транспонирования) к типу (3), и отраженной брауновской матрицы

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ y_2 & v_2 & \dots & v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_n & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

того же типа. Это наблюдение было сделано в [11].

Исходя из следствия 1, можно ожидать, что матрица, обратная к брауновской, имеет сходную форму, по крайней мере, при ограничении, аналогичном условию неразложимости в трехдиагональном случае. Мы вернемся к этому вопросу в разделе 4.

3. Хессенберговость обратной матрицы. Свойство обратной матрицы быть ленточной можно установить, выполняя некоторые проверки для рангов подматриц в самой матрице A . Мы воспроизведем соответствующий результат из [12], адаптируя его для случая хессенберговой формы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – невырожденная $(n \times n)$ -матрица. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:

- 1) A^{-1} имеет верхнюю форму Хессенберга;
- 2) любая подматрица матрицы A , расположенная в области $i \geq j$, имеет ранг, меньший или равный единице.

Проверки, предусматриваемые утверждением 2, можно упростить, пользуясь дополнением теоремы 3, найденным в [10]. Обозначим через $A(r, s)$ подматрицу в A , образованную ее последними r строками и первыми s столбцами.

ТЕОРЕМА 4. В условиях теоремы 3 каждое из утверждений 1) и 2) эквивалентно соотношениям

$$\text{rank } A(r, n+1-r) = 1, \quad 2 \leq r \leq n-1. \quad (22)$$

Если для матрицы A выполнены равенства (22) и при этом

$$a_{n1} \neq 0, \quad (23)$$

то A^{-1} является неразложимой верхней хессенберговой матрицей.

Применим теорему 4 к выяснению условий, при которых брауновская матрица (1) имеет (верхнюю) хессенбергову матрицу A^{-1} . При этом будем считать, что $c_1 \neq 0$, так как в противном случае хессенберговость A^{-1} определяется свойствами нижней угловой подматрицы порядка $n-1$ в A .

Равенство (22) при $r = 2$ требует, чтобы подматрица

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \end{pmatrix}$$

имела ранг 1. Очевидно, это требование равносильно тому, чтобы

$$c_{n-1} = a_{n-1}.$$

Аналогичным образом остальные соотношения (22) приводят к равенствам

$$c_i = a_i, \quad i = 2, \dots, n-2.$$

Мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы невырожденная брауновская матрица (1) имела верхнюю хессенбергову матрицу A^{-1} , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$c_i = a_i, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (24)$$

При $c_1 \neq 0$ хессенбергова матрица A^{-1} является неразложимой.

Теорема 5 полностью объясняет результаты из [2], [3], относящиеся к брауновским матрицам. При этом она показывает избыточность выдвинутых там условий. Действительно, можно заменить диагональные элементы k_n в (2) и a_1 в (3) произвольными числами, лишь бы матрица оставалась невырожденной, и это не повлияет на трехдиагональность или хессенберговость формы обратной матрицы.

Пусть, например,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & 6 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

т.е. $a_1 = 7 \neq c_1 = 1$. Имеем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & \frac{6}{25} & -\frac{3}{25} & -\frac{4}{25} & -\frac{2}{25} \\ -\frac{1}{25} & -\frac{39}{25} & \frac{46}{75} & \frac{184}{225} & \frac{92}{225} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, A^{-1} – хессенбергова матрица.

Обратимся теперь к адамаровым произведениям брауновских матриц. Прежде всего, отметим простое, но полезное следствие теоремы 5.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть A_1 и A_2 – невырожденные брауновские матрицы, имеющие верхние хессенберговы обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1} . Если адамарово произведение $A = A_1 \circ A_2$ невырожденно, то матрица A^{-1} также верхняя хессенбергова.

Действительно, если условия (24) выполняются для A_1 и A_2 , то они верны и для A .

Рассмотрим теперь адамарово произведение брауновской матрицы (3) и отраженной брауновской матрицы

$$\begin{pmatrix} k_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_n \\ k_2 & k_2 & l_3 & \dots & l_n \\ k_3 & k_3 & k_3 & \dots & l_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n & k_n & k_n & \dots & m_n \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Полученная матрица имеет более общую форму

$$\begin{pmatrix} k_1 a_1 & l_2 b_1 & l_3 b_1 & \dots & l_n b_1 \\ k_2 a_1 & k_2 a_2 & l_3 b_2 & \dots & l_n b_2 \\ k_3 a_1 & k_3 a_2 & k_3 a_3 & \dots & l_n b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n a_1 & k_n a_2 & k_n a_3 & \dots & m_n a_n \end{pmatrix} \quad (27)$$

по сравнению с матрицей в [4], поскольку ни один сомножитель адамарова произведения не обязан быть симметричным. Условие неразложимости (23) для матрицы (27) принимает вид

$$k_n a_1 \neq 0. \quad (28)$$

Это условие обеспечивает ранг, не меньший единицы, всем подматрицам, участвующим в проверке соотношений (22). С другой стороны, указанные подматрицы отличаются от аналогичных подматриц для матрицы (3) умножением строк на соответствующие числа k_i . Таким образом, эти подматрицы имеют ранг 1, что приводит нас к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 6. Если адамарово произведение A брауновской матрицы, удовлетворяющей условиям (24), и отраженной брауновской матрицы типа (26) невырожденно, то оно имеет в качестве A^{-1} верхнюю матрицу Хессенберга. Эта матрица неразложима, если выполнено условие (28).

Теорема 6 объясняет результат из [4], процитированный во введении статьи, заодно обобщая его путем отказа от симметрии сомножителей адамарова произведения. Рассмотрим, например, произведение матрицы (25) и матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Помимо несимметричности, отметим в этой матрице неравенство элемента $(5, 5)$ внедиагональным элементам пятой строки. Это аналог отказа от условия $a_1 = c_1$ для стандартных брауновских матриц. Матрица, обратная к адамарову произведению, имеет хессенбергову форму

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{137} & -\frac{42}{1507} & -\frac{351}{1507} & \frac{162}{685} & \frac{216}{685} \\ -\frac{1}{137} & -\frac{195}{1507} & -\frac{3029}{1507} & \frac{1398}{685} & \frac{1864}{685} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{6}{11} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

4. Вычисление матрицы, обратной к брауновской. Между брауновскими и трехдиагональными матрицами существует тесная взаимосвязь, описываемая приводимой ниже теоремой 7. Пусть P – нижнетреугольная $n \times n$ матрица с элементами

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ -1, & j = i - 1, \\ 0, & \text{для прочих } i, j. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 7 ([13], [14]). *Матрица A порядка n тогда и только тогда является брауновской, когда матрица*

$$C = PAP^T \quad (29)$$

трехдиагональная.

Переход от матрицы A к матрице C требует, как мы сейчас увидим, всего лишь $O(n)$ аддитивных операций. Поэтому формула (29) указывает один из возможных $O(n)$ -алгоритмов для решения линейных систем с невырожденными брауновскими матрицами.

Пусть

$$C = \begin{pmatrix} p_1 & r_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ s_1 & p_2 & r_2 & 0 & & 0 \\ 0 & s_2 & p_3 & r_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & & & r_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & s_{n-1} & p_n \end{pmatrix} \quad (30)$$

есть матрица, полученная из матрицы (1) по формуле (29). Установим связь между параметрами p_i, r_i, s_i и a_i, b_i, c_i обеих матриц.

Левое умножение A на матрицу P дает верхнюю хессенбергову матрицу

$$E = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & b_1 & b_1 & b_1 \\ c_1 - a_1 & a_2 - b_1 & \dots & b_2 - b_1 & b_2 - b_1 & b_2 - b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2} - b_{n-3} & b_{n-2} - b_{n-3} & b_{n-2} - b_{n-3} \\ 0 & 0 & \dots & c_{n-2} - a_{n-2} & a_{n-1} - b_{n-2} & b_{n-1} - b_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} - a_{n-1} & a_n - b_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Обратим внимание на то, что E сохранила брауновскую структуру в своей верхнетреугольной части. Другое примечательное обстоятельство состоит в том, что для матрицы A , удовлетворяющей условиям Валви

$$c_i = a_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (32)$$

матрица E является треугольной. В этом случае E (а стало быть, и A) невырожденна тогда и только тогда, когда

$$a_1 \neq 0, \quad a_i \neq b_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Правое умножение E на матрицу P^T не затронет поддиагональных элементов. В итоге мы приходим к формулам

$$p_1 = a_1, \quad (33)$$

$$p_i = (a_i + a_{i-1}) - (b_{i-1} + c_{i-1}), \quad i = 2, \dots, n, \quad (34)$$

$$r_i = b_i - a_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (35)$$

$$s_i = c_i - a_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (36)$$

Если A невырожденна, то из формулы (29) выводим

$$A^{-1} = P^T C^{-1} P. \quad (37)$$

Используя это соотношение и результаты раздела 2, установим общий вид матрицы B , обратной к брауновской матрице A . Для простоты, наложим на A ограничение, заключающееся в том, что отвечающая ей матрица (30) должна быть неразложимой. Согласно (35), (36) это ограничение можно задать неравенствами

$$b_i \neq a_i, \quad c_i \neq a_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (38)$$

Как следует из раздела 2, матрица C^{-1} описывается с помощью четырех n -мерных векторов x, y, u, v таким образом, что

$$(C^{-1})_{ij} = \begin{cases} u_i v_j, & j \geq i, \\ y_i x_j, & i \geq j. \end{cases} \quad (39)$$

При этом

$$u_i v_i = x_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (40)$$

Вычисление вектора u предполагает (см. (16)) решение ленточной треугольной системы линейных уравнений

$$C_{n-1} \hat{u} = b, \quad (41)$$

где

$$C_{n-1} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p_2 & r_2 & 0 & & & \vdots \\ s_2 & p_3 & r_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & p_{n-2} & r_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & s_{n-2} & p_{n-1} & r_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

а

$$b^T = (p_1 s_1 0 \dots 0). \quad (43)$$

Нетривиальные компоненты вектора v определяются путем решения верхнетреугольной системы линейных уравнений

$$C_{n-1}^T \hat{v} = c, \quad (44)$$

где

$$c^T = (0 \dots 0 s_{n-1} p_n). \quad (45)$$

Число s , входящее в определение вектора u , находится как

$$s = -c^T \hat{u}$$

или как

$$s = -v^T b.$$

Аналогичным образом вычисляются векторы x и y . Роль матрицы C_{n-1} при этом выполняет матрица

$$\begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p_2 & s_2 & 0 & & & \vdots \\ r_2 & p_3 & s_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & p_{n-2} & s_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & r_{n-2} & p_{n-1} & s_{n-1} \end{pmatrix}$$

с соответствующими изменениями в векторах b и c .

Решение систем (41) и (44) обходится, как легко видеть, в $O(n)$ арифметических операций. Поэтому, если не требуется формирования матрицы C^{-1} в явном виде, для вычисления определяющих ее векторов x, y, u, v достаточно $O(n)$ операций. Нам остается показать, что и матрицу A^{-1} можно записать с помощью компонент этих векторов.

Выполняя преобразования, предусматриваемые формулой (37), нетрудно проверить, что элементы матрицы $B = A^{-1}$ выражаются формулами

$$b_{ij} = \begin{cases} (u_{i+1} - u_i)v_{i+1} - (y_{i+1} - y_i)x_i, & i = j = 1, \dots, n-1, \\ u_n v_n = x_n y_n, & i = j = n, \\ (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j), & j > i, \\ (x_{j+1} - x_j)(y_{i+1} - y_i), & i > j. \end{cases} \quad (46)$$

Для двух последних формул мы принимаем определение

$$v_{n+1} = y_{n+1} = 0. \quad (47)$$

Мы видим, что любой диагональный элемент матрицы B может быть восстановлен из компонент векторов x , y , u , v посредством не более чем пяти арифметических операций. Для восстановления внедиагонального элемента b_{ij} достаточно трех операций. Наконец, если ввести векторы $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= \begin{cases} x_{i+1} - x_i, & i \neq n, \\ x_i, & i = n, \end{cases} & \hat{y}_i &= y_{i+1} - y_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \hat{u}_i &= \begin{cases} u_{i+1} - u_i, & i \neq n, \\ u_i, & i = n, \end{cases} & \hat{v}_i &= v_{i+1} - v_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

то внедиагональные элементы матрицы B могут быть записаны формулами

$$b_{ij} = \begin{cases} \hat{u}_i \hat{v}_j, & j > i, \\ \hat{y}_i \hat{x}_j, & i > j, \end{cases}$$

подчеркивающими родство с обращением трехдиагональной матрицы (см. (21)).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gregory R. T., Karney D. L. A collection of matrices for testing computational algorithms. John Wiley, 1969.
- [2] Valvi F. Explicit presentation of the inverses of some types of matrices // J. Inst. Maths. Applys. 1977. V. 19. P. 107–117.
- [3] Valvi F. N., Geroyannis V. S. Analytic inverses and determinants for a class of matrices // IMA J. Numer. Analysis. 1987. V. 7. P. 123–128.
- [4] Valvi F. N. The Hadamard product of two Brownian matrices: analytic inverse and determinant // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 1995. V. 36. P. 493–497.
- [5] Èidelman Yu. S., Gohberg I. On a new class of structured matrices // Integral Equations Operator Theory. 1999. V. 34. №3. P. 293–324.
- [6] Tyrtyshnikov E. E. // Mosaic ranks and skeletons matrices. Numerical analysis and its applications. (Rousse, 1996). Lecture Notes in Computer Science. 1997. V. 1196. P. 505–516.
- [7] Fiedler M., Markham T. L. Rank-preserving diagonal completions of a matrix // Linear Algebra Appl. 1987. V. 85. P. 49–56.
- [8] Fiedler M. Structure ranks of matrices // Linear Algebra Appl. 1993. V. 179. P. 119–127.
- [9] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1990.
- [10] Elsner L. Some observations on inverses of band matrices and low-rank perturbations of triangular matrices // Acta Technica Acad. Sci. Hung. 1997–99. V. 108. № 1–2. P. 41–48.
- [11] McDonald J. J., Nabben R., Neumann M., Schneider H., Tsatsomeros M. Inverse tridiagonal Z-matrices // Linear and Multilinear Algebra. 1998. V. 45. P. 75–97.
- [12] Asplund E. Inverses of matrices $\{a_{ij}\}$ which satisfy $a_{ij} = 0$ for $j > i + p$ // Mathematica Scandinavica. 1959. V. 7. P. 57–60.
- [13] Gover M. J. C., Barnett S. Brownian matrices: properties and extensions // Int. J. Syst. Sci. 1986. V. 17. №2. P. 381–386.
- [14] Krishna H., Morgera S. D. Fast $O(n)$ complexity algorithms for diagonal innovation matrices // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process. 1984. V. 32. P. 1189–1193.