Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 816–827

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm900>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:14:37

УДК 517.9

ОБ ОБРАТИМОСТИ И ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.Г. Баскаков

В статье получены условия обратимости и фредгольмовости разностного оператора $(\mathcal{D}x)(n) = x(n) - U(n)x(n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$, действующего в банаховом пространстве векторных последовательностей $\ell_p(\mathbb{Z}, X)$, $p \in [1, \infty]$, где X – банахово пространство и U – ограниченная операторнозначная функция.

Библиография: 8 названий.

Пусть X – комплексное банахово пространство и $\text{End } X$ – банахова алгебра эндоморфизмов (линейных ограниченных операторов), действующих в X . Символом $\mathcal{N}$ обозначим одно из множеств: $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 0\}$.

Через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{N}, X)$ обозначим одно из банаховых пространств последовательностей векторов из X следующего вида:

$$\begin{aligned} \ell_p &= \ell_p(\mathcal{N}, X) = \left\{ x: \mathcal{N} \rightarrow X \mid \|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \|x(n)\|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad p \in [1, \infty), \\ \ell_\infty &= \ell_\infty(\mathcal{N}, X) = \left\{ x: \mathcal{N} \rightarrow X \mid \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathcal{N}} \|x(n)\| < \infty \right\}, \\ c_0 &= c_0(\mathcal{N}, X) = \left\{ x \in \ell_\infty \mid \lim_{|n| \rightarrow \infty} \|x(n)\| = 0 \right\}. \end{aligned}$$

В данной статье получены условия обратимости и фредгольмовости разностного оператора $\mathcal{D} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$, определенного формулой

$$(\mathcal{D}x)(n) = x(n) - U(n)x(n-1), \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $U: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } X$ – ограниченная функция.

Важная роль при исследовании оператора $\mathcal{D}$ отводится семейству эволюционных операторов $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(n, m), -\infty < m \leq n < \infty\}$ из алгебры $\text{End } X$, которое определяется с помощью равенств

$$\mathcal{U}(n, m) = \begin{cases} U(n)U(n-1) \cdots U(m+1), & m < n, \\ I, & m = n, \end{cases}$$

где I – тождественный оператор в X (символ I используется для обозначения тождественного оператора в любом из рассматриваемых банаховых пространствах).

Непосредственно из определения семейства эволюционных операторов $\mathcal{U}$ следует, что ядро $\text{Ker } \mathcal{D}$ оператора $\mathcal{D}$ допускает представление вида

$$\text{Ker } \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X) \mid x(n) = \mathcal{U}(n, m)x(m) \forall m \leq n\}.$$

Исследование обратимости и фредгольмовости оператора $\mathcal{D}$ будет осуществляться, используя

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множестве $\mathcal{N}_0$ из $\mathbb{Z}$ с постоянными $M > 0$, $q \in (0, 1)$, если существует ограниченная проекторнозначная функция $P: \mathcal{N}_0 \rightarrow \text{End } X$ со свойствами:

- 1) $\mathcal{U}(n, m)P(m) = P(n)\mathcal{U}(n, m)$ для всех $m \leq n$ из $\mathcal{N}_0$;
- 2) $\|\mathcal{U}(n, m)P(m)\| \leq Mq^{n-m}$, $m \leq n$, $m, n \in \mathcal{N}_0$;
- 3) при $n > m$ из $\mathcal{N}_0$ сужение $\mathcal{U}_{n, m}: X'(m) \rightarrow X'(n)$ оператора $\mathcal{U}(n, m)$ на образ $X'(m) = \text{Im } Q(m)$ дополнительного проектора $Q(m) = I - P(m)$ к проектору $P(m)$ является изоморфизмом подпространств $X'(m)$ и $X'(n)$; определим оператор $\mathcal{U}(m, n) \in \text{End } X$ как оператор, совпадающий с $\mathcal{U}_{n, m}^{-1}$ на $X'(n)$ и являющийся нулевым на подпространстве $X(n) = \text{Im } P(n)$;
- 4) $\|\mathcal{U}(m, n)\| \leq Mq^{n-m}$, $n > m$, $m, n \in \mathcal{N}_0$.

Пару проекторнозначных функций (P, Q) , участвующих в определении 1, назовем *расщепляющей парой* для семейства $\mathcal{U}$. Если $P = 0$ или $Q = 0$, то будем говорить, что для $\mathcal{U}$ имеет место *тривиальная дихотомия* на множестве $\mathcal{N}_0$.

В монографии [1, теорема 7.6.5] приведен следующий результат.

ЛЕММА 1. Оператор $\mathcal{D} \in \text{End } \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ обратим тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множестве $\mathbb{Z}$.

Проверка свойства экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$ на $\mathbb{Z}$ весьма затруднительна. Значительно проще проверка выполнения одного из следующих предположений.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множествах $\mathbb{Z}_-$ и $\mathbb{Z}_+$ с соответствующими парами расщепляющих функций (P_-, Q_-) , (P_+, Q_+) .

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множествах $\mathbb{Z}_- \cup \{0\}$ и $\mathbb{Z}_+$ с соответствующими парами расщепляющих функций (P_-, Q_-) , (P_+, Q_+) .

Далее используются обозначения

$$\begin{aligned} X_-(n) &= \text{Im } P_-(n), \quad n \leq 0, & X_+(n) &= \text{Im } P_+(n), \quad n \geq 0, \\ X'_-(n) &= \text{Im } Q_-(n), \quad n \leq 0, & X'_+(n) &= \text{Im } Q_+(n), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Следующие три теоремы являются одними из основных результатов данной статьи.

ТЕОРЕМА 1. Оператор $\mathcal{D} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ обратим тогда и только тогда, когда выполнено предположение 1 и линейный оператор

$$\Phi = Q_+(0)U(0)Q_-(-1): X'_-(-1) \rightarrow X'_+(0) \quad (1)$$

является изоморфизмом.

Отметим, что обратимость оператора $\mathcal{D}$ означает, что его ядро $\text{Ker } \mathcal{D} = \{0\}$ и его образ $\text{Im } \mathcal{D}$ совпадает с $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$. Следовательно, существует ограниченный обратный $\mathcal{D}^{-1} \in \text{End } \mathcal{F}$.

Оператор Φ , определенный формулой (1), назовем *узловым* оператором.

СЛЕДСТВИЕ 1. Оператор $\mathcal{D} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ обратим, если выполнено предположение 1 и $X = U(0)X'_-(1) \oplus X_+(0)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Оператор $\mathcal{D} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ обратим, если выполнено предположение 2 и одно из следующих условий:

- 1) $X = X'_-(0) \oplus X_+(0)$;
- 2) оператор $Q_-(0) - P_+(0) \in \text{End } X$ обратим.

ТЕОРЕМА 2. Оператор $\mathcal{D}$ обратим при выполнении одного из следующих условий:

- 1) выполнено предположение 1 и $Q_- = 0, Q_+ = 0$;
- 2) выполнено предположение 2 и $P_- = 0, P_+ = 0$.

ТЕОРЕМА 3. Оператор $\mathcal{D} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ обратим, если существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} U(n) = U_{\pm}$$

в равномерной операторной топологии и спектральные радиусы $r(U_{\pm})$ предельных операторов $U_{\pm}$ удовлетворяют условию $r(U_{\pm}) < 1$.

Будем говорить, что для решений однородного уравнения

$$x(n) = U(n)x(n-1), \quad n \geq n_0 \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

имеет место *равномерная экспоненциальная устойчивость*, если существуют постоянные $M_0 > 0, q_0 \in (0, 1)$ такие, что для любого решения x_0 уравнения (3) верна оценка

$$\|x_0(n)\| \leq M_0 q_0^{n-m} \|x_0(m)\| \quad \forall n \geq m \geq n_0.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Если выполнено условие 1) теоремы 2 или условия теоремы 3, то решения уравнения (3) равномерно экспоненциально устойчивы.

1. О ядре оператора $\mathcal{D}$. Для изучения оператора $\mathcal{D} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ введем в рассмотрение два разностных оператора $\mathcal{D}_{\pm} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_{\pm}, X)$, которые определяются равенствами

$$(\mathcal{D}_- x)(n) = x(n) - U(n)x(n-1), \quad n \leq -1, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_-, X), \quad (4)$$

$$(\mathcal{D}_+ x)(n) = \begin{cases} x(0), & n = 0, \\ x(n) - U(n)x(n-1), & n \geq 1, \end{cases} \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X). \quad (5)$$

ЛЕММА 2. Если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множестве $\mathbb{Z}_-$, то оператор $\mathcal{D}_-$ сюръективен (т.е. $\text{Im } \mathcal{D}_- = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_-, X)$), обратим справа и один из правых обратных $\mathcal{B}_r \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_-, X)$ имеет вид

$$(\mathcal{B}_r y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{-1} G_r(n, m) y(m), \quad n \in \mathbb{Z}_-, \quad y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_-, X).$$

Оператор $\mathcal{P}_r = I - \mathcal{B}_r \mathcal{D}_-$ является проектором, $\text{Im } \mathcal{P}_r = \text{Ker } \mathcal{D}_-$, и он определяется формулой

$$(\mathcal{P}_r x)(n) = \mathcal{U}(n, -1) Q_-(-1) x(-1), \quad n \leq -1, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_-, X).$$

В условиях леммы функция $G_r: \mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}_- \rightarrow \text{End } X$ определяется равенствами

$$G_r(n, m) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, m) P_-(m), & -\infty < m \leq n \leq -1, \\ -\mathcal{U}(n, m) Q_-(m), & -\infty < n < m \leq -1, \end{cases}$$

где $P_-, Q_-: \mathbb{Z}_- \rightarrow \text{End } X$ – расщепляющая пара проекторнозначных функций.

СЛЕДСТВИЕ 4. Ядро $\text{Ker } \mathcal{D}_-$ оператора $\mathcal{D}_-$ состоит из последовательностей $x_0(n) = \mathcal{U}(n, -1) Q_-(-1) x_0$, $n \leq -1$, $x_0 \in X$, а любое решение x уравнения

$$\mathcal{D}_- x = y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_-, X)$$

имеет вид $x = \mathcal{B}_r y + x_0$, $x_0 \in \text{Ker } \mathcal{D}_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2 осуществляется непосредственной проверкой того, что оператор $\mathcal{B}_r$ является правым обратным для оператора $\mathcal{D}_-$ и последующим вычислением формулы для проектора $\mathcal{P}_-$ (подробности см. в [2]). Такое же замечание верно и для следующей леммы.

Линейный оператор $A \in \text{End } Y$, действующий в банаховом пространстве Y , назовем *равномерно инъективным*, если существует постоянная $c > 0$ такая, что $\|x\| \leq c \|Ax\|$ $\forall x \in Y$.

Отметим, что в статье [3] для равномерно инъективных дифференциальных операторов В. В. Жиковым использовался термин “корректный”.

ЛЕММА 3. Если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множестве $\mathbb{Z}_+$, то оператор $\mathcal{D}_+ \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ равномерно инъективен, обратим слева и один из левых обратных $\mathcal{B}_l \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ представим формулой

$$(\mathcal{B}_l y)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G_l(n, m) y(m), \quad y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X), \quad n \geq 0,$$

где функция G_l имеет вид

$$G_l(n, m) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, m) P_+(m), & 0 \leq m \leq n < \infty, \\ -\mathcal{U}(n, m) Q_+(m), & 0 \leq n < m < \infty, \end{cases}$$

и $P_+, Q_+: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \text{End } X$ – расщепляющая пара проекторнозначных функций. Оператор $\mathcal{P}_l = \mathcal{D}_+ \mathcal{B}_l$ – проектор на образ $\text{Im } \mathcal{D}_+$ оператора $\mathcal{D}_+$, и он допускает представление вида

$$(\mathcal{P}_l x)(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq 1, \\ x(0) - \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{U}(0, m) Q_+(m) x(m), & n = 0. \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Подпространство $\text{Im } \mathcal{D}_+$ состоит из последовательностей вида

$$\left\{ \left(x(0) - \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{U}(0, m) Q_+(m) x(m), x(1), x(2), \dots \right), x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X) \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ представимо (изометрически изоморфно) в виде декартова произведения $\mathcal{F}_- \times \mathcal{F}_+$ банаховых пространств $\mathcal{F}_{\pm} = \mathcal{F}(\mathbb{Z}_{\pm}, X)$. Относительно такого представления оператор $\mathcal{D}$ может быть представлен матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_- & 0 \\ \mathcal{D}_0 & \mathcal{D}_+ \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\mathcal{D}_{\pm} \in \text{End } \mathcal{F}_{\pm}$ определены формулами (4), (5) и линейный ограниченный оператор $\mathcal{D}_0: \mathcal{F}_- \rightarrow \mathcal{F}_+$ имеет вид

$$(\mathcal{D}_0 x)(n) = \begin{cases} -U(0)x(-1), & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases}$$

Матрица (6) оператора $\mathcal{D}$ будет использоваться постоянно, и далее будут рассматриваться матрицы ограниченных операторов из $\text{End } \mathcal{F}$, которые определяются представлением $\mathcal{F} = \mathcal{F}_- \times \mathcal{F}_+$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнено предположение 1. Тогда ядро $\text{Ker } \mathcal{D}$ оператора $\mathcal{D}$ состоит из последовательностей $x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ вида

$$x(n) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, -1)x_0, & n \leq -1, \\ \mathcal{U}(n, 0)U(0)x_0, & n \geq 0, \end{cases} \quad (7)$$

где x_0 – произвольный вектор из ядра $\text{Ker } \Phi$ оператора

$$\Phi = Q_+(0)U(0)Q_-(-1): X'_-(-1) \rightarrow X'_+(0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор $\mathcal{B} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$, имеющий матрицу вида

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_r & 0 \\ -\mathcal{B}_l \mathcal{D}_0 \mathcal{B}_r & \mathcal{B}_l \end{pmatrix},$$

где операторы $\mathcal{B}_r$ и $\mathcal{B}_l$ были введены в леммах 2 и 3. Линейный оператор $\mathcal{A} = I - \mathcal{B}\mathcal{D} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ представим матрицей

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}_r & 0 \\ -\mathcal{B}_l \mathcal{D}_0 \mathcal{P}_r & 0 \end{pmatrix},$$

где проектор $\mathcal{P}_r \in \text{End } \mathcal{F}_-$ задан в лемме 2. Поскольку оператор $\mathcal{B}_l \mathcal{D}_0 \mathcal{P}_r: \mathcal{F}_- \rightarrow \mathcal{F}_+$ определяется формулой

$$(\mathcal{B}_l \mathcal{D}_0 \mathcal{P}_r x)(n) = \mathcal{U}(n, 0)P_+(0)U(0)Q_-(-1)x(-1), \quad n \geq 0,$$

то оператор $\mathcal{A}$ имеет вид

$$(\mathcal{A}x)(n) = \begin{cases} \mathcal{U}(n, -1)Q_-(-1)x(-1), & n \leq -1, \\ \mathcal{U}(n, 0)P_+(0)U(0)Q_-(-1)x(-1), & n \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Из определения этого оператора следует, что $\text{Ker } \mathcal{D} \subset \text{Im } \mathcal{A}$. Таким образом, для описания подпространства $\text{Ker } \mathcal{D}$ достаточно найти условия, при которых последовательности вида $(\mathcal{D}\mathcal{A}y)$, $y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$, нулевые.

Непосредственная проверка показывает, что верны равенства

$$(\mathcal{D}\mathcal{A}y)(n) = 0, \quad y \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X), \quad 0 \neq n \in \mathbb{Z}.$$

При $n = 0$ получаем, что условие $(\mathcal{D}\mathcal{A}y)(0) = 0$ эквивалентно условию (учитывается, что $P_+(0) + Q_+(0) = I$)

$$\Phi Q_-(-1)y(-1) = Q_+(0)U(0)Q_-(-1)y(-1) = 0.$$

Таким образом, каждая последовательность $x \in \text{Ker } \mathcal{D}$ имеет вид (7). Из предположения 1, влекущего экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}_-$ и $\mathbb{Z}_+$, вытекает, что существуют постоянные $M_0 > 0$, $q_0 \in (0, 1)$ такие, что $\|x_0(n)\| \leq M_0 q_0^{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ при любом рассматриваемом нами пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Введем в рассмотрение подпространство $X_0 = U(0)X'_-(-1) \cap X_+(0)$. Если выполнено предположение 2, то $U(0)X'_-(-1) = X'_-(0)$ и тогда $X_0 = X'_-(0) \cap X_+(0)$. Непосредственно из определения узлового оператора Φ следует, что $\text{Ker } \Phi = X_0$.

Теперь приведем несколько следствий из теоремы 4.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Имеют место равенства $\dim \text{Ker } \mathcal{D} = \dim \text{Ker } \Phi = \dim X_0$.*

СЛЕДСТВИЕ 7. *Если выполнено предположение 2, то*

$$\dim \text{Ker } \mathcal{D} = \dim (X'_-(0) \cap X_+(0)).$$

СЛЕДСТВИЕ 8. *Если размерность подпространства $U(0)X'_-(-1)$ конечна, то $\dim \text{Ker } \mathcal{D} < \infty$.*

СЛЕДСТВИЕ 9. *Если оператор $U(0)$ компактен, то $\dim \text{Ker } \mathcal{D} < \infty$.*

СЛЕДСТВИЕ 10. *Если $x_0 \in \text{Ker } \mathcal{D}$, то существуют постоянные $M_0 > 0$, $q_0 \in (0, 1)$ такие, что $\|x_0(n)\| \leq M_0 q_0^{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$.*

СЛЕДСТВИЕ 11. *Ядро $\text{Ker } \mathcal{D}$ оператора $\mathcal{D}$ не зависит от выбора пространства $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$.*

СЛЕДСТВИЕ 12. *Оператор $\mathcal{A} = I - \mathcal{B}\mathcal{D} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ ($\mathcal{A}, \mathcal{B}$ введены при доказательстве теоремы 3) конечномерен (следовательно, компактен), если*

$$\dim X'_-(-1) < \infty.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнено предположение 1. Оператор $\mathcal{D}$ равномерно инъективен тогда и только тогда, когда равномерно инъективен узловой оператор Φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вернемся к доказательству теоремы 4 и используем введенные там операторы.

Пусть вначале равномерно инъективен оператор Φ . Предположим, что $\mathcal{D}$ не является равномерно инъективным, т.е. существует нормированная последовательность (x_n) из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{D}x_n\| = 0.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}x_n - x_n\| = 0$$

и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{D}\mathcal{A}x_n\| = 0.$$

В частности, из равенств

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}\mathcal{A}x)(0) &= (\mathcal{A}x)(0) - U(0)(\mathcal{A}x)(-1) = P_+(0)U(0)Q_-(-1)x(-1) - U(0)Q_-(-1)x(-1) \\ &= -Q_+(0)U(0)Q_-(-1)x(-1) = -\Phi Q_-(-1)x(-1) \end{aligned}$$

получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{D}\mathcal{A}x_n(0)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi Q_-(-1)x_n(-1)\| = 0.$$

Из равномерной инъективности оператора Φ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_-(-1)x_n(-1)\| = 0.$$

Отсюда вытекает (см. формулу (8) и следствие 10), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}x_n\| = 0,$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0.$$

Получено противоречие.

Пусть теперь равномерно инъективен оператор $\mathcal{D}$, но таким не является оператор Φ . Это влечет существование нормированной последовательности векторов (a_n) из $X'_-(1)$ таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi a_n\| = 0.$$

Тогда последовательность (x_n) из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$ вида

$$x_n(k) = \begin{cases} \mathcal{U}(k, -1)a_n, & k \leq -1, \\ \mathcal{U}(k, 0)P_+(0)U(0)a_n, & k \geq 0, \end{cases}$$

обладает свойством $\inf_{n \geq 1} \|x_n\| > 0$. Соотношения

$$(\mathcal{D}x_n)(k) = 0, \quad k \neq 0, \quad (\mathcal{D}x_n)(0) = -\Phi a_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

ведут к противоречию. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 13. Если подпространство $X'_-(-1)$ конечномерно (например, если компактен оператор $U(0)$) и $\text{Ker } \Phi = \{0\}$, то оператор $\mathcal{D}$ равномерно инъективен.

СЛЕДСТВИЕ 14. Если подпространство $X_0 = \text{Ker } \Phi$ дополняемо в X , то $\text{Im } \mathcal{D}$ — замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$, а подпространство $\text{Ker } \mathcal{D}$ дополняемо в $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$.

2. Доказательство теорем 1–3. Фредгольмовость оператора $\mathcal{D}$. Для дальнейшего изучения свойств оператора $\mathcal{D} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$, связанных с его обратимостью, привлечем его сопряженный оператор $\mathcal{D}^* \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)^*$. При этом отметим, что банахово пространство $\ell_p(\mathcal{N}, X)^*$, $p \in [1, \infty)$, будет отождествляться (изоморфно) с пространством $\ell_q(\mathcal{N}, X^*)$, где $q = p(p-1)^{-1}$, $c_0(\mathcal{N}, X)^*$ — с пространством $\ell_1(\mathcal{N}, X^*)$. Если $\mathcal{D} \in \text{End } \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$, то при доказательстве утверждений будет вначале рассматриваться его сужение на c_0 .

Оператор $\mathcal{D}^*$ определяется равенствами

$$(\mathcal{D}^*\xi)(n) = \xi(n) - U(n)^*\xi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \xi \in \mathcal{F}^*.$$

В следующей лемме используются операторы $\mathcal{B}_r, \mathcal{B}_l$, введенные в леммах 2, 3.

ЛЕММА 4. Операторы $\overline{\mathcal{A}} = I - \mathcal{D}\mathcal{B} \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$, $\overline{\mathcal{A}}^* = I - \mathcal{B}^*\mathcal{D}^* \in \text{End } \mathcal{F}^*$ определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} ((I - \mathcal{D}\mathcal{B})x)(0) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{U}(0, m)Q_+(m)x(m) + Q_+(0)U(0) \sum_{m=-\infty}^{-1} \mathcal{U}(-1, m)P_-(m)x(m), \\ ((I - \mathcal{D}\mathcal{B})x)(n) &= 0, \quad n \neq 0, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X), \\ (\overline{\mathcal{A}}^*\xi)(n) &= \begin{cases} \mathcal{U}(0, n)^*Q_+(0)^*\xi(0), & n \geq 0, \\ \mathcal{U}(-1, n)^*P_-(-1)^*U(0)^*Q_+(0)^*\xi(0), & n \leq -1, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\xi \in \mathcal{F}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства, определяющие оператор $\overline{\mathcal{A}} = I - \mathcal{D}\mathcal{B}$, непосредственно следуют из определения операторов $\mathcal{D}$ и $\mathcal{B}$.

СЛЕДСТВИЕ 15. Оператор $\overline{\mathcal{A}}$ компактен, если конечномерен оператор $Q_+(0)$ (в частности, если компактен оператор $U(0)$).

Более подробно остановимся на рассмотрении операторов $\mathcal{D}^*$ и $\overline{\mathcal{A}}^*$. Отметим, что сопряженные пространства к подпространствам $X_-(n), X'_-(n)$, $n < 0$, $X_+(n), X'_+(n)$, $n \geq 0$, далее естественным образом будут отождествляться с образами соответствующих проекторов $P_\pm(n)^*, Q_\pm(n)^*$.

ТЕОРЕМА 6. Если выполнено предположение 1, то ядро $\text{Ker } \mathcal{D}^*$ оператора $\mathcal{D}^*$ состоит из последовательностей $\xi \in \mathcal{F}^*$ вида

$$\xi(n) = \begin{cases} \mathcal{U}(0, n)^*\xi_0, & n \geq 0, \\ \mathcal{U}(-1, n)^*U(0)^*\xi_0, & n \leq -1, \end{cases}$$

где $\xi_0 \in \text{Ker } \Phi^*$ и $\Phi^*: \text{Im } Q_+(0)^* \rightarrow \text{Im } Q_-(-1)^*$ — сопряженный оператор к узловому оператору $\Phi: X'_-(-1) \rightarrow X'_+(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\text{Ker } \mathcal{D}^* \subset \text{Ker } \mathcal{D}^* \overline{\mathcal{A}}^*$. Поскольку $(\mathcal{D}^* \overline{\mathcal{A}}^* \xi)(n) = 0$ для всех $n \neq -1$, $\xi \in \mathcal{F}^*$, то

$$\xi \in \text{Ker } \mathcal{D}^* \implies (\mathcal{D}^* \overline{\mathcal{A}}^* \xi)(-1) = 0.$$

Поэтому из равенства

$$(\mathcal{D}^* \overline{\mathcal{A}}^* \xi)(-1) = Q_-(-1)^* U(0)^* Q_+(0)^* \xi(0)$$

следует, что $\xi \in \text{Ker } \mathcal{D}^*$ в точности тогда, когда выполняется равенство

$$Q_-(-1)^* U(0)^* Q_+(0)^* \xi(0) = \Phi^* Q_+(0)^* \xi(0) = 0,$$

т.е. когда $Q_+(0)^* \xi(0) \in \text{Ker } \Phi^*$. Отсюда следует указанное в условии теоремы представление последовательностей из $\text{Ker } \mathcal{D}^*$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 16. *Имеет место равенство $\dim \text{Ker } \mathcal{D}^* = \dim \text{Ker } \Phi^*$.*

Отметим, что верны соответствующие аналоги всех следствий теоремы 4.

ТЕОРЕМА 7. *Если выполнено предположение 1, то оператор $\mathcal{D}^*$ равномерно инъективен тогда и только тогда, когда равномерно инъективен оператор Φ^* .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 5.

Теперь приступим к непосредственному доказательству теорем 1–3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\mathcal{D}$ – обратимый оператор из $\text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$. Тогда из результатов статей [4], [5] следует, что $\mathcal{D}$ – обратимый оператор из алгебры $\text{End } \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$. Поэтому в силу леммы 1 семейство допускает экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{Z}$ и, следовательно, выполнены условия предположений 1 и 2. Из обратимости оператора $\mathcal{D}$ следует обратимость оператора $\mathcal{D}^*$. Поэтому они оба равномерно инъективны и, следовательно, (в силу теорем 5 и 7) равномерно инъективны операторы Φ и Φ^* . Отсюда следует (см. [6, § VI.6, теорема 2]) обратимость *узлов* оператора Φ .

Пусть теперь выполнены условия теоремы 1. Тогда из теорем 5 и 7 следует (см. также теоремы 4 и 6), что $\mathcal{D}$ – равномерно инъективный оператор и $\text{Ker } \mathcal{D}^* = \{0\}$. Следовательно, еще раз используя теорему 2 из [6, § VI.6], получаем, что $\mathcal{D}$ – обратимый оператор. Теорема доказана.

Выполнение условий любого из следствий 1, 2 влечет обратимость оператора Φ ; поэтому $\mathcal{D}$ – обратимый оператор. Если выполнено условие 2) следствия 2, то имеет место разложение (2), причем проекторами, осуществляющими разложение $X = X_-^-(0) \oplus X_+(0)$, являются проекторы

$$\mathcal{P}_- = Q_-(0)(Q_-(0) - P_+(0))^{-1}, \quad \mathcal{P}_+ = -P_+(0)(Q_-(0) - P_+(0))^{-1}.$$

Таким образом, доказаны следствия 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Выполнение любого из условий теоремы ведет к выполнению условий теоремы 1, а также к выполнению условий любого из ее следствий 1 и 2. Отметим, что при выполнении условия 1) теоремы следует положить $Q_-(0) = 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Наличие тривиальной экспоненциальной дихотомии семейства $\mathcal{U}$ на множествах $\mathbb{Z}_-$ и $\mathbb{Z}_+$ со свойством $P_- = 0$, $P_+ = 0$ (аналога свойства 1) теоремы 2) не гарантирует обратимости оператора $\mathcal{D}$. Примером может служить оператор $\mathcal{D} \in \text{End } \ell_p(\mathbb{Z}, X)$ вида

$$(\mathcal{D}x)(n) = \begin{cases} x(n) - 2x(n-1), & n \leq -1, \\ x(n) + 2x(n-1), & n \geq 1, \\ x(0), & n = 0. \end{cases}$$

В матрице этого оператора, используемой при доказательстве теоремы 4, оператор $\mathcal{D}_0$ нулевой. Поэтому $\sigma(\mathcal{D}) = \{1 + \lambda \mid |\lambda| \leq 2\}$. Следовательно, $\mathcal{D}$ — необратимый оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Докажем, что выполнено условие 1) теоремы 2, т.е. для семейства $\mathcal{U}$ имеет место тривиальная дихотомия на $\mathbb{Z}_-$ и $\mathbb{Z}_+$ с $Q_- = 0$ и $Q_+ = 0$. Поскольку $r_0 = \max\{r(U_\pm), r(U_-)\} < 1$, для любого $r \in (r_0, 1)$ существует постоянная $C(r) > 0$ такая, что имеют место оценки (см. [6, гл. VII])

$$\|U_\pm^n\| \leq C(r)r^n, \quad n \geq 1.$$

Пусть $B_n = U(n) - U_+$, $n \geq 1$. Тогда $\varepsilon_n = \|U(n) - U_+\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому для числа $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего условию $q = r + \varepsilon < 1$, существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\varepsilon_n \leq \varepsilon$ при всех $n \geq n_0$. Для $n \geq m \geq n_0$ имеют место оценки

$$\|\mathcal{U}(n, m)\| = \|(U_+ + B_n) \cdots (U_+ + B_{m+1})\| \leq C(r)(r + \varepsilon)^{n-m-1} = C_1(r)q^{n-m},$$

где $C_1(r) = C(r)q^{-1}$.

Теперь для произвольных $n \geq m$ из $\mathbb{Z}_+$ получаем оценку $\|\mathcal{U}(n, m)\| \leq Mq^{n-m}$, где

$$M = C(r) \left(\prod_{k=0}^{n_0} \|U(k)\| \right) q^{-n_0}.$$

Таким образом, семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}$ допускает тривиальную экспоненциальную дихотомию на множестве $\mathbb{Z}_+$ с $Q_+ = 0$. Аналогично доказывается наличие тривиальной экспоненциальной дихотомии у семейства $\mathcal{U}$ на множестве $\mathbb{Z}_-$ с $Q_- = 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X) = \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$, то все утверждения, связанные с использованием сопряженного оператора $\mathcal{D}^*$, доказываются с помощью рассмотрения сужения оператора $\mathcal{D}$ на подпространство c_0 (при этом сохраняются его ядро, свойство равномерной инъективности и т.д.). Если доказана обратимость оператора $\mathcal{D}$ на c_0 , то он обратим и на ℓ_∞ (см. [4], [5]). То же верно и для большинства рассматриваемых свойств оператора $\mathcal{D}$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполнено предположение 1. Тогда оператор $\mathcal{D}$ фредгольмов (полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда фредгольмовым (полуфредгольмовым) является оператор Φ . Если Φ фредгольмов, то индексы операторов Φ и $\mathcal{D}$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждений теоремы непосредственно вытекает из следствия 6, теоремы 4 и ее следствия 14, из теоремы 6 и ее следствия 16, а также из теоремы 7.

СЛЕДСТВИЕ 17. Индекс фредгольмова оператора $\mathcal{D}$ не зависит от выбора пространства $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$.

3. О некоторых обобщениях полученных результатов. Будем говорить, что семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию в точке ∞ , если существует $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию на множестве $\mathbb{Z}_+(m) = \{m, m+1, m+2, \dots\}$ (в этом случае расщепляющая пара проекторнозначных функций обозначается (P_+, Q_+)). Аналогичное определение дается для точки $-\infty$, и соответствующая расщепляющая пара обозначается (P_-, Q_-) .

Отметим несколько случаев, когда имеет место экспоненциальная дихотомия в точках $-\infty$ и $+\infty$.

1) Оператор $\mathcal{D}$ фредгольмов и X – конечномерное пространство (в этом случае обратимы все операторы из множества всех предельных операторов [7], построенных по $\mathcal{D}$, что влечет экспоненциальную дихотомию для соответствующих семейств эволюционных операторов и, следовательно, экспоненциальную дихотомию в точках $\pm\infty$).

2) Существуют числа $m_1 < 0$ и $m_2 > 0$ из $\mathbb{Z}$ такие, что

$$\sup_{n \geq m_2} \|\mathcal{U}(n, n - m_2)\| < 1, \quad \sup_{n \leq 0} \|\mathcal{U}(n, n + m_1)\| < 1$$

(выполнение этих неравенств означает наличие тривиальной экспоненциальной дихотомии в точках $\pm\infty$ с $Q_+ = 0, Q_- = 0$; см. [2, теоремы 2 и 6]).

3) Существуют (в равномерной операторной топологии) пределы

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} U(n) = U_{\pm} \in \text{End } X$$

и $\sigma(U_{\pm}) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, где $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

4) Оператор $\mathcal{D}_- \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_-, X)$ сюръективен, оператор $\mathcal{D}_+ \in \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X)$ равномерно инъективен и подпространства из X вида

$$X_-(-1) = \{x(-1) \mid x \in \text{Ker } \mathcal{D}_-\}, \quad X_+(0) = \left\{x_0 \in X \mid \sup_{n \geq 1} \|\mathcal{U}(n, 0)x_0\| < \infty\right\}$$

дополняемы в X (в этом случае для семейства $\mathcal{U}$ имеет место экспоненциальная дихотомия на множествах $\mathbb{Z}_-$ и $\mathbb{Z}_+$; см., например, [2, теорема 6]).

Пусть семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию в точках $-\infty$ и ∞ с определяющими ее числами m_1 и m_2 из $\mathbb{Z}$, для которых $m_1 < m_2$. Зададим оператор $\Phi(m_1, m_2): X'_-(m_1) \rightarrow X'_+(m_2)$ формулой

$$\Phi(m_1, m_2)x = Q_+(m_2)\mathcal{U}(m_2, m_1)Q_-(m_1)x, \quad x \in X'_-(m_1).$$

Все полученные в условиях предположения 1 результаты статьи могут быть сформулированы в терминах соответствующих свойств оператора $\Phi(m_1, m_2)$. Так, например, оператор $\mathcal{D}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\Phi(m_1, m_2)$. Сохраняется и формула индекса для фредгольмова оператора $\mathcal{D}$ (т.е. $\text{ind } \mathcal{D} = \text{ind } \Phi(m_1, m_2)$).

В заключение отметим, что полученные в данной статье результаты могут найти применение в исследовании обратимости и фредгольмовости абстрактных параболических операторов (см., например, [8, теорема 3]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
- [2] Баскаков А. Г. О корректности линейных дифференциальных операторов // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 3. С. 3–28.
- [3] Жиков В. В. Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 6. С. 1380–1408.
- [4] Баскаков А. Г. Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 2. С. 17–25.
- [5] Курбатов В. Г. Об алгебрах разностных и интегральных операторов // Функцион. анализ и его прилож. 1990. Т. 24. № 2. С. 98–99.
- [6] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. I. М.: ИЛ, 1962.
- [7] Рабинович В. С. Операторные дискретные свертки и некоторые их приложения // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 1. С. 90–101.
- [8] Баскаков А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. № 3. С. 1–11.

Воронежский государственный университет

Поступило
07.04.1999