Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. С. Саркисян, Канонические системы, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 2, 291–301

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9008>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:20:39

Канонические системы

П. С. Саркисян

В работе исследуются канонические системы. Ставится задача построения квазиоднородной канонической системы, т.е. канонической системы, решение спектральной задачи которой совпадает с решением спектральной задачи некоторой однородной канонической системы. Приводится рациональный алгоритм построения квазиоднородных канонических систем.

Библиография: 2 названия.

1. Постановка задачи. В работе [1] были рассмотрены струны (с закрепленными концами) с кусочно-постоянной плотностью. Были указаны условия на плотность, при выполнении которых спектр колебаний совпадает со спектром однородной струны; это свойство было названо *квазиоднородностью* струны. В работе [2] было продолжено изучение квазиоднородных струн; была описана алгебраическая процедура восстановления квазиоднородной струны по ее части.

В настоящей работе понятие квазиоднородности переносится на канонические системы первого порядка. Речь, таким образом, идет о следующей задаче:

$$Jy' = \lambda B(x)y, \quad x \in [0, d], \quad y(0) = y(d). \quad (1)$$

Здесь

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & c(x) \end{pmatrix},$$

причем функция $x \mapsto B(x)$, $x \in [0, d]$, кусочно-постоянна; таким образом, даны такие точки $0 = x_0 < \dots < x_n = d$ и такие матрицы

$$B_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & c_k \end{pmatrix},$$

что

$$B(x) = B_k \quad \text{при} \quad x \in (x_{k-1}, x_k] \quad \text{для всех} \quad k = 1, \dots, n.$$

Предполагается, что $\det B_k \neq 0$.

Задачу (1) назовем *дефинитной*, если все матрицы B_k положительно-определенны, либо все они отрицательно-определенны (ясно, что второй случай сводится к первому заменой λ на $-\lambda$). В противном случае назовем задачу *индефинитной*.

Наша первоначальная цель – указать условия на $\{x_k\}$ и $\{B_k\}$, при выполнении которых спектр задачи совпадает со спектром некоторой задачи с постоянной матрицей $B(x) = B$. При этом условии исходную задачу назовем *квазиоднородной*.

Получив в первой части работы условия квазиоднородности, мы зададимся целью построения конкретных канонических систем. В п. 5 мы введем некоторые понятия (отмеченные матрицы), которые оказываются полезны для этой цели и позволяют разделить исходную задачу на две подзадачи. Проводимые с п. 6 исследования приводят нас в конечном итоге к алгоритму построения квазиоднородных систем.

2. Общее решение системы; матрица перехода. Рассматриваемую систему дифференциальных уравнений преобразуем к виду

$$\begin{cases} y' = \lambda S_k y, & x \in (x_{k-1}, x_k), \\ S_k = \begin{pmatrix} -b_k & -c_k \\ a_k & b_k \end{pmatrix}, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n. \quad (2)$$

На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ данное векторное уравнение легко решается:

$$y(x) = \left(\cos(\lambda q_k(x - x_{k-1}))I + \sin(\lambda q_k(x - x_{k-1})) \frac{1}{q_k} S_k \right) y(x_{k-1}),$$

где $q_k = \sqrt{\det S_k}$.

Отсюда получаем решение задачи на всем отрезке $(0, d)$. В частности, вектор $y(d)$ выражается равенством

$$y(d) = Ry(0),$$

где

$$R = \prod_{\substack{k=1 \\ \leftarrow}}^n \left(\cos(\lambda q_k l_k) I + \sin(\lambda q_k l_k) \frac{1}{q_k} S_k \right), \quad l_k = x_k - x_{k-1}.$$

Полученная матрица R – *матрица перехода* – и есть объект дальнейшего исследования.

Положим, что $q_k l_k = \text{const} = \alpha$. Это ограничение, как видно из дальнейшего, значительно упрощает исследование. С другой стороны, это ограничение не столь существенно (если числа $\{q_k l_k\}$ соизмеримы, подразбиением отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ можно добиться указанного ограничения).

Обозначим $\tilde{S}_k = (1/q_k)S_k$. Тогда $\text{tr}(\tilde{S}_k) = 0$, $\det(\tilde{S}_k) = 1$, матрица R выражается в форме

$$R = \prod_{\substack{k=1 \\ \leftarrow}}^n \cos(\lambda \alpha) I + \sin(\lambda \alpha) \tilde{S}_k. \quad (3)$$

(Стрелка под знаком произведения означает, что матрицы-сомножители выписываются справа налево.)

Делая еще одну замену $t = \text{tg}(\lambda \alpha)$, получаем удобный для дальнейшего исследования вид:

$$R = \frac{1}{(1 + t^2)^{n/2}} \prod_{\substack{k=1 \\ \leftarrow}}^n (I + t \tilde{S}_k). \quad (4)$$

3. Уравнение спектра n -звенной канонической системы. Напомним, что граничное условие нашей спектральной задачи имеет вид $y(d) = y(0)$. Из выражения (3) следует, что существование ненулевого решения системы (2) с этим граничным условием равносильно требованию $\det(I - R) = 0$.

Легко видеть, что $\det(I - R) = 1 - \operatorname{tr}(R) + \det(R)$ для матрицы R , как и для любой матрицы порядка 2×2 .

Учитывая, что $\det(R) = 1$, получаем уравнение, определяющее спектр нашей задачи, имеющее вид $2 - \operatorname{tr}(R) = 0$.

Обозначим

$$P(t) = \prod_{\substack{k=1 \\ \leftarrow}}^n (I + t\tilde{S}_k). \quad (5)$$

Уравнение спектра может быть записано в виде

$$\operatorname{tr} P(t) - 2(1 + t^2)^{n/2} = 0.$$

4. Условия квазиоднородности. Мы выяснили, что спектр задачи (1) задается уравнением $2 - \operatorname{tr}(R) = 0$, где матрица R задается равенством (3).

Функция (3) есть тригонометрический многочлен степени n . Для однородной канонической системы аналогичная функция имеет вид $2 - \cos(\lambda\alpha_1)$ (с некоторой постоянной α_1). Несложное рассуждение показывает, что указанные две функции имеют одинаковый набор нулей, если они пропорциональны; при этом $\alpha_1 = n\alpha$. Итак, условие квазиоднородности выражается соотношением $2 - \operatorname{tr} R = C(2 - \cos(n\lambda\alpha))$ с некоторой постоянной C .

Переходя, как прежде, к переменной $t = \operatorname{tg}(\lambda\alpha)$, получаем условие квазиоднородности канонической системы для произвольного натурального n в виде

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr} P(t) = (1 - C)(1 + t^2)^{n/2} + C \frac{(1 + it)^n + (1 - it)^n}{2},$$

где C – некоторая постоянная; матрица $P(t)$ определяется формулой (5).

Заметим, что в случае нечетного n последнее тождество дает условие $C = 1$, и в этом случае условие квазиоднородности системы выглядит следующим образом:

$$\operatorname{tr} P(t) = (1 + it)^n + (1 - it)^n. \quad (6)$$

В этой работе мы ограничимся этим случаем.

5. Построение квазиоднородных систем. Опишем в общих чертах способ получения квазиоднородных систем. Ниже в следующих пунктах будут приведены детали алгоритма.

Обратимся к матрице $P(t) = \{P_{ij}(t)\}$, заданной выражением (5) и подчиненной условию (6). Очевидны следующие свойства этой матрицы:

- 1) $\deg(p_{ij}) \leq n$;
- 2) $P(0) = I$;
- 3) $\det(P) = (1 + t^2)^n$;
- 4) $\operatorname{tr}(P) = (1 + it)^n + (1 - it)^n$.

Матрицы с этим свойством назовем *отмеченными*.

Мы приходим к следующей стратегии построения квазиоднородных канонических систем.

Шаг 1. Отыскание отмеченной матрицы.

Шаг 2. Разложение полученной матрицы в произведение вида (5) (факторизация).

После того, как найдена матрица $B(x)$, остается указать, дефинитна или индефинитна рассматриваемая задача.

Мы начнем с выполнения шага 2, предполагая, что имеем некоторую отмеченную матрицу $P(t)$; укажем для нее алгоритм факторизации. Это будет сделано в следующем п. 6. Далее, в п. 7 мы выполним шаг 1 нашей стратегии – опишем алгоритм построения всех отмеченных матриц.

6. Задача факторизации.

6.1. *Лемма о факторизации.* Далее мы будем называть некоторое множество (лежащее в конечномерном линейном пространстве) *алгебраически пренебрежимым*, если существует многочлен, который отличен от нуля вне этого множества.

ЛЕММА 1. *Любая отмеченная матрица P , за возможным исключением алгебраически пренебрежимого множества, представима в виде*

$$P(t) = \prod_{\substack{k=1 \\ \leftarrow}}^n (I + tS_k), \quad \text{где} \quad \det(S_k) = 1, \quad \text{tr}(S_k) = 0;$$

это представление определяется однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что любая отмеченная матрица $P(t)$ представима в виде

$$P(t) = (I + tS)P_0(t),$$

где

$$S = \begin{pmatrix} -b & -c \\ a & b \end{pmatrix}, \quad \det(S) = 1, \quad P_0(t) - \text{отмеченная матрица}, \quad \deg(P_0) = n - 1.$$

Для этого перепишем соотношение в виде

$$\frac{1}{I + t^2}(1 - tS)P(t) = P_0(t). \quad (7)$$

Последнее возможно лишь при условии

$$(I - iS)P(i) = 0. \quad (8)$$

Запишем $P(t)$ в виде

$$P(t) = \begin{pmatrix} W & Q \\ G & V \end{pmatrix}$$

и обозначим $W(i) = w$, $G(i) = g$, $Q(i) = q$, $V(i) = v$. Тогда условие (8) перепишется в виде равенств

$$(I - iS) \begin{pmatrix} w \\ g \end{pmatrix} = 0, \quad (I - iS) \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} = 0. \quad (9)$$

Возьмем первое из равенств (9). Отделяя действительную и мнимую части равенства, получаем

$$S = \frac{1}{\operatorname{Im} w\bar{g}} \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{Re} w\bar{g} & w\bar{w} \\ -g\bar{g} & \operatorname{Re} w\bar{g} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Очевидно, что это решение существует при выполнении для матрицы-функции $P(t)$ ограничения $\operatorname{Im} w\bar{g} \neq 0$. Ясно, что это условие выполнено для алгебраически пренебрежимого множества.

Для найденной матрицы S выполнено также второе из равенств (9). Это следует из того, что в силу свойства 3) п. 5

$$\text{столбец} \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} \quad \text{пропорционален столбцу} \begin{pmatrix} w \\ g \end{pmatrix}.$$

Итак матрица S найдена. Выражение для вычисления матрицы $P_0(t)$

$$\begin{pmatrix} W_0(t) & Q_0(t) \\ G_0(t) & V_0(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2} \cdot (1-tS) \cdot \begin{pmatrix} W(t) & Q(t) \\ G(t) & V(t) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Применяя последовательно описанную процедуру *отщепления* множителей вида $(I-tS)$, приходим к нужному разложению матрицы $P(t)$.

Как видим, на каждом шаге описанного алгоритма приходится отбрасывать некоторое алгебраически пренебрежимое множество из множества отмеченных матриц. Лемма доказана.

6.2. Алгоритм факторизации. Предлагаемый алгоритм при применении операции отщепления оперирует с одним из столбцов матрицы $P(t)$. Это является достаточной процедурой, позволяющей достичь цели алгоритма.

Подставляя выражение (10) для S в выражение (11) для матрицы $P_0(t)$, можно записать последнее в более явном виде.

Введя оператор D , действующий на многочлены по формуле

$$(DF)(t) = \frac{F(t) - F(i)}{t - i},$$

получим

$$W_0 = \frac{\operatorname{Re}(\bar{w}gDW - w\bar{w}DG)}{\operatorname{Im}(w\bar{g})}, \quad G_0 = \frac{\operatorname{Re}(g\bar{g}DW - w\bar{g}DG)}{\operatorname{Im}(w\bar{g})}$$

или

$$W_0 = \frac{\operatorname{Re}(\bar{w}M)}{\operatorname{Im}(w\bar{g})}, \quad G_0 = \frac{\operatorname{Re}(\bar{g}M)}{\operatorname{Im}(w\bar{g})}, \quad \text{где} \quad M = gDW - wDG. \quad (12)$$

Аналогичным образом выражается второй столбец матрицы $P_0(t)$.

Мы получили алгоритм разложения исходной матрицы шага 2 стратегии, описанной в п. 5.

Процесс разложения $P(t)$ с помощью равенств (12) и получение матриц S , определяемых выражением (10) (с исключением алгебраически пренебрежимого множества), дает последовательность $\{S_k\}$, $k = 1, \dots, n$.

7. Задача построения отмеченных матриц. Шаг 1 стратегии заключается в себе по сути задание параметров для определения интересующей нас системы.

Мы должны построить матрицы $P(t)$ (задать алгоритм их построения), удовлетворяющие условиям 1)–4) п. 5.

Пусть

$$P(t) = \begin{pmatrix} W & Q \\ G & V \end{pmatrix}.$$

Напомним, что n – нечетное число.

Положим $U = (1 + it)^n$. Тогда условия 1)–4) сводятся к системе уравнений

$$\begin{cases} WV - GQ = U\bar{U}, \\ W + V = U + \bar{U}. \end{cases}$$

Исключая V , приходим к уравнению

$$(W - U)(W - \bar{U}) = -GQ.$$

Последнее уравнение можно переписать в следующем виде:

$$(W - A)^2 + B^2 = -GQ, \quad (13)$$

$$A = \operatorname{Re}(U) = \sum_{j=0}^{[n/2]} C_n^{2j} (-1)^j t^{2j}, \quad (14)$$

$$B = \operatorname{Im}(U) = \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2j+1} (-1)^j t^{2j+1}. \quad (15)$$

Обозначим $H = W - A$. Задача свелась к отысканию многочленов H , G , Q (степени n), удовлетворяющих условию $H^2 + B^2 = -GQ$.

Заметим, что многочлен B разлагается в произведение вида

$$B = (-1)^{(n-1)/2} \prod_{j=0}^{n-1} (t - t_j), \quad \text{где } t_j = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi j}{n}\right). \quad (16)$$

Правая часть равенства (13) в силу равенств $G(0) = Q(0) = 0$ (эти равенства следуют из условия $P(0) = I$) явно содержит по крайней мере один множитель t^2 .

Кроме того, многочлены G , Q , вместе с H , могут содержать и другие сомножители B , входящие в разложение (16).

Для выделения таких сомножителей из многочленов G , Q введем числа

$$\varepsilon_j \in \{0, 1, 2\}, \quad \eta_j \in \{0, 1, 2\} \quad \text{для } j \in \{1, \dots, n\},$$

удовлетворяющие условиям

$$G = \prod_{j=0}^{n-1} (t - t_j)^{\varepsilon_j} \cdot G_1, \quad Q = \prod_{j=0}^{n-1} (t - t_j)^{\eta_j} \cdot Q_1,$$

где G_1 , Q_1 взаимно просты с B .

Итак,

$$H^2 + B^2 = -GQ = -\prod_{j=0}^{n-1} (t - t_j)^{\eta_j + \varepsilon_j} \cdot G_1(t)Q_1(t),$$

Пусть множество M , $M \subset \{0, \dots, n-1\}$, – это множество таких j , для которых $\eta_j + \varepsilon_j > 0$.

Заметим, что если для некоторого j выполняется неравенство $\eta_j + \varepsilon_j > 0$, то число t_j является корнем кратности 2 для многочлена $H^2 + B^2$. Таким образом, каждое число $\eta_j + \varepsilon_j$ равно либо 0, либо 2 и

$$M = \{j : 0 \leq j \leq n-1, \eta_j + \varepsilon_j = 2\}.$$

Так как $G(0) = Q(0) = 0$, то индекс $j = 0$ (дающий $t_j = 0$) входит в M . Итак, $0 \in M$.

Введем H_1 и B_1 по формулам

$$H = \prod_{j \in M} (t - t_j) \cdot H_1, \quad (17)$$

$$B = \prod_{j \in M} (t - t_j) \cdot B_1. \quad (18)$$

Для тройки H_1, G_1, Q_1 справедливо равенство

$$H_1^2 + B_1^2 = -G_1Q_1. \quad (19)$$

Ясно, что G_1, Q_1 не имеют вещественных корней, ибо такой корень был бы также корнем многочлена B_1 и H_1 , что невозможно по построению. Следовательно, G_1 и Q_1 можно представить в виде $G_1 = \sigma_1 Z \bar{Z}$, $Q_1 = \sigma_2 Y \bar{Y}$, где $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -1$, либо $\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = 1$.

Переписывая условие (19) для комплексных величин, получим

$$(H_1 + iB_1)(H_1 - iB_1) = ZY\bar{Z}\bar{Y}. \quad (20)$$

Последнее тождественно комплексному условию в виде

$$H_1 + iB_1 = \gamma ZY, \quad \gamma \in \mathbb{C}.$$

(Мы можем считать, что $\gamma = 1$, заменив γZ на Z .)

Полагая, что $Z = Z_1 + iZ_2$, $Y = Y_1 + iY_2$, получаем систему

$$H_1 = Z_1Y_1 - Z_2Y_2, \quad (21)$$

$$B_1 = Z_1Y_2 + Z_2Y_1. \quad (22)$$

Итак, любая отмеченная матрица $P(t)$ приводит к четверке многочленов с указанными свойствами. Это соответствие допускает обращение: по любой четверке Z_1, Z_2, Y_1, Y_2 , удовлетворяющей условиям (22), а), б), однозначно восстанавливается отмеченная матрица $P(t)$.

Отметим следующие свойства многочленов Z_1, Z_2, Y_1, Y_2 :

а) пара Z_1, Z_2 взаимно проста и

$$\max\{\deg Z_1, \deg Z_2\} = \frac{1}{2} \left(n - \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \right);$$

б) пара Y_1, Y_2 взаимно проста и

$$\max\{\deg Y_1, \deg Y_2\} = \frac{1}{2} \left(n - \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \right).$$

Покажем, что указанные свойства являются следствием приведенных выше построений.

Действительно, если пара многочленов Z_1, Z_2 (либо Y_1, Y_2) имеет общий сомножитель, то в силу соотношений (21), (22) этот сомножитель является также общим для пары многочленов H_1, B_1 , а это приводит к противоречию.

Далее, в силу условия (19) $\deg B_1 = n$, $\deg G_1 \leq n$, $\deg Q_1 \leq n$, для степеней многочленов G_1, Q_1 справедливы равенства $\deg G_1 = n$, $\deg Q_1 = n$, отсюда вытекает указанное ограничение на степени многочленов Z_1, Z_2 (Y_1, Y_2).

Осталось описать все четверки Z_1, Z_2, Y_1, Y_2 , обладающие описанными свойствами. С этой целью мы фиксируем многочлены Z_1, Z_2 , удовлетворяющие условию а), а затем ищем многочлены Y_1, Y_2 , удовлетворяющие условиям (22) и б).

В итоге мы приходим к следующему алгоритму построения всех отмеченных матриц (что и было целью этого пункта).

Шаг 1. Фиксируем векторы

$$(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}), \quad (\eta_0, \dots, \eta_{n-1})$$

такие, что $\varepsilon_j, \eta_j \in \{0, 1, 2\}$, $\varepsilon_j + \eta_j \in \{0, 2\}$ для всех $j \in \{0, \dots, n-1\}$, величины $\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{n-1}$, $\eta_0 + \dots + \eta_{n-1}$ нечетны, $\varepsilon_0 = \eta_0 = 1$. Полагаем

$$M = \{j : \varepsilon_j + \eta_j = 2\}.$$

Фиксируем числа σ_1, σ_2 из $\{-1, 1\}$, $\sigma_1 \sigma_2 = -1$.

Вводим многочлен

$$B_1(t) = \prod_{j \in M} (t - t_j)$$

(числа t_j взяты из (16)).

Шаг 2. Фиксируем взаимно-простые многочлены Z_1, Z_2 такие, что

$$\max\{\deg Z_1, \deg Z_2\} = \frac{1}{2} \left(n - \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \right).$$

Шаг 3. Находим многочлены Y_1^0, Y_2^0 такие, что

$$B_1 = Z_1 Y_2^0 + Z_2 Y_1^0, \quad \deg Y_2^0 < \deg Z_2$$

(применяем алгоритм Евклида), и запишем все пары Y_1, Y_2 , удовлетворяющие условию (22), в виде

$$Y_1 = Y_1^0 - KZ_1, \quad Y_2 = Y_2^0 + KZ_2,$$

где K – произвольный многочлен. Рассматриваем все K такие, что Y_1, Y_2 удовлетворяют условию б). Несложно убедиться, что указанное свойство взаимной простоты равносильно тому, что $H_1(t_j) \neq 0$ для $j \in \overline{M}$, а это, в свою очередь, равносильно неравенству

$$K(t_j) \neq \frac{Z_1(t_j)Y_1^0(t_j) - Z_2(t_j)Y_2^0(t_j)}{Z_1^2(t_j) + Z_2^2(t_j)} \quad \text{для } j \in \overline{M}.$$

Шаг 4. Строим отмеченную матрицу

$$P = \begin{pmatrix} W_0(t) & Q_0(t) \\ G_0(t) & T_0(t) \end{pmatrix}$$

по формулам

$$\begin{aligned} W &= A + (Z_1Y_1 - Z_2Y_2) \prod_{j \in M} (t - t_j), \\ Q &= \sigma_1(Y_1^2 + Y_2^2) \prod_{j=0}^{n-1} (t - t_j)^{\eta_j}, \quad G = \sigma_2(Z_1^2 + Z_2^2) \prod_{j=0}^{n-1} (t - t_j)^{\varepsilon_j}, \\ V &= 2A - W. \end{aligned}$$

(Напомним, что $A = \operatorname{Re}(1 + it)^n$).

8. Примеры 3-звенных квазиоднородных канонических систем. Сначала мы построим два семейства отмеченных матриц (следуя процедуре п. 7). Затем к одной из полученных отмеченных матриц применим процесс факторизации (описанный в п. 6.2); в результате получим явный пример 3-звенной канонической системы.

Для 3-звенной системы многочлены $A = \operatorname{Re}(1 + it)^3$, $B = \operatorname{Im}(1 + it)^3$ имеют следующий вид:

$$A = 1 - 3t^2, \quad B = t(3 - t^2).$$

Применим алгоритм, описанный в конце предыдущего пункта.

Корнями многочлена $B(t) = 0$ являются $t_1 = 0$, $t_2 = -\sqrt{3}$, $t_3 = \sqrt{3}$. Допустимыми вариантами векторов $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\eta}$, указанных в алгоритме п. 7, являются наборы:

- 1) $\bar{\varepsilon} = (1, 0, 0)$, $\bar{\eta} = (1, 0, 0)$;
- 2) $\bar{\varepsilon} = (1, 1, 1)$, $\bar{\eta} = (1, 1, 1)$;
- 3) $\bar{\varepsilon} = (1, 2, 0)$, $\bar{\eta} = (1, 0, 2)$;
- 4) $\bar{\varepsilon} = (1, 0, 2)$, $\bar{\eta} = (1, 2, 0)$.

Эти наборы исчерпывают все возможности.

Мы применим алгоритм отыскания отмеченной матрицы $P(t)$ для случаев 1) и 2). (Для сокращения текста ограничимся этими случаями.)

1) Возьмем сначала первую из указанных пар векторов $\bar{\varepsilon} = (1, 0, 0)$, $\bar{\eta} = (1, 0, 0)$. Это дает $B_1 = t^2 - 3$.

Задаем многочлены Z_1, Z_2 :

$$Z_1 = \alpha_1 t + \beta_1, \quad Z_2 = \alpha_2 t + \beta_2, \quad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0.$$

Несложный подсчет приводит к следующим выражениям для Y_1, Y_2 :

$$Y_1 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\beta_1^2 - 3\alpha_1^2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} - \gamma(\alpha_1 t + \beta_1), \quad Y_2 = \frac{1}{\alpha_1} t + \frac{1}{\alpha_1} \frac{3\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} + \gamma(\alpha_2 t + \beta_2).$$

В итоге

$$\begin{aligned} W &= 1 - 3t^2 + (Z_1 Y_1 - Z_2 Y_2) \cdot t, \\ Q &= \sigma_1(Y_1^2 + Y_2^2) \cdot t, \quad G = \sigma_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cdot t, \\ T &= 1 - 3t^2 - (Z_1 Y_1 - Z_2 Y_2) \cdot t. \end{aligned}$$

Мы получили отмеченную матрицу для 3-звенной квазиоднородной канонической системы, которая зависит от параметров $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma, \sigma_1, \sigma_2$.

2) Применим теперь алгоритм построения отмеченных матриц, взяв векторы $\bar{\varepsilon} = (1, 1, 1)$, $\bar{\eta} = (1, 1, 1)$. Получим многочлен $B_1(t) = 1$.

Задаем многочлены Z_1, Z_2 :

$$Z_1 = \alpha_1, \quad Z_2 = \alpha_2, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0.$$

Подсчет Y_1, Y_2 дает формулы

$$Y_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1}, \quad Y_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1}, \quad \beta_1 \neq 0, \quad \beta_2 \neq 0.$$

Получаем матрицу

$$\begin{aligned} W &= 1 - 3t^2 + \frac{\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1} \cdot t(t^2 - 3), \\ Q &= \sigma_1 \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)^2} \cdot t(t^2 - 3), \quad G = \sigma_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \cdot t(t^2 - 3), \\ T &= 1 - 3t^2 - \frac{\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1} \cdot t(t^2 - 3). \end{aligned}$$

Полученная отмеченная матрица зависит от параметров $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma, \sigma_1, \sigma_2$.

Итак, мы нашли два семейства отмеченных матриц. (Для двух оставшихся пар действие алгоритма вполне аналогично.)

Рассмотрим первое из рассмотренных нами семейств отмеченных матриц. Хотелось бы по этим семействам построить явный вид квазиоднородных канонических систем.

Но выражение матриц S_1, S_2, S_3 в явном виде через параметры $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ представляется чрезмерно громоздким, в связи с чем кажется разумным применение шага 2 стратегии к элементам W и G для конкретных значений параметров.

Возьмем матрицу, заданную в п. 8 (случай 1)), взяв следующие значения параметров: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 3, \beta_2 = 1, \gamma = 1$.

Получим элементы W, G отмеченной матрицы $P(t)$:

$$W = -3t^3 - 11t^2 - 19t + 1, \quad G = 2t^3 + 8t^2 + 10t.$$

Применяя приведенный выше алгоритм в соответствие с формулами (12), получаем набор матриц

$$S_3 = \begin{pmatrix} 7 & \frac{25}{2} \\ -4 & -7 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{47} \begin{pmatrix} 179 & \frac{685}{2} \\ -100 & -179 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \frac{1}{47} \begin{pmatrix} -1401 & -\frac{1965010}{758} \\ 758 & 1401 \end{pmatrix}.$$

По этим матрицам строим кусочно-постоянную матричную функцию (см. пп. 1 и 2).

Заметим, что спектральная задача, соответствующая полученной матричной функции, оказалась дефинитной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. С. Исмагилов, П. С. Саркисян, “О квазиоднородных струнах”, *Матем. заметки*, **78**:2 (2005), 317–320.
- [2] П. С. Саркисян, “Задача восстановления квазиоднородной струны по ее части”, *Матем. заметки*, **82**:1 (2007), 125–134.

П. С. Саркисян

Отраслевой центр внедрения новой техники и технологии,
г. Москва

E-mail: pavlik_71@mail.ru

Поступило

15.12.2010

Исправленный вариант

21.04.2011