Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Богатырев, Многообразия опорных множеств многочленов Чебышева, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 828–836

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm901>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:21:22

УДК 512.7

МНОГООБРАЗИЯ ОПОРНЫХ МНОЖЕСТВ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА

А. Б. Богатырев

В работе рассмотрена параметризация совокупности многочленов $T_n(E, x)$, наименее уклоняющихся от нуля на системе E из нескольких отрезков действительной оси. Дан новый вывод уравнений, определяющих границу максимального множества наименьшего уклонения $E^+ \supset E$. Описана геометрия многообразия всевозможных множеств E^+ , вложенного в пространство модулей гиперэллиптических кривых с действительными точками ветвления.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть E – содержащее более n точек множество, полученное выбрасыванием нескольких интервалов из отрезка $[-1, 1]$. Многочленом Чебышева множества E назовем многочлен T_n степени n с вещественными коэффициентами, имеющий наибольший старший коэффициент среди всех многочленов P_n , удовлетворяющих условию $\max_{x \in E} |P_n(x)| \leq 1$. Теорема Чебышева об альтернансе дает качественное описание графика T_n (см. рис. 1).

ТЕОРЕМА 1 [1], [2]. *Многочлен $P_n(x)$ степени n с положительным старшим коэффициентом является многочленом Чебышева некоторого множества E тогда и только тогда, когда интервал $I := (-1, 1)$ содержит n непересекающихся подинтервалов $I_1, \dots, I_n$, из которых два примыкают к концам I , и таких, что $P_n: I_s \rightarrow I$ – гомеоморфизм для всех $s = 1, \dots, n$.*

Из приведенной теоремы следует, что фиксированный многочлен Чебышева задает целое семейство множеств E , для которых именно он является наименее отклоняющимся от нуля. Следуя [1], мы рассмотрим объекты, находящиеся во взаимно однозначном соответствии с множеством всевозможных многочленов Чебышева: опорные множества и упорядоченные разбиения степени на натуральные слагаемые. *Опорным множеством E^+ многочлена Чебышева T_n назовем множество*

$$E^+ := \bigcup_{s=1}^n \bar{I}_s = T_n^{-1}(\bar{I}), \quad (1)$$

компоненты связности $E_0^+, E_1^+, \dots, E_g^+$ которого занумеруем слева направо. *Упорядоченное разбиение* степени многочлена n образуют числа m_k , равные количеству подынтервалов I_s в компоненте E_k^+ :

$$m_0 + m_1 + \dots + m_g = n. \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00141.

Любой упорядоченный набор натуральных чисел $m_0, \dots, m_g$ является *разбиением степени* для некоторого многочлена Чебышева. В противоположность этому множество E^+ не произвольно: на его $2g$ свободных концов имеется g ограничений, к формулировке которых мы приступаем.

Всякому множеству

$$E^+ =: [-1, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^g (a_k, b_k), \quad (3)$$

$$b_0 := 1 < a_1 < b_1 < \dots < a_g < b_g < 1 =: a_{g+1}, \quad (4)$$

сопоставим (двухлистную) риманову поверхность $M = M(E^+)$ рода g :

$$w^2 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^g (x - a_k)(x - b_k), \quad t = (x, w) \in M(E^+), \quad (5)$$

на которой введем два канонических базиса гомологий: $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_g; \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_g$ и $\tilde{\mathbf{B}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{B}}_g; \tilde{\mathbf{A}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_g$. Представители $\mathbf{A}_s, \tilde{\mathbf{B}}_s$ показаны на рис. 2, остальные циклы определим равенствами $\mathbf{B}_s := \tilde{\mathbf{B}}_0 + \tilde{\mathbf{B}}_1 + \dots + \tilde{\mathbf{B}}_{s-1}; \tilde{\mathbf{A}}_s := \mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_s$.

Рис. 1. Многочлены Чебышева для $g = 2, n = 10$
и разбиений $6 + 2 + 2; 6 + 1 + 3; 5 + 4 + 1$

ТЕОРЕМА 2 (Уравнения Абеля; [1]–[3]). Множество E^+ является опорным для многочлена Чебышева с разбиением степени (2) тогда и только тогда, когда A -нормированный абелев дифференциал третьего рода $d\eta$ (определение см. в [4]) на римановой поверхности $M(E^+)$ с полюсами в двух бесконечно удаленных точках: ∞_+ верхнего листа, ∞_- нижнего листа и вычетами $\text{Res } d\eta|_{\infty_{\pm}} = \mp 1$, имеет следующие $\tilde{B}$ -периоды:

$$\int_{\tilde{B}_k} d\eta = 2\pi i \frac{m_k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, g. \quad (6)$$

Многочлен Чебышева однозначно восстанавливается по удовлетворяющему (6) опорному множеству:

$$T_n(E^+, x) = \cos\left(in \int_{t_0}^{t(x)} d\eta\right), \quad t(x) = (x, w) \in M, \quad t_0 = (1, 0) \in M, \quad (7)$$

где выражение для T_n не зависит от двузначного выбора $t(x)$ и пути интегрирования на M .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Среди соотношений (6) независимыми являются лишь (любые) g , так как контур $\tilde{B}_0 + \tilde{B}_1 + \dots + \tilde{B}_g$ стягивается к контуру, огибающему полюс $d\eta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Билинейные соотношения Римана позволяют переписать уравнения (6) в виде

$$\sum_{k=1}^g m_k \int_{\tilde{A}_k} d\zeta + n \int_{\infty_-}^{\infty_+} d\zeta = 0, \quad (8)$$

где $d\zeta$ – произвольный дифференциал первого рода на $M(E^+)$, а интегрирование от ∞_- к ∞_+ производится вдоль пути C_0 рис. 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Уравнения (8) в форме соотношений для функций Шоттки при $g = 2$ и $m_1 = m_2 = 1$ применялись Ахиезером в [5] для нахождения многочленов наименьшего отклонения. Формула (7) – интерпретация известного представления многочленов наименьшего отклонения через конформные отображения на гребенчатые области [2], [6]. В используемом здесь виде уравнения (6), (7) введены Пеершторфером в [1].

Рис. 2. Циклы A_s , $\tilde{B}_s$ и пути C_s на римановой поверхности $M(E^+)$, $g = 2$

Для геометрического описания совокупности всевозможных опорных множеств введем два определения.

1) *Пространством модулей* $\mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$ назовем $2g$ -мерный симплекс переменных a_k, b_k (4), точки которого отождествим с римановыми поверхностями (5) с отмеченной точкой ∞_+ .

2) Множество решений уравнений (6) в пространстве $\mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$ обозначим $\mathbb{T}(m_0, \dots, m_g)$.

В последнем пункте настоящей заметки доказана

ТЕОРЕМА 3. Множество $\mathbf{T}(t_0, \dots, t_g)$ – гладкое аналитическое g -мерное подмногообразие $\mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$, гомеоморфное клетке. Два многообразия $\mathbf{T}$ либо не пересекаются, либо совпадают; последнее происходит в случае пропорциональности наборов чисел $(t_0, t_1, \dots, t_g)$. $\mathbf{T}$ -многообразия плотны в $\mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$.

2. Альтернанс и накрытия. В этом пункте для исследования задач наименьшего отклонения применен формализм накрытий [7]. В качестве приложения этой техники приведено чисто геометрическое доказательство теоремы 2.

Заметим, что многочлен Чебышева $T_n(E^+, x)$ определяет n -листное голоморфное разветвленное накрытие сферы Римана S другой сферой Римана X . Из теоремы 1 следует, что это накрытие разветвлено с порядком 2 во всех прообразах точек $\pm 1 \in S$, кроме граничных точек (4) компонент опорного множества E^+ . Другие задачи наименьшего отклонения – в силу теоремы Чебышева об альтернансе и ее обобщений – также приводят к накрытиям, разветвленным над точками ± 1 . Как видим, экстремальные многочлены являются решениями следующей более общей задачи [8].

ЗАДАЧА О РАЗВЕТВЛЕННЫХ НАКРЫТИЯХ. Даны две компактные римановы поверхности X, S ; на последней отмечены точки $s_1, \dots, s_p$. Перечислить все голоморфные отображения $\mathcal{F}: X \rightarrow S$, индексы ветвления которых в прообразах $\mathcal{F}^{-1}(s_m)$, $m = 1, \dots, p$, образуют (неупорядоченные) списки $\{k_m^i\}$, $i = 1, \dots, l(m)$, $\sum_i k_m^i = \deg \mathcal{F}$.

Для нахождения частных решений $\mathcal{F}$ этой задачи в [8] предлагается находить поднятия $\tilde{\mathcal{F}}$ этих решений на специально подобранные накрывающие поверхности $\tilde{X}, \tilde{S}$ диаграммы (9а).

$$\begin{array}{ccc} \text{а)} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} & \tilde{S} \\ \chi \downarrow & & \downarrow \sigma \\ X & \xrightarrow{\mathcal{F}} & S \end{array} & \text{б)} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X}_\circ & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} & \tilde{S}_\circ \\ \chi \downarrow & & \downarrow \sigma \\ X_\circ & \xrightarrow{\mathcal{F}} & S_\circ \end{array} & \text{в)} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X}_{\circ\circ} & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} & \tilde{S}_{\circ\circ} \\ \chi \downarrow & & \downarrow \sigma \\ X_{\circ\circ} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & S_{\circ\circ} \end{array} \end{array} \quad (9)$$

Пусть $\tilde{S}$ разветвляется над каждой точкой $s_m \in S$, $m = 1, \dots, p$, с порядком k_m , делящимся на все элементы списка $\{k_m^i\}$, $i = 1, \dots, l(m)$, а $\tilde{X}$ разветвляется над каждой точкой $x_m^i \in \mathcal{F}^{-1}(s_m)$ с порядком k_m/k_m^i , $i = 1, \dots, l(m)$, $m = 1, \dots, p$. Если $\mathcal{F}$ можно поднять до отображения $\tilde{\mathcal{F}}$ накрывающих пространств (т.е. диаграмма (9а) должна быть коммутативна), то $\tilde{\mathcal{F}}$ неразветвлено над точками $\tilde{S}$, накрывающими s_m , и решение $s = \mathcal{F}(x)$ представимо в параметрическом виде

$$s = \sigma \circ \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{x}), \quad x = \chi(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \tilde{X}. \quad (10)$$

В случае *регулярных разветвленных* накрытий χ, σ с разрывно [4], [9] действующими на накрывающих $\tilde{X}, \tilde{S}$ группами скольжений $\mathfrak{G}(\chi)$ и $\mathfrak{G}(\sigma)$ всякое *эквивариантное* отображение $\tilde{\mathcal{F}}$ накрывающих, т.е. такое, что

$$\tilde{\mathcal{F}}(G\tilde{x}) = \mathbf{T}(G)\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \tilde{X}, \quad G \in \mathfrak{G}(\chi), \quad (11)$$

для некоторого гомоморфизма $\mathbf{T}: \mathfrak{G}(\chi) \mapsto \mathfrak{G}(\sigma)$, опускается до отображения факторпространств

$$\mathcal{F}: X = \tilde{X}/\mathfrak{G}(\chi) \rightarrow \tilde{S}/\mathfrak{G}(\sigma) = S.$$

При фиксированном $\tilde{x} \in \tilde{X}$ индекс ветвления $k_{\mathcal{F}}$ этого отображения в точке $\chi(\tilde{x})$ можно найти из соотношения

$$k_{\mathcal{F}} i_{\chi} = k_{\tilde{\mathcal{F}}} i_{\sigma}, \quad (12)$$

в котором $k_{\tilde{\mathcal{F}}}$ – индекс ветвления $\tilde{\mathcal{F}}$ в точке $\tilde{x}$; i_{χ} и i_{σ} – порядки стабилизаторов точек $\tilde{x}$ и $\tilde{s} := \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{x})$ в соответствующих группах скользящих.

На практике накрытия χ, σ выбираются на основе априорной информации о решении $\mathcal{F}$ и следующей ниже леммы 1. Пусть поверхность S_o получена выкалыванием из S точек ветвления накрытия σ ; поверхность S_{oo} получена выкалыванием из S_o точек ветвления отображения $\mathcal{F} \circ \chi$. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{S}_o &:= \sigma^{-1}(S_o), & X_o &:= \mathcal{F}^{-1}(S_o), & \tilde{X}_o &:= \chi^{-1}(X_o), \\ \tilde{S}_{oo} &:= \sigma^{-1}(S_{oo}), & X_{oo} &:= \mathcal{F}^{-1}(S_{oo}), & \tilde{X}_{oo} &:= \chi^{-1}(X_{oo}). \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. а) Если в диаграмме (9а) σ – регулярное разветвленное голоморфное накрытие, а χ – голоморфное отображение, то $\mathcal{F}$ поднимается на накрывающие пространства тогда и только тогда, когда в группе $\pi_1(S_o)$ выполнено вложение

$$(\mathcal{F} \circ \chi)\pi_1(\tilde{X}_o) \subset \sigma\pi_1(\tilde{S}_o). \quad (13)$$

б) Если χ – также регулярное разветвленное накрытие, то поднятое отображение $\tilde{\mathcal{F}}$ будет эквивариантным с гомоморфизмом

$$\mathbf{T}: \mathfrak{G}(\chi) \cong \pi_1(X_{oo})/\chi\pi_1(\tilde{X}_{oo}) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \pi_1(S_{oo})/\sigma\pi_1(\tilde{S}_{oo}) \cong \mathfrak{G}(\sigma). \quad (14)$$

Опущенные в обозначениях фундаментальных групп отмеченные точки выбраны согласованно с отображениями диаграмм (9b), (9c).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Убедимся прежде всего, что $S \setminus S_o$ состоит из конечного числа точек. В силу разрывности действия группы скользящих $\mathfrak{G}(\sigma)$ на накрывающей $\tilde{S}$ точки накрывающей с нетривиальными стабилизаторами расположены дискретно на $\tilde{S}$. Проецируя малые окрестности этих точек на S , убеждаемся, что каждая выколота точка S_o имеет окрестность, не содержащую других выколотых точек. Из компактности S следует конечность числа проколов.

Отображение σ в диаграмме (9b) является (неразветвленным) накрытием, поэтому существование поднятия $\mathcal{F}$ до отображения $\tilde{X}_o \rightarrow \tilde{S}_o$ эквивалентно [7] вложению (13).

Продолжим $\tilde{\mathcal{F}}$ в проколы поверхности $\tilde{X}_o$. Последние расположены дискретно на $\tilde{X}$, поскольку их образ при (непостоянном голоморфном) отображении $\mathcal{F} \circ \chi$ состоит из конечного числа точек $S \setminus S_o$. Проколы $\tilde{S}_o$ также расположены дискретно, поэтому $\tilde{\mathcal{F}}$ отображает достаточно малую окрестность прокола $\tilde{x} \in \tilde{X}$ на окрестность единственной точки $\tilde{s} \in \tilde{S}$ с нетривиальным стабилизатором. Положим по непрерывности $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{x}) = \tilde{s}$.

б) Отображения χ, σ диаграммы (9c) являются (неразветвленными) регулярными накрытиями, так что фундаментальные группы баз действуют на накрывающих пространствах и справедливы [7] представления

$$\mathfrak{G}(\chi) = \pi_1(X_{oo})/\chi\pi_1(\tilde{X}_{oo}), \quad \mathfrak{G}(\sigma) = \pi_1(S_{oo})/\sigma\pi_1(\tilde{S}_{oo}).$$

Если отображение $\mathcal{F}$ поднимается на накрывающие $\tilde{X}_{oo}, \tilde{S}_{oo}$, то наряду с (13) имеет место [7] включение $(\mathcal{F} \circ \chi)\pi_1(\tilde{X}_{oo}) \subset \sigma\pi_1(\tilde{S}_{oo})$, поэтому гомоморфизм $\mathbf{T}$ в (14) определен корректно. Докажем, что на пространстве $\tilde{X}_{oo}$ выполнено равенство (11), продолжая которое по непрерывности в проколы $\tilde{X}_{oo}$, мы придем к эквивариантности поднятого отображения. Фиксируем $\tilde{x} \in \tilde{X}_{oo}$; путь $\tau \subset \tilde{X}_{oo}$, соединяющий отмеченную точку $\tilde{X}_{oo}$ с $\tilde{x}$; $G \in \mathfrak{G}(\chi)$ и представляющую G петлю $\gamma \subset X_{oo}$. Левая часть (11) есть конечная точка поднятия пути $\mathcal{F}(\gamma \cdot \chi(\tau))$ с S_{oo} на $\tilde{S}_{oo}$ от отмеченной точки $\tilde{s}_* \in \tilde{S}_{oo}$ [7]. То же самое значение можно получить, поднимая от $\tilde{s}_*$ путь $\mathcal{F}(\gamma)$ и затем от его конечной точки – путь $\mathcal{F} \circ \chi(\tau)$. Именно так действует $\mathbf{T}(G)$ на точку $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{x})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. 1) Фиксируем многочлен Чебышева $T_n(E^+, x)$. Отображение $\mathcal{F}: X := \mathbb{CP}_1 \xrightarrow{T_n} \mathbb{CP}_1 =: S$ неразветвлено в накрывающих $\pm 1 \in S$ точках $-1, a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, 1 \in X$ и разветвлено со вторым порядком во всех остальных точках множества $T_n^{-1}(\pm 1)$. Регулярное накрытие $\tilde{X} := M(E^+) \xrightarrow{\chi} X$ – это в известном смысле “минимальное” накрытие, ветвящееся с порядком 2 над указанными выше $2g + 2$ точками X ; естественная проекция $\chi: \tilde{x} = (x, w) \rightarrow x$ имеет группу скольжений, порожденную инволюцией $J: (x, w) \rightarrow (x, -w)$. В качестве ветвящейся над $\pm 1 \in S$ накрывающей возьмем $\tilde{S} := \mathbb{CP}_1$; накрытие $\sigma: \tilde{s} \rightarrow (\tilde{s} + 1/\tilde{s})/2$ имеет группу скольжений, порожденную отображением $\tilde{s} \rightarrow 1/\tilde{s}, \tilde{s} \in \tilde{S}$.

Покажем, что отображение $\mathcal{F}$ можно поднять на накрывающие пространства, для чего проверим выполнение вложения (13). Фундаментальная группа $\pi_1(S_o)$ – это свободная группа с одной образующей. Ее подгруппа $\sigma\pi_1(\tilde{S}_o)$ порождена *квадратом* этой образующей. Выберем в $\pi_1(\tilde{X}_o)$ базис, элементы которого представлены петлями двух видов: $4n$ петель первого вида – лассо, зацепленных за проколы в римановой поверхности $\tilde{X}_o$, и $2g$ петель второго вида, гомотопных циклам канонического базиса $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_g; \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_g$. Индекс ветвления отображения $\mathcal{F} \circ \chi$ равен 2 в каждом из проколов $\tilde{X}_o$, поэтому петли первого вида проецируются в лассо, *дважды* огибающие один из проколов S_o . Проекция петли второго вида на X_o охватывает (см. рис. 2) четное число точек (4), а также некоторое число других прообразов $T_n^{-1}(\pm 1)$. Прodeформируем эту проекцию на X_o в произведение лассо, зацепленных за проколы поверхности X_o . Проекция произведения на S_o гомотопна *четной* степени образующей группы $\pi_1(S_o)$.

Поднятие $\mathcal{F}$ на накрывающие пространства определено с точностью до движений из $\mathfrak{G}(\sigma)$, а эквивариантность $\tilde{\mathcal{F}}$ означает в нашем случае

$$\tilde{\mathcal{F}}(Jt) = \frac{1}{\tilde{\mathcal{F}}(t)}, \quad t \in \tilde{X}. \quad (15)$$

Определим на накрывающей $\tilde{X} := M(E^+)$ абелев дифференциал третьего рода:

$$d\eta = \frac{d\tilde{\mathcal{F}}}{n\tilde{\mathcal{F}}}, \quad (16)$$

полюсы которого ввиду коммутативности (9а) совпадают с полюсами функции $\mathcal{F} \circ \chi$, т.е. находятся в бесконечно удаленных точках верхнего ∞_+ и нижнего ∞_- листов $M(E^+)$. Устраняя двужначность в выборе $\tilde{\mathcal{F}}$, считаем

$$\text{Res } d\eta(t)|_{t=\infty_{\pm}} = \mp 1. \quad (17)$$

Остается определить периоды $d\eta$. Деформируя контур $\mathbf{A}_s$ в отрезок $[a_s, b_s]$, проходимый сначала по нижнему листу M и обратно по верхнему листу, убеждаемся, что

$$\int_{\mathbf{A}_s} d\eta = \frac{1}{n} \ln \tilde{\mathcal{F}} \Big|_{\mathbf{A}_s} = \frac{i}{n} \arg \tilde{\mathcal{F}} \Big|_{\mathbf{A}_s} = 0, \quad s = 1, \dots, g.$$

Аналогично, цикл $\tilde{\mathbf{B}}_k$ продеформируем в отрезок $[b_k, a_{k+1}]$, проходимый сначала по нижнему берегу и обратно по верхнему. Когда $\tilde{x} \in \tilde{X}$ пробегает по указанному контуру, точка $\tilde{s} = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{x})$ ровно m_k раз описывает окружность $|\tilde{s}| = 1$ против часовой стрелки, следовательно,

$$\int_{\tilde{\mathbf{B}}_k} d\eta = \frac{i}{n} \arg \tilde{\mathcal{F}} \Big|_{\tilde{\mathbf{B}}_k} = \frac{2\pi i m_k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, g.$$

Представление (7) следует из определения (16) и коммутативности (9а).

2) Пусть, обратно, риманова поверхность $M(E^+)$ (5) такова, что выполнены соотношения (6) для $\mathbf{A}$ – нормированного дифференциала третьего рода

$$d\eta = \frac{dx}{w} \prod_{k=1}^g (x - c_k), \quad c_k \in (a_k, b_k). \quad (18)$$

На $M(E^+)$ корректно определена ввиду (6) функция

$$\tilde{\mathcal{F}}(t) = \exp n \int_{t_0}^t d\eta, \quad t \in M, \quad t_0 = (1, 0) \in M,$$

удовлетворяющая условию эквивариантности (15), поскольку $d\eta$ меняет знак при инволюции J , тождественно действующей на t_0 . Порожденное $\tilde{\mathcal{F}}$ отображение факторпространств

$$\mathcal{F}: X = \tilde{X}/\mathfrak{G}(\chi) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \tilde{S}/\mathfrak{G}(\sigma) = S$$

параметрически записывается в виде (10):

$$\mathcal{F}(x) = \sigma \circ \tilde{\mathcal{F}}(t) = \cos ni \int_{t_0}^t d\eta, \quad x = \chi(t) \in X, \quad t \in \tilde{X},$$

и является рациональной функцией с единственным полюсом степени n на бесконечности, т.е. полиномом.

Остается показать, что интервал (b_k, a_{k+1}) составлен из m_k интервалов, каждый из которых $\mathcal{F}(x)$ взаимно однозначно отображает на I . Действительно, при уменьшении x от a_{k+1} до b_k аргумент косинуса в представлении (7) монотонно, что следует из (18), изменяется на πm_k . На краях b_k, a_{k+1} аргумент кратен π – это выводится индукцией по k из $\mathbf{A}$ -нормированности дифференциала $d\eta$. Поскольку числа m_k образуют разбиение степени n многочлена $\mathcal{F}(x)$, то из теоремы 1 следует, что $T_n := \mathcal{F}(x)$ – многочлен Чебышева с опорным множеством E^+ .

3. Геометрия многообразия опорных множеств. Сформулируем лемму, следствием которой является теорема 3. Пусть $d\eta$ – абелев дифференциал третьего рода (18) на римановой поверхности (5), не обязательно нормированный. Определим отображение $\{a_k, b_k, c_k\}_{k=1}^g \rightarrow \{\lambda_k, \mu_k, \nu_k\}_{k=1}^g$ при помощи равенств

$$\lambda_k := \int_{\mathbf{A}_k} d\eta, \quad \mu_k := -i \int_{\mathbf{B}_k} d\eta, \quad \nu_k := \int_{\mathbf{C}_k} d\eta, \quad k = 1, \dots, g, \quad (19)$$

пути $\mathbf{A}_k, \mathbf{C}_k$ указаны на рис. 2, $\mathbf{B}_k := \tilde{\mathbf{B}}_0 + \tilde{\mathbf{B}}_1 + \dots + \tilde{\mathbf{B}}_{k-1}$.

ЛЕММА 2. *Отображение (19) является вещественно-аналитическим диффеоморфизмом $3g$ -мерного симплекса*

$$-1 < a_1 < c_1 < b_1 < a_2 < \dots < c_g < b_g < 1 \quad (20)$$

на произведение g -мерного симплекса и $2g$ -мерного конуса

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_g < 2\pi, \quad \lambda_k < \nu_k, \quad 0 < \nu_k, \quad k = 1, \dots, g. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интеграл Кристоффеля–Шварца

$$2i \int_{-1}^x d\eta, \quad \operatorname{Im} x > 0,$$

конформно отображает верхнюю полуплоскость на гребенчато-ступенчатую область, показанную на рис. 3. Ее параметры взаимно однозначно связаны с величинами $\{\lambda_k, \mu_k, \nu_k\}$, например: абсцисса k -го вертикального разреза есть μ_k ; высота k -го разреза относительно следующей за ним горизонтальной площадки есть ν_k , разность уровней горизонтальных площадок, примыкающих к k -му разрезу, есть λ_k . Обратное отображение области (21) на симплекс (20) определим при помощи подходящим образом нормированного конформного отображения гребенчато-ступенчатых областей рис. 3 на верхнюю полуплоскость. Покажем, что биективное отображение $\{a_k, b_k, c_k\} \longleftrightarrow \{\lambda_k, \mu_k, \nu_k\}$ является в обе стороны вещественно-аналитическим.

Рис. 3. Гребенчато-ступенчатая область при $g = 3$

Дифференцируя выражения для λ, μ, ν по параметрам a, b, c , получим следующее выражение для матрицы Якоби отображения (19):

$$\frac{\partial(\lambda, \mu, \nu)}{\partial(a, b, c)} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} \int_{\mathbf{A}_k} \frac{d\eta}{x-a_s} & \dots & \frac{1}{2} \int_{\mathbf{A}_k} \frac{d\eta}{x-b_s} & \dots & - \int_{\mathbf{A}_k} \frac{d\eta}{x-c_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2i} \int_{\mathbf{B}_k} \frac{d\eta}{x-a_s} & \dots & \frac{1}{2i} \int_{\mathbf{B}_k} \frac{d\eta}{x-b_s} & \dots & - \frac{1}{i} \int_{\mathbf{B}_k} \frac{d\eta}{x-c_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} \int_{\mathbf{C}_k} \frac{d\eta}{x-a_s} & \dots & \frac{1}{2} \int_{\mathbf{C}_k} \frac{d\eta}{x-b_s} & \dots & - \int_{\mathbf{C}_k} \frac{d\eta}{x-c_s} \end{array} \right\|, \quad k, s = 1, \dots, g.$$

Вырожденность матрицы Якоби означает, что найдется ненулевой дифференциал второго рода вида

$$d\omega := \sum_{s=1}^g \left(\frac{\alpha_s}{x-a_s} + \frac{\beta_s}{x-b_s} + \frac{\gamma_s}{x-c_s} \right) d\eta$$

с постоянными $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$, для которого интегралы по всем кривым $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k$ равны нулю. Заметим, что полюсы $d\omega$ могут располагаться только в точках $(a_s, 0), (b_s, 0) \in M$, причем вычеты $d\omega$ в полюсах равны нулю: $d\omega$ меняет знак при инволюции J , оставляющей неподвижными точки ветвления M . Абелев интеграл

$$\omega(t) = \int_{t_0}^t d\omega, \quad t_0 = (1, 0) \in M, \quad (22)$$

однозначен на M , поскольку и циклические и полярные периоды $d\omega$ равны нулю. Функция ω меняет знак при инволюции J ввиду нечетности дифференциала $d\omega$, поэтому $\omega = 0$ во всех точках $t_k \in M$, накрывающих точки $c_k, k = 1, \dots, g$. Функция $w\omega \in \mathbb{C}(M)$ инвариантна при инволюции J и имеет два полюса на бесконечности порядка не выше $g + 1$ в качестве единственных особенностей, поэтому

$$w(t)\omega(t) = P_{g+1}(x), \quad x = \chi(t), \quad t \in M,$$

где полином P_{g+1} имеет $g + 2$ корня $\pm 1, c_1, \dots, c_g$. Следовательно, $\omega \equiv 0$ и матрица Якоби невырождена. Теорема об обратной функции теперь гарантирует аналитичность отображения $\{\lambda, \mu, \nu\} \rightarrow \{a, b, c\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пространство модулей $\mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$ естественно вкладывается в $3g$ -мерный симплекс (20) в качестве решений системы уравнений $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_g = 0$, при этом система чисел (4) дополняется нулями c_k $\mathbf{A}$ -нормированного дифференциала третьего рода $d\eta$ с полюсами на бесконечности. Подмногообразие $\mathbb{T}(m_0, \dots, m_g) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}; g, 1)$ — это множество, выделяемое g дополнительными равенствами $\mu_k = 2\pi(m_0 + m_1 + \dots + m_{k-1})/n, k = 1, \dots, g$, с n из (2). Отсюда легко вытекают все утверждения теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Peherstorfer F. Minimal polynomials on several intervals with respect to the maximum-norm — a survey // Proc. of the Workshop “Methods of Complex Analysis in Approximation Theory”: Almeria, 1995. P. 137–160.
- [2] Содин М. Л., Юдицкий П. М. Функции, наименее уклоняющиеся от нуля на замкнутых подмножествах действительной оси // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 2. С. 1–61.
- [3] Peherstorfer F. On Bernstein–Szegő orthogonal polynomials on several intervals. II // J. Appr. Theory. 1991. V. 64. P. 123–161.
- [4] Farkas H. M., Kra I. Riemann Surfaces. 2nd edition: Springer GTM, 71.
- [5] Ахиезер Н. И. Über einige Funktionen die in gegeben Intervallen am wenigsten von Null abweichen // Изв. Казанского физ.-матем. общества. 1928. Т. 3. № 3. С. 1–69.
- [6] Ахиезер Н. И., Левин Б. Я. Неравенства для производных, аналогичные неравенству Бернштейна // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117. № 5. С. 735–738.
- [7] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
- [8] Богатырев А. Б. Интегральные уравнения Пуанкаре–Стекклова и задачи монодромии // Функцион. анализ и прилож. 2000. Т. 34. № 2.
- [9] Апанасов Б. Н. Геометрия дискретных групп и многообразий. М.: Наука, 1991.

Институт вычислительной математики РАН
Московский физико-технический институт

Поступило
29.09.1998
Исправленный вариант
10.09.1999