Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Степанов, И. Г. Шандра, Новые характеристики
инфинитезимальной изометрии и тривиального солито-
на Риччи, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 3, 459–
462

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9010>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:11:47

Новые характеристики инфинитезимальной изометрии и солитона Риччи

С. Е. Степанов, И. Г. Шандра

Доказывается, что на компактном римановом многообразии (M, g) со связностью Леви–Чивита ∇ векторное поле X является инфинитезимальной изометрией тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений: $\text{trace}_g(L_X \nabla) = 0$, $\text{trace}_g(L_X \text{Ric}) = 0$, где L_X – производная Ли в направлении X и Ric – тензор Риччи. Согласно второму утверждению солитон Риччи на компактном многообразии M будет тривиальным, если его векторное поле X удовлетворяет одному из двух условий $\text{trace}_g(L_X \text{Ric}) \leq 0$ или $\text{trace}_g(L_X \text{Ric}) \geq 0$.

Библиография 10 названий.

1. Введение и результаты. Векторное поле X на римановом многообразии (M, g) со связностью Леви–Чивита ∇ называется *инфинитезимальным гармоническим преобразованием* (см. [1]), если порождаемая X локальная однопараметрическая группа преобразований состоит из локальных гармонических диффеоморфизмов. Аналитическая характеристика такого X имеет вид равенства

$$\text{trace}_g(L_X \nabla) = 0 \quad (1)$$

для производной Ли L_X в направлении X .

Примером инфинитезимального гармонического преобразования служит *инфинитезимальная изометрия* (см. [2; с. 60–64]), характеризующаяся равенством $L_X g = 0$, которое влечет, в свою очередь, равенство $L_X \nabla = 0$, откуда и следует условие (1).

Равенство $L_X g = 0$ влечет также и условие инвариантности тензора Риччи $L_X \text{Ric} = 0$ (см. [3; с. 43]). В общей теории относительности мы встречаем работы (см., например, [4], [5]), где вместо условия $L_X \text{Ric} = 0$ изучается “ослабленное условие” следующего вида:

$$\text{trace}_g(L_X \text{Ric}) = 0. \quad (2)$$

Интересно, что в случае компактного риманова многообразия (M, g) присоединение к уравнению (1) условия (2) превращает инфинитезимальное гармоническое преобразование X в инфинитезимальную изометрию. А именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *Если инфинитезимальное гармоническое преобразование X на компактном римановом многообразии (M, g) удовлетворяет одному из двух условий: $\text{trace}_g(L_X \text{Ric}) \leq 0$ или $\text{trace}_g(L_X \text{Ric}) \geq 0$, то X является инфинитезимальной изометрией.*

Сформулируем здесь очевидное следствие, которое дает новую характеристику инфинитезимальной изометрии (ср. [2; с. 63]).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Векторное поле X на компактном римановом многообразии (M, g) со связностью Леви-Чивита ∇ является инфинитезимальной изометрией тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет системе дифференциальных уравнений $\text{trace}_g(L_X \nabla) = 0$, $\text{trace}_g(L_X \text{Ric}) = 0$.*

Для формулировки второго и третьего следствий обратимся к теории солитонов Риччи (см. [6]–[8]). Во-первых, напомним понятие *солитона Риччи*, как триплета (g, X, λ) на многообразии M для метрики g , векторного поля X и постоянной λ , связанных уравнением

$$-2\text{Ric} = L_X g + 2\lambda g. \quad (3)$$

При $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$ солитон Риччи называется *устойчивым*, *стягивающимся* и *растягивающимся* соответственно. И далее, солитон Риччи называется *эйнштейновым*, если g – метрика Эйнштейна, *градиентным*, если $X = \text{grad} f$ для некоторой функции $f \in C^\infty M$ и, наконец, *тривиальным*, если $X = 0$.

Во-вторых, приведем некоторые факты теории. На компактных многообразиях всех размерностей $n \geq 2$ стабильный и растягивающийся солитоны Риччи являются эйнштейновыми. Стягивающийся солитон Риччи на компактном многообразии M размерности $n = 2$ или $n = 3$ превращает его в риманово многообразие постоянной положительной кривизны. На компактных многообразиях размерностей $n \geq 4$ существуют отличные от эйнштейновых стягивающиеся солитоны Риччи. Известное на сегодняшний день условие тривиальности стягивающегося солитона Риччи на компактном многообразии размерности $n \geq 4$ состоит в требовании обращения в нуль тензора Вейля метрики g . В обзорной статье [7] сформулированы открытые проблемы теории. И, в частности, проблема нахождения условий тривиальности для стягивающегося солитона Риччи на компактном многообразии размерности $n \geq 4$, отличных от требования обращения в нуль тензора Вейля.

В работе [9] было доказано, что векторное поле X солитона Риччи является инфинитезимальным гармоническим преобразованием. Тогда на основании сформулированной выше теоремы может быть доказано следствие, которое является возможным решением обозначенной проблемы.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Солитон Риччи (g, X, λ) на компактном многообразии M будет тривиальным, если выполняется одно из двух условий: $\text{trace}_g(L_X \text{Ric}) \leq 0$ или $\text{trace}_g(L_X \text{Ric}) \geq 0$ для тензора Риччи Ric метрики g .*

В статье [9] также было найдено условие эйнштейновости солитона Риччи на компактном многообразии M , а именно, $L_X s \leq 0$ для скалярной кривизны $s = \text{trace}_g \text{Ric}$. Сформулированное ниже на его основе утверждение является еще одним из возможных решений обозначенной проблемы.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Солитон Риччи (g, X, λ) на компактном многообразии M будет тривиальным, если $L_X s \leq 0$ для скалярной кривизны $s = \text{trace}_g \text{Ric}$ метрики g .*

2. Доказательство теоремы. Пусть ω есть 1-форма, двойственная к X относительно данной метрики g ; тогда, как это было доказано в [1], уравнение (1) равносильно следующему:

$$\Delta \omega = 2g(\text{Ric}^* X, \cdot) \quad (4)$$

для лапласиана Ходжа–де Рама Δ (см. [2; с. 203]) и определяемого равенством $\text{Ric}(Y, Z) = g(\text{Ric}^* Y, Z)$ оператора Ric^* .

Поддействуем поочередно на выражения, стоящие в обеих частях равенства (3), оператором кодифференцирования d^* . При этом в левой части (3) получим $d^*(\Delta\omega) = \Delta(d^*\omega)$, где $d^*\omega = -\text{div } X$ (см. [2; с. 203]).

Для нахождения выражения в правой части равенства (3) определим в произвольной локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ многообразия (M, g) тензор и оператор Риччи их локальными компонентами R_{ij} и R_j^k , векторное поле X как $X = X^k \partial/\partial x^k$, 1-форму ω как $\omega = \omega_j dx^j$, метрический тензор g его локальными ковариантными g_{ij} и контравариантными компонентами g^{kl} , и, наконец, оператор контравариантного дифференцирования $\nabla_k := \nabla_{\partial/\partial x^k}$. Тогда в правой части равенства (4) после воздействия на нее оператора d^* будем иметь

$$\begin{aligned} d^*(2 \text{Ric}^* X) &= -\nabla_k (2R_j^k X^j) = -2((\nabla_k R_j^k) X^j + R_j^k \nabla_k X^j) \\ &= -(X^j \nabla_j s + R^{jk} (\nabla_j \omega_k + \nabla_k \omega_j)) \\ &= -g^{kl} (X^j \nabla_j R_{kl} + R_k^j \nabla_j \omega_l + R_l^j \nabla_j \omega_k) = -g^{kl} (L_X R_{kl}). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали правило $L_X R_{kl} = X^j \nabla_j R_{kl} + R_k^j \nabla_j \omega_l + R_l^j \nabla_j \omega_k$ вычисления производной Ли $L_X R_{kl}$ (см. [3; с. 41]) и известное тождество $2\nabla_k R_j^k = \nabla_j s$ для скалярной кривизны $s = \text{trace}_g \text{Ric}$ (см. [3; с. 21]). В итоге мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\Delta \text{div } X = \text{trace}_g (L_X \text{Ric}). \quad (5)$$

Применяя теорему Грина (см. [3; с. 30]), находим

$$\int_M (\text{trace}_g (L_X \text{Ric})) dv = 0. \quad (6)$$

Заметим, что применяя теорему Грина, следует считать, что M ориентируемо. Если M не ориентируемо, то надо рассмотреть его ориентируемое двулистное накрытие (см. [2; с. 80]).

Предположим далее, что одно из условий теоремы:

$$\text{trace}_g (L_X \text{Ric}) \leq 0 \quad \text{или} \quad \text{trace}_g (L_X \text{Ric}) \geq 0$$

выполнено. Тогда из (5) следует, что $\text{trace}_g (L_X \text{Ric}) = 0$ и, как следствие этого, из (5) выводим $\Delta \text{div } X = 0$, что для компактного многообразия (M, g) в силу теоремы Хопфа (см. [3; с. 29]) означает $\text{div } X = \text{const}$. Рассматривая опять ориентируемое двулистное накрытие компактного M и применяя теорему Грина к $\text{div } X = \text{const}$, находим $\text{div } X = 0$. В заключение доказательства сошлемся на теорему 2.3 из [2], согласно которой последнее условие вместе с уравнением (4) характеризуют X , как инфинитезимальную изометрию (см. [2; с. 63]).

3. Доказательство следствий. Заметим, что первое из сформулированных следствий не нуждается в доказательстве.

При выполнении условий, сформулированных во втором следствии, векторное поле X солитона Риччи становится инфинитезимальной изометрией. С другой стороны, каждый солитон Риччи (g, X, λ) на компактном многообразии M является

градиентным (см. [10]), т.е. $X = \text{grad} f$. На этом основании условие $L_X g = 0$ принимает вид $\nabla \nabla f = 0$, откуда $\Delta f = 0$, что на основании теоремы Хопфа приводит к равенству $f = \text{const}$, в результате чего $X = \text{grad} f = 0$ и солитон Риччи становится тривиальным.

В статье [9] доказано, что при $L_X s \leq 0$ солитон Риччи на компактном M становится эйнштейновым. В этом случае с учетом градиентности солитона Риччи его уравнение (3) предстанет в виде $\nabla \nabla f = -(s/n + \lambda)g$, где $s = \text{const}$. Откуда $\Delta f = (s + n\lambda) = \text{const}$. Применяя теорему Грина, находим, что $s + n\lambda = 0$. Теорема Хопфа в случае $\Delta f = 0$ приводит к равенству $f = \text{const}$, в результате чего $X = \text{grad} f = 0$ и солитон Риччи становится тривиальным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. E. Stepanov, I. G. Shandra, “Geometry of infinitesimal harmonic transformations”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **24**:3 (2003), 291–299.
- [2] И. Кобаяси, *Группы преобразований в дифференциальной геометрии*, Наука, М., 1986.
- [3] К. Яно, С. Бохнер, *Кривизна и числа Бетти*, ИЛ, М., 1957.
- [4] W. R. Davis, D. R. Oliver, Jr., “Matter field space times admitting symmetry mappings satisfying vanishing contraction of the Lie deformation of the Ricci tensor”, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, **28**:2 (1978), 197–206.
- [5] L. H. Green, L. K. Norris, D. R. Oliver, W. R. Davis, “The Robertson–Walker metric and the symmetries belong to the family of contracted Ricci collineations”, *General Relativity and Gravitation*, **8**:9 (1977), 731–736.
- [6] B. Chow, D. Knopf, “The Ricci flow: An introduction”, *Math. Surveys Monogr.*, **110**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [7] M. Eminenti, G. La Nave, C. Mantegazza, “Ricci solitons: the equation point of view”, *Manuscripta Math.*, **127**:3 (2008), 345–367.
- [8] H.-D. Cao, “Geometry of Ricci solitons”, *Chinese Ann. Math. Ser. B*, **27**:2 (2006), 121–142.
- [9] С. Е. Степанов, В. Н. Шелепова, “Заметка о солитонах Риччи”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 474–477.
- [10] G. Perelman, *The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Applications*, 2002, arXiv: [math.DG/0211159v1](https://arxiv.org/abs/math.DG/0211159v1).

С. Е. Степанов

Финансовый университет при Правительстве РФ

E-mail: s.e.stepanov@mail.ru

Поступило

28.03.2011

И. Г. Шандра

Финансовый университет при Правительстве РФ

E-mail: igor-shandra@mtu-net.ru