Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Макаров, Разрушение решения начально-краевой задачи для обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным граничным условием, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 4, 567–582

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9015>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:04:32

Разрушение решения начально-краевой задачи для обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным граничным условием

П. А. Макаров

Рассматривается начально-краевая задача для нелинейного уравнения псевдопараболического типа в постановке с нелинейным граничным условием Неймана. Доказывается локальная теорема о существовании решения. При помощи метода энергетических неравенств выводятся достаточные условия разрушения решения за конечный промежуток времени и оценки сверху и снизу на время разрушения.

Библиография: 11 названий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородный изотропный полупроводник в ограниченной области с достаточно гладкой границей в рамках приближения нелинейной оптики [1]–[3]. Пусть зависимости концентрации свободных зарядов и вектора поляризации среды от электрического потенциала являются нелинейными. Исходная система уравнений, описывающая диссипативные процессы в таком полупроводнике, в квазистационарном приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= -4\pi en, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, & \operatorname{div} \mathbf{P} &= \lambda_3 \varphi + \lambda_4 |\varphi|^{q_3} \varphi, \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= \operatorname{div} \mathbf{J} + \lambda_2 |\varphi|^{q_2} \varphi, & \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E}, & \mathbf{E} &= -\nabla \varphi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ – векторы напряженности и индукции электрического поля соответственно, $\mathbf{J}$ – плотность тока свободных зарядов, $\mathbf{P}$ – вектор поляризации среды, φ – электрический потенциал. Кроме того, поставим на границе полупроводника нелинейное граничное условие вида

$$(\mathbf{E}, \mathbf{n}) = \lambda_1 |\varphi|^{q_1} \varphi, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к границе области. Будем считать, что $q_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, а коэффициенты $\lambda_1 > 0$, $\lambda_3 > 0$, $\lambda_4 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Система уравнений (1.1) и условие (1.2) при заданном распределении электрического потенциала φ в некоторый начальный момент времени редуцируются, после перехода к безразмерным переменным, к начально-краевой задаче относительно функции $u(x, t)$, имеющей

физический смысл электрического потенциала, с нелинейным граничным условием Неймана:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^{q_3}u) + \Delta u + |u|^{q_2}u = 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + |u|^{q_1}u \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (1.3)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Omega \in \mathbb{R}^N$, $q_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Потребуем, чтобы $\Gamma \equiv \partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$. Задача (1.3) является основным предметом исследования настоящей работы.

2. Локальная разрешимость в слабом обобщенном смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Слабым обобщенным решением задачи (1.3) на интервале $(0, T)$ называется функция $u(x, t)$ класса $\mathbb{H}^1((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega))$, удовлетворяющая условию*

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_{\Omega} dx \left(\sum_{i=1}^N (u'_{x_i} v_{x_i} + u_{x_i} v_{x_i}) + u'v + (q_3 + 1)|u|^{q_3}u'v - |u|^{q_2}uv \right) \\ + \int_0^T dt \int_{\Gamma} ds (|u|^{q_1}u + (q_1 + 1)|u|^{q_1}u')v = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

для всех $v(x, t) \in \mathbb{L}^2((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega))$, $u(x, 0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^1(\Omega)$.

Ниже будут установлены ограничения на параметры q_1 , q_2 и q_3 , обеспечивающие существование слабого обобщенного решения (см. формулировку теоремы 1).

Существует эквивалентная формулировка данного определения [1], в которой условие (2.1) заменяется следующим:

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \varphi(t) \int_{\Omega} dx \left(\sum_{i=1}^N (u'_{x_i} \eta_{x_i} + u_{x_i} \eta_{x_i}) + u'\eta + (q_3 + 1)|u|^{q_3}u'\eta - |u|^{q_2}u\eta \right) \\ + \int_0^T dt \varphi(t) \int_{\Gamma} ds (|u|^{q_1}u + (q_1 + 1)|u|^{q_1}u')\eta = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

для всех $\varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0, T)$, $\eta \in \mathbb{H}^1(\Omega)$. В дальнейших рассуждениях настоящего пункта мы будем опираться именно на этот вариант формулировки.

Для доказательства локальной разрешимости задачи в слабом обобщенном смысле воспользуемся методом Галёркина в сочетании с методом компактности [4]–[6].

Выберем в $\mathbb{H}^1(\Omega)$ некоторую систему функций $\{\omega_j\}$, образующую базис в данном пространстве. Такая система заведомо существует, поскольку $\mathbb{H}^1(\Omega)$ – сепарабельное пространство.

Будем искать приближенное решение задачи (2.2) в виде

$$u_m(x, t) = \sum_{k=0}^m c_{mk}(t)\omega_k(x),$$

где коэффициенты $c_{mk}(t)$ ищутся из условий

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \varphi(t) \int_{\Omega} dx \left(\sum_{i=1}^N (u'_{mx_i} \omega_{jx_i} + u_{mx_i} \omega_{jx_i}) \right. \\ & \quad \left. + u'_m \omega_j + (q_3 + 1) |u_m|^{q_3} u'_m \omega_j - |u|^{q_2} u_m \omega_j \right) \\ & + \int_0^T dt \varphi(t) \int_{\Gamma} ds (|u_m|^{q_1} u_m + (q_1 + 1) |u_m|^{q_1} u'_m) \omega_j = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

для всех $\varphi(t) \in \mathbb{L}^2(0, T)$, $j = 1, \dots, m$,

$$u_{0m} \equiv u_m(x, 0) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(0) \omega_k \rightarrow u_0 \quad \text{в } \mathbb{H}^1(\Omega).$$

Условия (2.3) вытекают из (2.2), если в качестве функции $\eta(x)$ взять $\omega_j(x)$. Отметим сразу, что все дальнейшие рассуждения проводятся для случая $\|u_0\|_2 \neq 0$ (здесь и далее обозначение $\|u(x, t)\|_p$ следует понимать как $\|u(x, t)\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}$). В противном случае, очевидно, существует тривиальное слабое обобщенное решение задачи (1.3) $u(x, t) \equiv 0$.

Условие (2.3) с учетом основной теоремы вариационного исчисления можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m c'_{mk}(t) \left\{ \int_{\Omega} dx \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} + \omega_k \omega_j + (q_3 + 1) |u_m|^{q_3} \omega_k \omega_j \right] \right. \\ & \quad \left. + (q_1 + 1) \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1} \omega_k \omega_j \right\} \\ & + \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) \left\{ \int_{\Omega} dx \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - |u_m|^{q_2} \omega_k \omega_j \right] + \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1} \omega_k \omega_j \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Введем обозначения

$$\vec{c}_m(t) \equiv \{c_{1m}(t), \dots, c_{mm}(t)\}^T,$$

$$a_{kj} = \int_{\Omega} dx [(\nabla \omega_k, \nabla \omega_j) + \omega_k \omega_j + (q_3 + 1) |u_m|^{q_3} \omega_k \omega_j] + (q_1 + 1) \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1} \omega_k \omega_j.$$

$$b_{kj} = \int_{\Omega} dx [(\nabla \omega_k, \nabla \omega_j) - |u_m|^{q_2} \omega_k \omega_j] + \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1} \omega_k \omega_j,$$

$$A_m(\vec{c}_m) \equiv \{a_{jk}(\vec{c}_m)\}, \quad \vec{f}_m(\vec{c}_m) \equiv \{b_{jk}(\vec{c}_m)\} \cdot \vec{c}_m.$$

Тогда система уравнений (2.4) принимает матричный вид

$$A_m \vec{c}'_m(t) = \vec{f}_m(\vec{c}_m). \quad (2.5)$$

Элементы матрицы A_m , а также ее определитель являются, как несложно показать, непрерывными функциями аргумента $\vec{c}_m$ во всех точках. Покажем, что матрица A_m обратима. В самом деле, составим квадратичную форму

$$\sum_{k,j=1,1}^{m,m} a_{kj} \xi_k \xi_j = \int_{\Omega} dx [(\nabla \theta, \nabla \theta) + \theta^2 + (q_3 + 1) |u_m|^{q_3} \theta^2] + (q_1 + 1) \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1} \theta^2,$$

где введено обозначение

$$\theta \equiv \sum_{p=1}^m \xi_p \omega_p.$$

Данная квадратичная форма, очевидно, невырождена. Значит [7], имеет место $\det A_m \neq 0$, откуда следует обратимость матрицы A_m .

Систему уравнений (2.5) можно преобразовать к виду

$$\vec{c}_m'(t) = A_m^{-1} \vec{f}_m(\vec{c}_m),$$

где правая часть равенства непрерывна в $\mathcal{D}$. Общие результаты о нелинейных системах дифференциальных уравнений [8] гарантируют существование решения класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, t_m])$ задачи Коши для данной системы на отрезке $[0, t_m]$. При этом с помощью стандартного метода продолжения решения легко показать, что для каждого m найдется $T_m \equiv \sup t_m$ такое, что решение указанного класса гладкости существует на интервале $[0, T_m)$, причем

$$\text{либо } T_m = \infty, \quad \text{либо } \|\vec{c}_m(t)\| \equiv (\vec{c}_m^T \cdot \vec{c}_m)^{1/2} \rightarrow \infty \quad \text{при } t \uparrow T_m.$$

Перейдем к выводу некоторых априорных оценок, необходимых для дальнейшего. Введем [1] следующие функции:

$$\Phi_m(t) \equiv \frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u_m\|_2^2 + \frac{q_3 + 1}{q_3 + 2} \|u_m\|_{q_3+2}^{q_3+2} + \frac{q_1 + 1}{q_1 + 2} \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1+2}, \quad (2.6)$$

$$J_m(t) \equiv \|\nabla u_m'\|_2^2 + \|u_m'\|_2^2 + (q_3 + 1) \int_{\Omega} dx |u_m|^{q_3} (u_m')^2 + (q_1 + 1) \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1} (u_m')^2 \quad (2.7)$$

Умножая обе части равенства (2.4) на c_{mj} , затем на c'_{mj} , с последующим суммированием по индексу $j = 1, \dots, m$, получим соответственно так называемые первое и второе энергетические равенства для приближенного решения $u_m(x, t)$:

$$\frac{d}{dt} \Phi_m(t) = \|u_m\|_{q_2+2}^{q_2+2} - \|\nabla u_m\|_2^2 - \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1+2}, \quad (2.8)$$

$$J_m(t) = \frac{1}{q_2 + 2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{q_2+2}^{q_2+2} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|_2^2 - \frac{1}{q_1 + 2} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1+2}. \quad (2.9)$$

Из равенства (2.8) следует оценка

$$\Phi_m(t) \leq \Phi_m(0) + \int_0^t d\tau \|u_m(\tau)\|_{q_2+2}^{q_2+2}.$$

Будем полагать, что либо $N \leq 2$, либо $q_2 \leq 4/(N-2)$. Тогда [4] имеет место вложение $\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$, следовательно, справедливо неравенство $\|u_m\|_{q_2+2} \leq \mathcal{C} \|u_m\|_{+1}$, где под обозначением $\|\cdot\|_{+1}$ понимается норма элемента в пространстве $\mathbb{H}^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{+1} = (\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2)^{1/2}.$$

Тогда (здесь и далее для упрощения записей через $\mathcal{C}$ будем обозначать различные константы)

$$\Phi_m(t) \leq \Phi_m(0) + \mathcal{C} \int_0^t d\tau \Phi_m^{(q_2+2)/2}(\tau). \quad (2.10)$$

Применив лемму Гронуолла–Беллмана–Бихари [9], получим оценку сверху на $\Phi_m(t)$:

$$\Phi_m(t) \leq \frac{1}{(\Phi_{m0}^{-q_2/2} - \mathcal{C}t)^{2/q_2}}, \quad \Phi_{m0} \equiv \Phi_m(0). \quad (2.11)$$

Потребуем выполнения следующего условия:

$$\text{либо } N \leq 2, \quad \text{либо } q_1 \leq \frac{2}{N-2}.$$

В этом случае [4] для любой функции $w \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ определен ее след на границе области $\gamma_0 w \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Gamma)$, причем оператор $\gamma_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^1(\Omega); \mathbb{L}^{q_1+2}(\Gamma))$. Кроме того, будем предполагать, что $q_3 \leq 4/(N-2)$, если $N \geq 3$.

В силу поставленных выше условий на q_1 и q_3 из $u_{m0} \rightarrow u_0$ в $\mathbb{H}^1(\Omega)$ вытекает $\Phi_{m0} \leq \mathcal{C}$. Следовательно, из (2.11) можно сделать вывод, что существует $T_0 = T_0(u_0, q_1, q_2, q_3) > 0$ такое, что

$$\Phi_m(t) \leq \mathcal{C}, \quad t \in [0, T], \quad \text{для всех } T < T_0, \quad (2.12)$$

где постоянная $\mathcal{C}$ не зависит от индекса m .

Интегрируя обе части равенства (2.9) по временной переменной, несложно прийти к оценке

$$\int_0^t J_m(\tau) d\tau \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_{m0}\|_2^2 + \frac{1}{q_1+2} \int_\Gamma ds |u_{m0}|^{q_1+2} + \frac{1}{q_2+2} \|u_m\|_{q_2+2}^{q_2+2}. \quad (2.13)$$

Применив полученную оценку на функцию $\Phi_m(t)$, будем иметь

$$\int_0^t J_m(\tau) d\tau \leq \mathcal{C}, \quad t \in [0, T], \quad \text{для всех } T < T_0, \quad (2.14)$$

где постоянная $\mathcal{C}$ не зависит от индекса m .

Обратимся к явным выражениям (2.6) и (2.7) для функций Φ_m и J_m . Учитывая неотрицательность каждого слагаемого в указанных выражениях, из (2.12) и (2.14) получим

$$\sup_{t \in (0, T)} (\|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \|u_m(t)\|_2^2) \leq \mathcal{C}, \quad (2.15)$$

$$\sup_{t \in (0, T)} \|u_m(t)\|_{q_3+2}^{q_3+2} \leq \mathcal{C}, \quad (2.16)$$

$$\sup_{t \in (0, T)} \int_\Gamma ds |u_m(t)|^{q_1+2} \leq \mathcal{C}, \quad (2.17)$$

$$\int_0^T dt (\|\nabla u'_m(t)\|_2^2 + \|u'_m(t)\|_2^2) \leq \mathcal{C}, \quad (2.18)$$

$$\int_0^T dt \int_\Omega dx |u_m(t)|^{q_3} (u'_m(t))^2 \leq \mathcal{C}, \quad (2.19)$$

$$\int_0^T dt \int_\Gamma ds |u_m(t)|^{q_1} (u'_m(t))^2 \leq \mathcal{C}. \quad (2.20)$$

Из (2.15)–(2.20) вытекают соответственно следующие утверждения:

$$u_m \quad \text{ограничено в} \quad \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega)), \quad (2.21)$$

$$u_m^{q_3} u_m \quad \text{ограничено в} \quad \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbb{L}^{q'_3}(\Omega)), \quad q'_3 = \frac{q_3 + 2}{q_3 + 1}, \quad (2.22)$$

$$u_m^{q_1} u_m \quad \text{ограничено в} \quad \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbb{L}^{q'_1}(\Gamma)), \quad q'_1 = \frac{q_1 + 2}{q_1 + 1}, \quad (2.23)$$

$$u'_m \quad \text{ограничено в} \quad \mathbb{L}^2((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega)), \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u_m|^{q_3/2} u_m) \quad \text{ограничено в} \quad \mathbb{L}^2(Q), \quad Q \equiv (0, T) \times \Omega, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u_m|^{q_1/2} u_m) \quad \text{ограничено в} \quad \mathbb{L}^2(\tilde{Q}), \quad \tilde{Q} \equiv (0, T) \times \Gamma. \quad (2.26)$$

Кроме того, в силу поставленных условий на q_2

$$u_m^{q_2} u_m \quad \text{ограничено в} \quad \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbb{L}^{q'_2}(\Omega)), \quad q'_2 = \frac{q_2 + 2}{q_2 + 1}. \quad (2.27)$$

Из (2.21) следует, что существует подпоследовательность u_{m_l} последовательности u_m , $*$ -слабо сходящаяся к некоторому элементу $u \in \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega))$. Переобозначим u_{m_l} как u_m (для сокращения записей будем так поступать и в дальнейшем). Итак,

$$u_m \rightharpoonup u \quad * \text{-слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega)), \quad (2.28)$$

аналогично, из (2.24) получаем

$$u'_m \rightharpoonup v \quad \text{в} \quad \mathbb{L}^2((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega)). \quad (2.29)$$

Легко показать, что $u'(t) = v(t)$ для почти всех $t \in (0, T)$. В самом деле, из (2.28) следует, что $u'_m \rightharpoonup u'$ в $\mathcal{D}'([0, T]; \mathbb{H}^1(\Omega))$. С другой стороны, в силу (2.29) $u'_m \rightharpoonup v$ в $\mathcal{D}'([0, T]; \mathbb{H}^1(\Omega))$. Значит, $u' = v$ в смысле $\mathcal{D}'([0, T]; \mathbb{H}^1(\Omega))$. Из определения равенства элементов в пространстве обобщенных функций и полноты $\mathcal{D}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ в $\mathbb{L}^2((0, T); \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ следует $u'(t) - v(t) = 0$ для почти всех $t \in (0, T)$.

Таким образом, можем утверждать, что $u_m \rightharpoonup u$ в $\mathbb{H}^1(Q)$. В силу теоремы Реллиха–Кондрашева [4] имеет место компактное вложение $\mathbb{H}^1(Q) \Subset \mathbb{L}^2(Q)$. Стало быть, $u_m \rightarrow u$ в $\mathbb{L}^2(Q)$. Сильная сходимость последовательности u_m в $\mathbb{L}^2(Q)$ в свою очередь означает, что существует ее подпоследовательность (которую мы вновь обозначим как u_m), сходящаяся к u почти всюду в Q .

Из сходимости $u_m \rightarrow u$ почти всюду в Q и (2.22), (2.27) следуют соответственно утверждения

$$u_m^{q_3} u_m \rightharpoonup u^{q_3} u \quad * \text{-слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbb{L}^{q'_3}(\Omega)), \quad (2.30)$$

$$u_m^{q_2} u_m \rightharpoonup u^{q_2} u \quad * \text{-слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbb{L}^{q'_2}(\Omega)). \quad (2.31)$$

Далее, введенный выше оператор $\gamma_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^1(\Omega); \mathbb{L}^{q_1+2}(\Gamma))$ является компактным, следовательно, из $u_m \rightharpoonup u$ в $\mathbb{L}^2((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega))$ вытекает $\gamma_0 u_m \rightarrow \gamma_0 u$ в $\mathbb{L}^2((0, T); \mathbb{L}^{q_1+2}(\Gamma))$, т.е. $u_m \rightarrow u$ почти всюду в $\tilde{Q}$. Обращаясь теперь к (2.23), будем иметь

$$u_m^{q_1} u_m \rightharpoonup u^{q_1} u \quad * \text{-слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbb{L}^{q'_1}(\Gamma)). \quad (2.32)$$

В силу (2.25) и (2.26)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(|u_m|^{q_3/2}u_m) &\rightharpoonup v_1 && \text{в } \mathbb{L}^2(Q), \\ \frac{\partial}{\partial t}(|u_m|^{q_1/2}u_m) &\rightharpoonup v_2 && \text{в } \mathbb{L}^2(\tilde{Q}). \end{aligned}$$

Применив технику, использованную нами при доказательстве утверждения $u'_m \rightharpoonup u'$ в $\mathbb{L}^2((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega))$, несложно убедиться в том, что $v_1 = \partial/\partial t(|u|^{q_3/2}u)$, $v_2|_\Gamma = \partial/\partial t(|u|^{q_1/2}u)|_\Gamma$ почти для всех $t \in (0, T)$. Таким образом, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q_3/2}u) \in \mathbb{L}^2(Q), \quad \frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q_1/2}u) \in \mathbb{L}^2(\tilde{Q}).$$

Наконец, покажем, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u_m|^{q_3}u_m) \quad \text{ограничено в } \mathbb{L}^2((0, T); \mathbb{L}^{q'_3}(\Omega)), \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u_m|^{q_1}u_m) \quad \text{ограничено в } \mathbb{L}^2((0, T); \mathbb{L}^{q'_1}(\Gamma)). \quad (2.34)$$

В самом деле, справедливо

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \left(\int_\Omega dx (|u|^{q_3}|u'|)^{q'} \right)^{2/q'} &= \int_0^T dt \left(\int_\Omega dx (|u|^{q_3/2} \cdot |u|^{q_3/2}|u'|)^{q'} \right)^{2/q'_3} \\ &\leq \int_0^T dt \left(\int_\Omega dx |u|^{q'_3 p q_3/2} \right)^{2/(q'_3 p)} \int_0^T dt \left(\int_\Omega dx |u|^{q'_3 p' q_3/2} |u'|^{q'_3 p'} \right)^{2/(q'_3 p')}. \end{aligned}$$

Выбрав $p = 2(q_3 + 1)/q_3$, $p' = 2(q_3 + 1)/(q_3 + 2)$ и учитывая (2.22) и (2.25), получим (2.33). Совершенно аналогично с учетом (2.23) и (2.26) приходим к (2.34). Отметим, что (2.33) и (2.34) дают

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q_3}u) \in \mathbb{L}^2((0, T); \mathbb{L}^{q'_3}(\Omega)), \quad \frac{\partial}{\partial t}(|u|^{q_1}u) \in \mathbb{L}^2((0, T); \mathbb{L}^{q'_1}(\Gamma)).$$

Перейдем теперь к пределу в уравнении (2.3). Прежде всего перепишем условие (2.4) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_\Omega dx ((\nabla u_m, \nabla \omega_j) + u_m \omega_j + |u_m|^{q_3} u_m \omega_j) + \int_\Gamma ds |u_m|^{q_1} u_m \omega_j \right] \\ = \int_\Omega dx (|u_m|^{q_2} u_m \omega_j - (\nabla u_m, \nabla \omega_j)) - \int_\Gamma ds |u_m|^{q_1} u_m \omega_j, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} G[u, \eta](t) &\equiv \int_\Omega dx ((\nabla u, \nabla \eta) + u \eta + |u|^{q_3} u \eta) + \int_\Gamma ds |u|^{q_1} u \eta, \\ F[u, \eta](t) &\equiv \int_\Omega dx (|u|^{q_2} u \eta - (\nabla u, \nabla \eta)) - \int_\Gamma ds |u|^{q_1} u \eta. \end{aligned}$$

В силу (2.28), (2.31) и (2.32) имеем

$$F[u_m, \eta] \rightarrow F[u, \eta] \quad \text{для всех } \eta \in \mathbb{H}^1(\Omega),$$

где сходимость понимается в пространстве $\mathbb{L}^2((0, T))$. Учитывая тот факт, что $\{w_j\}$ – базис в $\mathbb{H}^1(\Omega)$, а также утверждения (2.24), (2.33) и (2.34), несложно убедиться в справедливости

$$\frac{d}{dt} G[u_m, \eta] \rightarrow F[u, \eta] \quad \text{для всех } \eta \in \mathbb{H}^1(\Omega) \quad (2.35)$$

в пространстве $\mathbb{L}^2((0, T))$. С другой стороны, из (2.28), (2.30) и (2.32) получаем

$$G[u_m, \eta] \rightharpoonup G[u, \eta] \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty((0, T)) \quad \text{для всех } \eta \in \mathbb{H}^1(\Omega),$$

следовательно,

$$\frac{d}{dt} G[u_m, \eta] \rightarrow \frac{d}{dt} G[u, \eta] \quad \text{для всех } \eta \in \mathbb{H}^1(\Omega) \quad (2.36)$$

в смысле $\mathcal{D}'([0, T])$. Сравнивая (2.35) с (2.36), неизбежно приходим к выводу, что

$$\text{для всех } \eta \in \mathbb{H}^1(\Omega) \quad \frac{d}{dt} G[u, \eta] = F[u, \eta] \quad \text{в смысле } \mathbb{L}^2((0, T)).$$

Последнее равенство и означает, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.2), т.е. является слабым обобщенным решением исходной задачи.

Итак, основным результатом данного пункта является

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\text{либо } N \leq 2, \quad \text{либо } q_1 \leq \frac{2}{N-2}, \quad q_2 \leq \frac{4}{N-2}, \quad q_3 \leq \frac{4}{N-2}.$$

Тогда найдется такое максимальное $T_0 = T_0(u_0, q_1, q_2, q_3) > 0$, что на любом интервале $(0, T)$, $T < T_0$, существует слабое обобщенное решение $u(x, t)$ задачи (1.3) с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, причем имеют место следующие включения:

$$\begin{aligned} |u|^{q_1} u &\in \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbb{L}^{q'_1}(\Gamma)), \quad |u|^{q_2} u \in \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbb{L}^{q'_2}(\Omega)), \quad |u|^{q_3} u \in \mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbb{L}^{q'_3}(\Omega)), \\ \frac{\partial}{\partial t} (|u|^{q_3/2} u) &\in \mathbb{L}^2(Q), \quad \frac{\partial}{\partial t} (|u|^{q_1/2} u) \in \mathbb{L}^2(\tilde{Q}), \\ \frac{\partial}{\partial t} (|u|^{q_3} u) &\in \mathbb{L}^2((0, T); \mathbb{L}^{q'_3}(\Omega)), \quad \frac{\partial}{\partial t} (|u|^{q_1} u) \in \mathbb{L}^2((0, T); \mathbb{L}^{q'_1}(\Gamma)), \end{aligned}$$

где введены обозначения $q'_i = (q_i + 2)/(q_i + 1)$, $Q = (0, T) \times \Omega$, $\tilde{Q} = (0, T) \times \Gamma$.

3. Единственность слабого обобщенного решения. Пусть $\bar{u}$ и $\bar{\bar{u}}$ – слабые обобщенные решения задачи (1.3), соответствующие одной начальной функции $u_0 \in \mathbb{H}^1(\Omega)$. Возьмем в равенстве (2.2) $\varphi(t) \equiv 1$. Тогда будем иметь равенство для почти всех t :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dx \left(\sum_{i=1}^N (w_{x_i} \eta_{x_i} + \omega \eta + (|\bar{u}|^{q_3} \bar{u} - |\bar{\bar{u}}|^{q_3} \bar{\bar{u}}) \eta) \right) + \int_{\Gamma} ds (|\bar{u}|^{q_1} \bar{u} - |\bar{\bar{u}}|^{q_1} \bar{\bar{u}}) \eta \\ = \int_0^t d\tau \left[\int_{\Omega} dx \left(\sum_{i=1}^N (w_{x_i} \eta_{x_i} + (|\bar{u}|^{q_2} \bar{u} - |\bar{\bar{u}}|^{q_2} \bar{\bar{u}}) \eta) \right) - \int_{\Gamma} ds (|\bar{u}|^{q_1} \bar{u} - |\bar{\bar{u}}|^{q_1} \bar{\bar{u}}) \eta \right], \end{aligned}$$

где введено обозначение $w \equiv \bar{u} - \bar{\bar{u}}$. Положим теперь $\eta = w(t)$. С учетом числовых неравенств

$$\begin{aligned} |\bar{u}|^q \bar{u} - |\bar{\bar{u}}|^q \bar{\bar{u}}| &\leq (q+1)(|\bar{u}|^q + |\bar{\bar{u}}|^q)|\bar{u} - \bar{\bar{u}}| \quad \text{при } q > 0, \\ |(|\bar{u}|^q \bar{u} - |\bar{\bar{u}}|^q \bar{\bar{u}})(\bar{u} - \bar{\bar{u}})| &\geq |\bar{u} - \bar{\bar{u}}|^{q+2} \quad \text{при } q > 0, \end{aligned}$$

в справедливости которых легко убедиться с помощью элементарных средств математического анализа, получаем

$$\begin{aligned} \|w\|_{+1}^2 + \|w\|_{q_3+2}^{q_3+2} &\leq \int_0^t d\tau \left[\|\nabla w\|_2(\tau) \|\nabla w\|_2(t) + \int_{\Omega} dx ((|\bar{u}|^{q_2} + |\bar{\bar{u}}|^{q_2})|w|)(\tau) |w|(t) \right] \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_{\Gamma} ds ((|\bar{u}|^{q_1} + |\bar{\bar{u}}|^{q_1})|w|)(\tau) |w|(t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Оценим с помощью неравенства Гёльдера [10] интегралы по пространственным переменным в правой части (3.1). Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dx ((|\bar{u}|^{q_2} + |\bar{\bar{u}}|^{q_2})|w|)(\tau) |w|(t) &\equiv \|((|\bar{u}|^{q_2} + |\bar{\bar{u}}|^{q_2})|w|)(\tau) |w|(t)\|_1 \\ &\leq \|(|\bar{u}|^{q_2} + |\bar{\bar{u}}|^{q_2})w\|_2(\tau) \|w\|_2(t) \leq \| |\bar{u}|^{q_2} + |\bar{\bar{u}}|^{q_2} \|_{2r/(r-2)}(\tau) \|w\|_r(\tau) \|w\|_2(t) \\ &\leq (\|\bar{u}\|_{q_2 r/(r-2)}^{q_2} + \|\bar{\bar{u}}\|_{q_2 r/(r-2)}^{q_2})(\tau) \|w\|_r(\tau) \|w\|_2(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Положим $r = 2N/(N-2)$, если $N \geq 3$, и r любое, если $N \leq 2$. Тогда согласно теореме вложения Соболева $\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^r(\Omega)$. Кроме того, если потребовать, чтобы $q_2 \leq 1/(N-2)$ при $N \geq 3$, будет иметь место $\mathbb{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q_2 r/(r-2)}(\Omega)$. В этом случае, учитывая класс гладкости решений $\bar{u}$ и $\bar{\bar{u}}$, приходим к оценке

$$\int_{\Omega} dx ((|\bar{u}|^{q_2} + |\bar{\bar{u}}|^{q_2})|w|)(\tau) |w|(t) \leq C \|w\|_{+1}(t) \|w\|_{+1}(\tau). \quad (3.3)$$

Аналогичным образом оценивается

$$\int_{\Gamma} ds ((|\bar{u}|^{q_1} + |\bar{\bar{u}}|^{q_1})|w|)(\tau) |w|(t).$$

Выписав цепочку неравенств, аналогичную (3.2), поставив условие $q_1 \leq 2/(N-2)$ при $N \geq 3$, и воспользовавшись теоремой о следах функций из класса Соболева [4], получим оценку

$$\int_{\Gamma} ds ((|\bar{u}|^{q_1} + |\bar{\bar{u}}|^{q_1})|w|)(\tau) |w|(t) \leq C \|w\|_{+1}(t) \|w\|_{+1}(\tau). \quad (3.4)$$

В силу (3.3) и (3.4) имеет место общая оценка

$$\|\nabla w\|_2^2(t) + \|w\|_{q_3+2}^{q_3+2}(t) \leq C \|w\|_{+1}(t) \int_0^t d\tau \|w\|_{+1}(\tau). \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует неравенство

$$\|w\|_{+1}(t) \leq C \int_0^t d\tau \|w\|_{+1}(\tau),$$

которое в силу леммы Гронуолла–Белмана–Бихари влечет $\|w\|_{+1} = 0$ почти всюду на временном интервале $(0, T)$, что означает единственность слабого обобщенного решения в классе гладкости $\mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega))$. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$\text{либо } N \leq 2, \quad \text{либо } q_1 \leq \frac{2}{N-2}, \quad q_2 \leq \frac{1}{N-2}.$$

Тогда слабое обобщенное решение класса задачи (1.3) на интервале $(0, T)$ с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ единственно.

4. Разрушение слабого обобщенного решения за конечный промежуток времени. Будем считать выполненными условия теоремы существования решения задачи (1.3). Получим условия, при которых решение задачи разрушается за конечный промежуток времени. Введем обозначения

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u\|_2^2 + \frac{q_3 + 1}{q_3 + 2} \|u\|_{q_3+2}^{q_3+2} + \frac{q_1 + 1}{q_1 + 2} \int_{\Gamma} ds |u|^{q_1+2}, \quad \Phi_0 \equiv \Phi(0). \quad (4.1)$$

Докажем, что имеет место предельное равенство

$$\Phi(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_m(t) \quad (4.2)$$

для всех $t \leq T$. Для этого, воспользовавшись формулами (2.6) и (2.8), запишем

$$\Phi'_m(t) + 2\Phi_m(t) = f_m(t), \quad (4.3)$$

где введено обозначение

$$f_m(t) \equiv \|u_m(t)\|_2^2 + \frac{2q_3 + 2}{q_3 + 2} \|u_m(t)\|_{q_3+2}^{q_3+2} + \|u_m(t)\|_{q_2+2}^{q_2+2} + \frac{q_1}{q_1 + 2} \int_{\Gamma} ds |u_m(t)|^{q_1+2}. \quad (4.4)$$

Равенство (4.3) можно рассматривать как линейное неоднородное уравнение 1-го порядка относительно $\Phi(t)$. Решение данного уравнения можно записать с помощью импульсной функции Коши в следующем виде:

$$\Phi_m(t) = \Phi_{m0} e^{-2t} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} f_m(\tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Рассмотрим теперь равенство (2.1) в определении слабого обобщенного решения исходной задачи, где переобозначим переменную интегрирования по времени как τ и подставим в это равенство функцию $v(x, \tau)$, определенную выражением

$$v(x, \tau) = \begin{cases} u(x, \tau), & 0 \leq \tau < t, \\ 0, & \tau \geq t. \end{cases}$$

Тогда после элементарных преобразований получим

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \int_0^t d\tau \left(\|u(\tau)\|_{q_2+2}^{q_2+2} - \|\nabla u(\tau)\|_2^2 - \int_{\Gamma} ds |u(\tau)|^{q_1+2} \right). \quad (4.6)$$

Заметим, что из (4.6) вытекает непрерывность функции $\Phi(t)$: в самом деле, в силу наложенных ограничений на q_1 , q_2 и принадлежности решения $u(x, t)$ классу $\mathbb{L}^\infty((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega))$ имеет место оценка

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left(\|u(\tau)\|_{q_2+2}^{q_2+2} - \|\nabla u(\tau)\|_2^2 - \int_{\Gamma} ds |u(\tau)|^{q_1+2} \right) \right| \leq C |t_2 - t_1|$$

для всех $t_1, t_2 \in [0, T]$,

из которой следует $|\Phi(t_2) - \Phi(t_1)| \leq C |t_2 - t_1|$.

Пользуясь (4.1) и (4.6), запишем следующее равенство:

$$\Phi(t) + 2 \int_0^t \Phi(\tau) d\tau = \Phi_0 + \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad (4.7)$$

где

$$f(t) \equiv \|u(t)\|_2^2 + \frac{2q_3 + 2}{q_3 + 2} \|u(t)\|_{q_3+2}^{q_3+2} + \|u(t)\|_{q_2+2}^{q_2+2} + \frac{q_1}{q_1 + 2} \int_{\Gamma} ds |u(t)|^{q_1+2}. \quad (4.8)$$

Равенство (4.7) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода относительно функции $\Phi(t)$. Данное интегральное уравнение имеет единственное решение в классе $\mathbb{C}([0, T])$, которое можно представить формулой

$$\Phi(t) = \Phi_0 e^{-2t} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (4.9)$$

Рассмотрим теперь выражения (4.4) и (4.8) для функций $f_m(t)$ и $f(t)$. Выше было показано (см. (2.28) и (2.29)), что $u_m \rightarrow u$ в $\mathbb{H}^1((0, T); \mathbb{H}^1(\Omega))$. Оператор вложения пространства $\mathbb{H}^1(\Omega)$ в $\mathbb{L}^2(\Omega)$ является вполне непрерывным. При наложенных ограничениях на q_1, q_2, q_3 операторы вложения пространства $\mathbb{H}^1(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$, $\mathbb{L}^{q_3+2}(\Omega)$ и оператор $\gamma_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^1(\Omega); \mathbb{L}^{q_1+2}(\Gamma))$ также являются вполне непрерывными. Тогда согласно лемме компактности Лионса [11] справедливо следующее утверждение:

$$u_m(t) \rightarrow u(t) \quad \text{в } \mathbb{L}^2(\Omega), \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega), \mathbb{L}^{q_3+2}(\Omega), \mathbb{L}^{q_1+2}(\Gamma) \\ \text{почти всюду на отрезке } [0, T].$$

Стало быть, $f_m(t) \rightarrow f(t)$ почти всюду на отрезке $[0, T]$. Далее, заметим, что, коль скоро $u_{0m} \rightarrow u_0$ в $\mathbb{H}^1(\Omega)$, имеет место $\Phi_{m0} \rightarrow \Phi_0$. Учитывая равномерную ограниченность последовательности $f_m(t)$ и применяя теорему Лебега [10], из выражений (4.5) и (4.9) для $\Phi_m(t)$ и $\Phi(t)$ получим искомое утверждение

$$\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(t) \quad \text{для всех } t \in [0, T].$$

Перейдем теперь непосредственно к выводу условий разрушения. Перепишем неравенство (2.11) в более точном виде:

$$\Phi_m(t) \leq \frac{1}{(\Phi_{m0}^{-q_2/2} - (q_2/2)\bar{C}t)^{2/q_2}}, \quad \bar{C} = 2^{(q_2+2)/2} C^{q_2+2}, \quad (4.10)$$

где C – константа наилучшего вложения $\mathbb{H}^1(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$. Из последовательности $\{\Phi_{m0}\}$ можно выделить либо монотонно невозрастающую, либо монотонно неубывающую подпоследовательность. Обозначим такую подпоследовательность вновь как $\{\Phi_{m0}\}$. Пусть $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$. Обозначим $\{\Phi_{m0}^{(n)}\}$ – последовательность, полученная из $\{\Phi_{m0}\}$ путем вычеркивания первых n ее членов. Неравенство (4.10) имеет место для всех элементов $\{\Phi_{m0}^{(n)}\}$ на интервале $t \in [0, T_1^{(n)})$, где $T_1^{(n)} = 2\Phi_{m0}^{-q_2/2}/q_2\bar{C}$. Следовательно, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, с учетом (4.2) получим

$$\Phi(t) \leq \frac{1}{(\Phi_0^{-q_2/2} - (q_2/2)\bar{C}t)^{2/q_2}} \quad \text{при } t \in [0, T_1^{(n)}). \quad (4.11)$$

Перейдем теперь к пределу при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $T_1^{(n)} \uparrow T_1 \equiv 2\Phi_0^{-q_2/2}/q_2\bar{C}$, оценка (4.11) справедлива на интервале $t \in [0, T_1)$. Далее, если имеет место $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$, справедливость неравенства (4.10) для всех m на интервале $t \in [0, T_1)$ очевидна, а, значит, на указанном интервале имеет место оценка (4.11).

Выведем теперь оценку сверху на время разрушения решения. Для этого необходимо получить оценки снизу на функции $\Phi_m(t)$. В силу неравенств [10]

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dx (\nabla u_m, \nabla u'_m) &\leq \|\nabla u_m\|_2 \|\nabla u'_m\|_2, \\ \int_{\Omega} dx u_m u'_m &\leq \|u_m\|_2 \|u'_m\|_2, \\ \int_{\Omega} dx |u_m|^{q_3} u_m u'_m &\leq \left(\int_{\Omega} dx |u_m|^{q_3} (u'_m)^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} dx |u_m|^{q_3+2} \right)^{1/2}, \\ \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1} u_m u'_m &\leq \left(\int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1} (u'_m)^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1+2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

имеет место оценка

$$\begin{aligned} |\Phi'_m(t)| &\leq \|\nabla u_m\|_2 \|\nabla u'_m\|_2 + \|u_m\|_2 \|u'_m\|_2 \\ &\quad + (q_3 + 1) \left(\int_{\Omega} dx |u_m|^{q_3} (u'_m)^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} dx |u_m|^{q_3+2} \right)^{1/2} \\ &\quad + (q_1 + 1) \left(\int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1} (u'_m)^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1+2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Далее, заметим, что

$$\begin{aligned} \Phi_m J_m &= \left(\frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u_m\|_2^2 + \frac{q_3 + 1}{q_3 + 2} \|u_m\|_{q_3+2}^{q_3+2} + \frac{q_1 + 1}{q_1 + 2} \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1+2} \right) \\ &\quad \times \left(\|\nabla u'_m\|_2^2 + \|u'_m\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + (q_3 + 1) \int_{\Omega} dx |u_m|^{q_3} (u'_m)^2 + (q_1 + 1) \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1} (u'_m)^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{\max\{q_1, q_3\} + 2} \\ &\quad \times \left(\|\nabla u_m\|_2^2 + \|u_m\|_2^2 + (q_3 + 1) \|u_m\|_{q_3+2}^{q_3+2} + (q_1 + 1) \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1+2} \right) \\ &\quad \times \left(\|\nabla u'_m\|_2^2 + \|u'_m\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + (q_3 + 1) \int_{\Omega} dx |u_m|^{q_3} (u'_m)^2 + (q_1 + 1) \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1} (u'_m)^2 \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из (4.12), (4.13) и числового неравенства

$$(ab + cd + ef + gh)^2 \leq (a^2 + c^2 + e^2 + g^2)(b^2 + d^2 + f^2 + h^2)$$

следует неравенство

$$(\Phi'_m(t))^2 \leq (\max\{q_1, q_3\} + 2) \Phi_m(t) J_m(t). \quad (4.14)$$

Из (2.9) следует, что

$$\begin{aligned} J_m(t) = & \frac{1}{q_2 + 2} \frac{d}{dt} \left[\|u_m\|_{q_2+2}^{q_2+2} - \|\nabla u_m\|_2^2 - \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1+2} \right] \\ & - \frac{q_1}{2(q_1 + 2)} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{q_1 - q_2}{(q_1 + 2)(q_2 + 2)} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1+2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Справедливы следующие вспомогательные оценки:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|_2^2 \right| & \leq 2 \left(\int_{\Omega} dx |\nabla u_m|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} dx |\nabla u'_m|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \varepsilon_1 \|\nabla u'_m\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} \|\nabla u_m\|_2^2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1+2} \right| & \leq (q_1 + 2) \left(\int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1} (u'_m)^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1+2} \right)^{1/2} \\ & \leq (q_1 + 2) \left[\frac{\varepsilon_2}{2} \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1} (u'_m)^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1+2} \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\|\nabla u_m\|_2^2 \leq 2\Phi_m(t), \quad \|\nabla u'_m\|_2^2 \leq J_m(t), \quad (4.18)$$

$$\int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1+2} \leq \frac{q_1 + 2}{q_1 + 1} \Phi(t), \quad \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1} (u'_m)^2 \leq \frac{1}{q_1 + 1} J_m(t). \quad (4.19)$$

Подставляя (4.16), (4.17), (4.18), (4.19) в (4.15), учитывая (2.8) и положив $\varepsilon_1 = \varepsilon(q_1 + 2)/q_1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon(q_2 + 2)(q_1 + 1)/|q_1 - q_2|$, придем к следующей оценке для $J_m(t)$:

$$(1 - \varepsilon)J_m \leq \frac{1}{q_2 + 2} \Phi_m'' + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{q_1^2}{(q_1 + 2)^2} + \frac{|q_1 - q_2|^2(q_1 + 2)}{(q_1 + 1)^2(q_2 + 2)^2} \right) \Phi_m \quad (4.20)$$

Неравенство (4.20) с учетом (4.14) сводится к обыкновенному дифференциальному неравенству

$$\Phi_m \Phi_m'' - \alpha (\Phi_m')^2 + \beta \Phi_m^2 \geq 0,$$

в котором введены обозначения

$$\alpha = \frac{(1 - \varepsilon)(q_2 + 2)}{\max\{q_1, q_3\} + 2}, \quad \beta = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{q_1^2}{q_1 + 2} + \frac{|q_1 - q_2|^2(q_1 + 2)}{(q_1 + 1)^2(q_2 + 2)} \right). \quad (4.21)$$

Потребуем, чтобы коэффициенты q_1, q_2, q_3 удовлетворяли условию $q_2 > \max\{q_1, q_3\}$. В этом случае можно выбрать ε таким образом, чтобы $\alpha > 1$. Введем функцию [1] $Z_m(t) = \Phi_m^{1-\alpha}$. Для этой функции будет выполняться неравенство

$$Z_m'' - (\alpha - 1)\beta Z_m \leq 0. \quad (4.22)$$

Покажем, что при определенных условиях $Z_m'(t) \leq 0$ при всех $t > 0$. В самом деле, поскольку $J_m(t) \geq 0$, то из (2.9) вытекает, что при условии

$$\frac{1}{q_2 + 2} \|u_{0m}\|_{q_2+2}^{q_2+2} - \frac{1}{2} \|\nabla u_{0m}\|_2^2 - \frac{1}{q_1 + 2} \int_{\Gamma} ds |u_{0m}|^{q_1+2} \geq 0 \quad (4.23)$$

имеет место

$$\frac{1}{q_2 + 2} \|u_m\|_{q_2+2}^{q_2+2} - \frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 - \frac{1}{q_1 + 2} \int_{\Gamma} ds |u_m|^{q_1+2} \geq 0 \quad \text{для всех } t > 0.$$

Тогда из (2.8) следует $\Phi'_m(t) \geq 0$ при всех $t > 0$, что дает $Z'_m(t) \leq 0$ при всех $t > 0$. Таким образом, при выполнении условия (4.23) из (4.22) получим

$$Z''_m Z'_m - (\alpha - 1) \beta Z_m Z'_m \geq 0.$$

Интегрируя последнее неравенство по dt , будем иметь

$$(Z'_m)^2 - (\alpha - 1) \beta Z_m^2 \geq A_m, \quad (4.24)$$

где

$$A_m \equiv (Z'_{m0})^2 - (\alpha - 1) \beta Z_{m0}^2 = (\alpha - 1) \Phi_{m0}^{-2\alpha} [(\alpha - 1) (\Phi'_{m0})^2 - \beta \Phi_{m0}^2].$$

Если $A_m > 0$, то из (4.24) следует, что $(Z'_m)^2 \geq A_m$. Так как при условии (4.23) $Z'_m \leq 0$, мы имеем

$$Z_m(t) \leq Z_{m0} - t \sqrt{A_m}.$$

Выразив в последнем неравенстве Z_m и A_m через Φ_m и Φ_{m0} , придем к оценке снизу для функции $\Phi_m(t)$:

$$\Phi_m(t) \geq \frac{\Phi_{m0}}{(1 - F_m t)^{\alpha-1}}, \quad \text{где } F_m = \Phi_{m0}^{-1} (\alpha - 1)^{1/2} [(\alpha - 1) (\Phi'_{m0})^2 - \beta \Phi_{m0}^2]^{1/2}. \quad (4.25)$$

Последовательность $u_{0m} \rightarrow u_0$ в $\mathbb{H}^1(\Omega)$, стало быть, в силу (2.6) и (2.8)

$$\Phi_{m0} \rightarrow \Phi_0, \quad \Phi'_{m0} \rightarrow \Phi'_0 \equiv \|u_0\|_{q_2+2}^{q_2+2} - \|\nabla u_0\|_2^2 - \int_{\Gamma} ds |u_0|^{q_1+2}.$$

Значит, имеет место

$$F_m \rightarrow F \equiv \Phi_0^{-1} (\alpha - 1)^{1/2} [(\alpha - 1) (\Phi'_0)^2 - \beta \Phi_0^2]^{1/2}.$$

Из последовательности $\{F_m\}$ можно выделить либо монотонно невозрастающую, либо монотонно неубывающую подпоследовательность. Будем обозначать такую подпоследовательность вновь как $\{F_m\}$. Пусть $F_m \uparrow F$. Тогда оценка (4.25) справедлива для всех m на интервале $t \in [0, \sup\{F_m\})$. Поэтому мы можем перейти в (4.25) к пределу при $m \rightarrow \infty$. Коль скоро $\sup\{F_m\} = F$, получаем

$$\Phi(t) \geq \frac{\Phi_0}{(1 - Ft)^{\alpha-1}}, \quad t \in \left[0, \frac{1}{F}\right),$$

откуда следует, что слабое обобщенное решение задачи (1.3) разрушается за конечное время $T_0 \leq 1/F$ (т.е. $\limsup_{t \rightarrow T_0} \Phi(t) = \infty$).

Пусть теперь $F_m \downarrow F$. Обозначим через $\{F_m^{(n)}\}$ подпоследовательность, полученную из $\{F_m\}$ путем вычеркивания первых n членов. Неравенство (4.25), очевидно, справедливо для всех m на интервале $t \in [0, 1/F_n)$. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\Phi(t) \geq \frac{\Phi_0}{(1 - Ft)^{\alpha-1}}, \quad t \in \left[0, \frac{1}{F_n}\right).$$

Коль скоро $1/F_n \uparrow 1/F$, справедливо утверждение

$$\text{для всех } \{t_n\} \rightarrow \frac{1}{F} \quad \text{выполнено} \quad \Phi(t_n) \rightarrow \infty.$$

Это в свою очередь также означает, что решение задачи (1.3) разрушается за конечное время $T_0 \leq 1/F$.

Заметим наконец, что при выборе

$$\varepsilon = \frac{q_2 - \max\{q_1, q_3\}}{2q_2 + 4} \quad (4.26)$$

(т.е. когда достигается максимум выражения $(\alpha - 1)/\beta$), класс функций u_0 , удовлетворяющих условию $F > 0$, является максимально широким. Сформулируем основной результат данного пункта в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $q_2 < 4/(N - 1)$ при $N \geq 3$, $q_2 > \max\{q_1, q_3\}$ и $\Phi'_0 > \sqrt{\beta/(\alpha - 1)} \Phi_0$, где

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{q_3 + 1}{q_3 + 2} \|u_0\|_{q_3+2}^{q_3+2} + \frac{q_1 + 1}{q_1 + 2} \int_{\Gamma} ds |u_0|^{q_1+2}, \\ \Phi'_0 &= \frac{1}{q_2 + 2} \|u_0\|_{q_2+2}^{q_2+2} - \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{1}{q_1 + 2} \int_{\Gamma} ds |u_0|^{q_1+2}, \end{aligned}$$

постоянные α и β определены в (4.21), а ε – в (4.26). Тогда существует слабое обобщенное решение задачи (1.3) с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x) \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ на интервале $t \in (0, T)$ при любом $T < T_0 < \infty$; при этом при $t \uparrow T_0$ происходит разрушение решения и имеет место двусторонняя оценка

$$T_1 \equiv \frac{2\Phi_0^{-q_2/2}}{q_2 \bar{C}} \leq T_0 \leq T_2 \equiv \Phi_0(\alpha - 1)^{-1/2} [(\alpha - 1)(\Phi'_0)^2 - \beta\Phi_0^2]^{-1/2},$$

где $\bar{C} = 2^{(q_2+2)/2} C^{q_2+2}$, а C – константа наилучшего вложения $\mathbb{H}^1(\Omega)$ в $\mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$.

В заключение автор выражает благодарность сотруднику физического факультета МГУ доктору физико-математических наук Корпусову Максиму Олеговичу за ценные замечания, существенно ускорившие подготовку данной публикации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Наука, М., 2007.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1992.
- [3] В. Л. Бонч-Бруевич, С. Г. Калашников, *Физика полупроводников*, Наука, М., 1990.
- [4] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, *Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных*, Наука, М., 2008.
- [5] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [6] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Т. 1, Мир, М., 1971.
- [7] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр 2. Линейная алгебра*, Наука, М., 1986.

- [8] И. Г. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1970.
- [9] В. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967.
- [10] М. И. Дьяченко, П. Л. Уल्याнов, *Мера и интеграл*, Факториал, М., 1998.
- [11] М. О. Корпусов, *Разрушение в неклассических волновых уравнениях*, УРСС, М., 2010.

П. А. Макаров

Научно-исследовательский институт приборостроения

им. В. В. Тихомирова

E-mail: palmakarov@gmail.com

Поступило

07.10.2010