Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аристов, О начально-краевой задаче для одного нелинейного уравнения соболевского типа, содержащего переменный коэффициент, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 5, 643–653

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9018>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:01:11

О начально-краевой задаче для одного нелинейного уравнения соболевского типа, содержащего переменный коэффициент

А. И. Аристов

В статье исследована начально-краевая задача для одного нелинейного уравнения соболевского типа, содержащего переменный коэффициент. Получены достаточные условия как для глобальной, так и для локальной по времени разрешимости. В случае локальной (но не глобальной) разрешимости найдены верхние и нижние оценки времени существования решения в виде явных и квадратурных формул.

Библиография: 5 названий.

1. Предварительные рассуждения. Работа посвящена изучению следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^q u) + b\Delta u - au + \mu(x, t)|u|^r u = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь u – действительная функция от времени $t > 0$ и вектора пространственных переменных $x \in \Omega$, где Ω – ограниченное подмножество $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega \in C^{(2, \delta)}$, $\delta \in (0; 1]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $q \in [1; 4]$, $r \in (0; 2]$, $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-r)}(\Omega))$ (смысл параметра $T > 0$ поясним позже), $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как $6/(2-r) > 4$ при $r \in (0; 2]$, из условия $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-r)}(\Omega))$ следует, что $\mu(x, t) \in C[0; T; L_4(\Omega))$. В дальнейшем это свойство будет использоваться.

Систематическое изучение неклассических уравнений в частных производных, т.е. не являющихся уравнениями типа Коши–Ковалевской, началось в середине XX в. Одним из первых трудов, посвященных неклассическим уравнениям, стала работа Соболева, опубликованная в 1954 г. [1]. В ней было выведено уравнение, описывающее малые колебания во вращающейся жидкости.

В [2] дано систематическое изложение методов функционального анализа, используемых для исследования уравнений в частных производных. Значительное внимание уделено соболевским уравнениям.

В данной работе получают развитие идеи, использовавшиеся в [3; с. 422–433] для изучения обобщенного уравнения Буссинеска:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^q u) + \Delta u + u(u + \alpha)(u - \beta) = 0.$$

В [3] была рассмотрена начально-краевая задача для этого уравнения, исследована ее глобальная и локальная по времени разрешимость, для случая локальной разрешимости найдены в виде явных формул двусторонние оценки времени разрушения решения.

В [4] и [5] были рассмотрены аналогичные задачи соответственно для уравнения вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + a(\Delta u - u) + F(u) = 0,$$

где в качестве $F(u)$ были рассмотрены нелинейности с постоянными коэффициентами вида $\mu u^3 + (\lambda, \nabla)u^2$ и $\mu|u|^\sigma u$, и для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\lambda, \nabla)u^2 + \mu(x)|u|^\sigma u = 0.$$

В данной работе введено определение обобщенного решения задачи (1), исследована однозначная обобщенная разрешимость глобально и локально по времени, найдены оценки времени существования решения в виде явных и квадратурных формул.

Введем классы

$$X_T = C^1[0; T; H_0^1(\Omega)), \quad 0 < T \leq \infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обобщенным решением задачи (1) будем называть такое $u \in X_T$, что

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u - |u|^q u) + b\Delta u - au + \mu|u|^r u, w \right\rangle = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (2)$$

для всех $w \in H_0^1(\Omega)$ и $t \in [0; T)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-r)}(\Omega))$ обеспечивает и принадлежность слагаемого $\mu|u|^r$ множеству $L_2(\Omega)$ и, следовательно, корректность сформулированного определения. Действительно, возьмем такие положительные α и β , что $1/\alpha + 1/\beta = 1$, и оценим это слагаемое с помощью неравенства Гёльдера и теоремы вложения:

$$\|\mu|u|^r u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \left(\int_{\Omega} |\mu|^{2\alpha} dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_{\Omega} |u|^{2(r+1)\beta} dx \right)^{1/\beta} \leq \|\mu\|_{L_{2\alpha}(\Omega)}^2 \cdot C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(r+1)}.$$

Применимость теоремы вложения обеспечивается условием

$$2(r+2)\beta \leq 6 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\alpha \geq \frac{6}{2-r}.$$

Так как $L_{\alpha_1}(\Omega) \subseteq L_{\alpha_2}(\Omega)$ при $\alpha_1 > \alpha_2$, наиболее слабым допустимым условием относительно $\mu(\cdot)$ будет $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-r)}(\Omega))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что обобщенное решение задачи (1) *разрушается за конечное время*, если эта задача имеет решение $u \in X_T$ при некотором конечном $T > 0$, но не имеет решения из класса X_∞ . В частности, говорят, что решение *разрушается путем опрокидывания*, если $\lim_{t \rightarrow T-} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty$.

Введем необходимые обозначения:

$$\begin{aligned} L_p &= L_p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty, & H_0^1 &= H_0^1(\Omega), & H^{-1} &= H^{-1}(\Omega), \\ \|\cdot\| &= \|\cdot\|_{L_2}, & \|\cdot\|_{+1} &= \|\cdot\|_{H_0^1}, & \|\cdot\|_{-1} &= \|\cdot\|_{H^{-1}}, \\ \Phi &= \frac{\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2}{2} + \frac{(q+1)\|u\|_{L_{q+2}}^{q+2}}{q+2}. \end{aligned}$$

Штрихом будем обозначать производную по времени. Положим

$$W = \|u'\|^2 + \|\nabla u'\|^2 + (q+1) \int_{\Omega} |u|^q u'^2 dx.$$

Под нижним индексом “0” будем подразумевать, что выражение рассматривается при $t = 0$ (если не будет оговорено противное). Пусть C_p – оптимальная константа вложения H_0^1 в L_p (если существует), т.е.

$$C_p = \inf\{C \mid \|w\|_{L_p} \leq C\|w\|_{H_0^1} \text{ для всех } w \in H_0^1\}.$$

Через C будем обозначать положительные постоянные, возможно, различные.

Полагая в (2) $w = u$ и $w = u'$, после интегрирования по частям получим соответственно I и II энергетические тождества:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \Phi' &= -b\|\nabla u\|^2 - a\|u\|^2 + \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx, \\ \text{II)} \quad W &= -\frac{b}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 - \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \int_{\Omega} \mu |u|^r u u' dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти тождества будут использоваться для вывода оценок для параметра T .

ЗАМЕЧАНИЕ. Φ'_0 можно однозначно выразить через u_0 с помощью I энергетического равенства. Очевидно, и Φ_0 однозначно определяется начальными данными. Поэтому в дальнейшем будем считать величины Φ_0 и Φ'_0 данными.

2. Существование и единственность.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $q \in [1; 4]$, $r \in (0; 2]$, $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-r)})$. Тогда для любого $u_0(x) \in H_0^1$ найдется $T > 0$ (возможно, $T = \infty$), для которого существует единственное обобщенное решение задачи (1). При этом если $T < \infty$, то $\lim_{t \rightarrow T-} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty$, т.е. имеет место опрокидывание решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие операторы:

$$A_1 u = u - \Delta u, \quad A_2 u = |u|^q u, \quad Au = A_1 u + A_2 u, \quad Lu = -\Delta u, \quad Fu = \mu(x, t) |u|^r u.$$

С помощью неравенства Гёльдера и теоремы вложения H_0^1 в L_p можно доказать, что

$$\|Fu_1 - Fu_2\|_{-1} \leq C\|\mu\|_{L_4} \max^r(\|u_1\|_{+1}, \|u_2\|_{+1}) \|u_1 - u_2\|_{+1} \quad \text{для всех } u_{1,2} \in H_0^1.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle \\ &= \|u_1 - u_2\|^2 + \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|^2 + \int_{\Omega} (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2)(u_1 - u_2) dx \\ &\geq \|u_1 - u_2\|_{+1}^2. \end{aligned}$$

Значит, существует липшиц-непрерывный обратный оператор $A^{-1}: H^{-1} \rightarrow H_0^1$ с постоянной Липшица, равной единице. Поэтому можно сделать замену переменных $w = Au$ и после этой замены исследовать разрешимость задачи в классе $C^1[0; T; H^{-1}]$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -bLA^{-1}w - aA^{-1}w + FA^{-1}w, \quad w|_{t=0} = w_0 \equiv Au_0, \quad w \in C^1[0; T; H^{-1}].$$

Проинтегрируем уравнение от 0 до t с учетом начальных условий:

$$w = Hw \equiv w_0 + \int_0^t (-bLA^{-1}w - aA^{-1}w + FA^{-1}w) d\tau. \quad (4)$$

Докажем однозначную разрешимость уравнения (4) с помощью принципа сжимающих отображений. Рассмотрим пространство $L_{\infty}[0; T; H^{-1})$ и следующий шар в нем:

$$B_{\rho} = \{v \in L_{\infty}[0; T; H^{-1}) \mid \|v\|_T \equiv \|\|v\|_{-1}\|_{L_{\infty}[0; T]} \leq \rho\}.$$

Достаточно доказать, что оператор H переводит B_{ρ} в себя и является сжимающим.

С помощью оценки $\|A^{-1}w\|_{-1} \leq \|w\|_{+1}$ и неравенства

$$\|Hw\|_T \leq \|w_0\|_{-1} + \left\| \int_0^t (-bLA^{-1}w - aA^{-1}w + FA^{-1}w) d\tau \right\|_T$$

получим, что при $w \in B_{\rho}$

$$\|Hw\|_T \leq \|w_0\|_{-1} + CT\rho + C' \int_0^T \|\mu\|_{L_4} d\tau \cdot \rho^{r+1}, \quad C, C' > 0.$$

Пусть ρ достаточно велико, т.е. $\|w_0\|_{-1} \leq \rho/3$. Пусть T достаточно мало, т.е.

$$CT \leq \frac{1}{3}, \quad \int_0^T \|\mu\|_{L_4} d\tau \leq (3C'\rho^r)^{-1}.$$

Тогда $\|Hw\|_T \leq \rho/3 + \rho/3 + \rho/3 = \rho$, а следовательно, H переводит B_{ρ} в себя. Аналогично можно доказать, что этот оператор является сжимающим. Значит, уравнение (4) однозначно разрешимо в классе $L_{\infty}[0; T; H^{-1})$. Как и в [3], применим стандартный алгоритм продолжения решений интегральных уравнений с переменным верхним пределом. Получим, что существует некоторое максимальное значение T , возможно, бесконечное, причем если $T < \infty$, то $\limsup_{t \rightarrow T} \|w\|_{-1} = \infty$.

Оператор H является сглаживающим, т.е. переводит $L_{\infty}[0; T; H^{-1})$ в $AC_{\infty}[0; T; H^{-1})$, а это множество – в $C^1[0; T; H^{-1})$.

Таким образом, задача сводится к уравнению $Au = w$, где $w \in C^1[0; T; H^{-1})$. В [3; с. 425–428] показано, что это уравнение имеет единственное решение $u \in C^1[0; T; H_0^1)$, причем если $T < \infty$, то имеет место опрокидывание решения. Теорема доказана.

В дальнейшем будем рассматривать решения задачи (1), соответствующие нетривиальным начальным данным.

3. Оценки времени существования решения.

ЛЕММА 1. Если $\nu(x) \in L_4$, $w(x) \in H_0^1$, то

$$\left| \int_{\Omega} \nu |w|^{r+2} dx \right| \leq C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\nu\|_{L_4} \|\nabla w\|^{r+2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nu |w|^{r+2} dx \right| &\leq \sqrt{\int_{\Omega} \nu^2 w^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega} |w|^{2r+2} dx} \leq \sqrt[4]{\int_{\Omega} \nu^4 dx} \sqrt{\int_{\Omega} w^4 dx} \|w\|_{L_{2r+2}}^{r+1} \\ &= \|\nu\|_{L_4} \|w\|_{L_4} \|w\|_{L_{2r+2}}^{r+1} \leq \|\nu\|_{L_4} \cdot C_4 \|\nabla w\|_{L_2} \cdot C_{2r+2}^{r+1} \|\nabla w\|_{L_2}^{r+1} \\ &= C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\nu\|_{L_4} \|\nabla w\|^{r+2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Имеем $\Phi'^2 \leq (q+2)\Phi W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $y_k = \partial u / \partial x_k$, $k \in \{1, 2, 3\}$,

$$R_1 = \sqrt{q+1} \cdot \|u\|_{L_{q+2}}^{q/2+1}, \quad R_2 = \sqrt{q+1} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} |u|^q |u'|^2 dx}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (q+2)\Phi &= \left(1 + \frac{q}{2}\right) \|u\|^2 + \left(1 + \frac{q}{2}\right) \sum_{k=1}^3 \|y_k\|^2 + R_1^2, \\ W &= \|u'\|^2 + \sum_{k=1}^3 \|y'_k\|^2 + R_2^2. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\Phi' = \int_{\Omega} uu' dx + \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} y_k y'_k dx + (q+1) \int_{\Omega} |u|^q uu' dx.$$

Из неравенств Коши–Буняковского–Шварца вытекают следующие оценки. Во-первых,

$$|\Phi'| \leq \|u\| \|u'\| + \sum_{k=1}^3 \|y_k\| \|y'_k\| + R_1 R_2,$$

во-вторых,

$$\begin{aligned} (q+2)\Phi W &\geq \left(\|u\|^2 + \sum_{k=1}^3 \|y_k\|^2 + R_1^2 \right) \left(\|u'\|^2 + \sum_{k=1}^3 \|y'_k\|^2 + R_2^2 \right) \\ &\geq \left(\|u\| \|u'\| + \sum_{k=1}^3 \|y_k\| \|y'_k\| + R_1 R_2 \right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi'^2 \leq (q+2)\Phi W$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $q \in [1; 4]$, $r \in (0; 2]$, $\mu(x, t) \in C[0; T; L_4]$. Положим $J = (2\Phi_0)^{-r/2} / (C_4 C_{2r+2}^{r+1})$, $k = |\min(a, b, 0)|$.

1) Если $\mu(x, t) \leq 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t , то обобщенное решение задачи (1) существует глобально по времени.

2) Если $q \geq 2r$, то обобщенное решение задачи (1) существует глобально по времени.

3) Если

$$\int_0^t \|\mu\|_{L_4} e^{rk\tau} d\tau < J \quad (5)$$

при всех конечных t , то обобщенное решение задачи (1) существует глобально по времени.

4) Пусть уравнение

$$\int_0^t \|\mu\|_{L_4} e^{rk\tau} d\tau = J \quad (6)$$

имеет корень $t = T_1 > 0$ (если положительных корней более одного, то T_1 — наименьший из них). Тогда для параметра T имеет место оценка $T \geq T_1$, т.е. обобщенное решение задачи (1) гарантированно существует в классе $X_{T_1} \equiv C^1[0; T_1; H_0^1]$.

В частности, если μ зависит только от x , то T_1 имеет явное выражение:

$$T_1 = \begin{cases} \frac{1}{rk} \ln \left(1 + \frac{rkJ}{\|\mu\|_{L_4}} \right), & k > 0, \\ \frac{J}{\|\mu\|_{L_4}}, & k = 0. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как уже отмечалось, условие $\mu(x, t) \in C[0; T; L_4(\Omega))$ следует из условия $\mu(x, t) \in C[0; T; L_{6/(2-r)}(\Omega))$, для которого была сформулирована теорема об однозначной разрешимости.

ЗАМЕЧАНИЕ. В теореме пункт 4 не противоречит пунктам 1 и 2, устанавливающим глобальную разрешимость, поскольку в нем утверждается только существование обобщенного решения, по крайней мере, в классе X_{T_1} ; при этом не исключается, что величина T может быть бесконечной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся I энергетическим равенством (3):

$$\Phi' = -b\|\nabla u\|^2 - a\|u\|^2 + \int_{\Omega} \mu|u|^{r+2} dx. \quad (7)$$

Заметим, что

$$-b\|\nabla u\|^2 - a\|u\|^2 \leq |\min(a, b, 0)|(\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2) \leq 2k\Phi.$$

Достаточное условие существования обобщенного решения глобально по времени, указанное в пункте 1, можно обосновать непосредственно с помощью равенства (7). Пусть $\mu(x, t) \leq 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t . Тогда из (7) следует, что

$$\Phi' \leq 2k\Phi,$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(e^{-2kt}\Phi) \leq 0.$$

Интегрируя это неравенство от 0 до t , получим, что

$$e^{-2kt}\Phi - \Phi_0 \leq 0,$$

а значит, $\Phi \leq \Phi_0 e^{2kt} < \infty$ при всех конечных t . Следовательно, разрушения решения не происходит.

Докажем утверждение пункта 2.

Из доказательства леммы 1 видно, что

$$\left| \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx \right| \leq \|\mu\|_{L_4} \|u\|_{L_4} \|u\|_{L_{2r+2}}^{r+1}.$$

Так как из условий данного пункта следует, что $q+2 \geq 2r+2$ и $q+2 > 4$, то существует такая постоянная γ , что

$$\|u\|_{L_4} \|u\|_{L_{2r+2}}^{r+1} \leq \gamma \|u\|_{L_{q+2}}^{r+2} \leq \gamma \left(\frac{q+2}{q+1} \right)^{(r+2)/(q+2)} \cdot \Phi^{(r+2)/(q+2)}.$$

Полагая

$$m(t) = \gamma \left(\frac{q+2}{q+1} \right)^{(r+2)/(q+2)} \|\mu\|_{L_4},$$

получим

$$\left| \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx \right| \leq m(t) \cdot \Phi^{(r+2)/(q+2)}.$$

Кроме того, воспользовавшись неравенством Гёльдера, получим, что

$$m(t) \cdot \Phi^{(r+2)/(q+2)} \leq \frac{q-r}{q+2} \cdot m^{(q+2)/(q-r)} + \frac{r+2}{q+2} \cdot \Phi^1.$$

Поэтому из (7) следует, что

$$\Phi' \leq A\Phi + B(t), \quad A = 2k + \frac{r+2}{q+2}, \quad B(t) = \frac{q-r}{q+2} \cdot m^{(q+2)/(q-r)}(t),$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(\Phi e^{-At}) \leq B(t)e^{-At}.$$

После интегрирования этого неравенства от 0 до t придем к следующей оценке:

$$\Phi \leq \Phi_0 e^{At} + e^{At} \int_0^t B(\tau) e^{-A\tau} d\tau < \infty \quad \text{для всех } t < \infty.$$

Значит, решение существует глобально по времени.

Перейдем к обоснованию пунктов 3 и 4 теоремы.

Интеграл в (7) оценим с помощью леммы 1. Имеем

$$\Phi' \leq 2k\Phi + 2^{r/2+1} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4} \Phi^{r/2+1}.$$

Обозначим $g(t) = 2^{r/2} C_4 C_{2r+2}^{r+1} \|\mu\|_{L_4}$. Тогда

$$-\frac{2}{r} \frac{d}{dt} \Phi^{-r/2} \leq 2k \Phi^{-r/2} + 2g(t).$$

Положим $y = \Phi^{-r/2}$. Тогда неравенство легко привести к следующему виду:

$$y' + rky + rg(t) \geq 0 \iff \frac{d}{dt}(ye^{rkt}) + rg(t)e^{rkt} \geq 0.$$

Проинтегрировав левую и правую части неравенства от 0 до t , получим

$$ye^{rkt} - y_0 + \int_0^t rg(\tau)e^{rk\tau} d\tau \geq 0,$$

откуда

$$\Phi^{-r/2} \geq \left(\Phi_0^{-r/2} - r \int_0^t g(\tau)e^{rk\tau} d\tau \right) / e^{rkt}.$$

В этом неравенстве левая и правая части положительны в некоторой окрестности нуля, поэтому их можно возвести в степень $-2/r$:

$$\Phi \leq e^{2kt} \left(\Phi_0^{-r/2} - r \int_0^t g(\tau)e^{rk\tau} d\tau \right)^{-2/r}.$$

Таким образом, если выполняется условие (5), равносильное положительности выражения в скобках при всех конечных t , то величина Φ может быть оценена сверху функцией, принимающей конечные значения при всех конечных t , а значит, решение существует глобально по времени. Если же выражение в скобках достигает нулевого значения при некотором $t = T_1 > 0$, то неравенство гарантирует существование решения только при $t \in [0; T_1)$. Поэтому наименьший положительный корень уравнения $\Phi_0^{-r/2} - r \int_0^t g(\tau)e^{rk\tau} d\tau = 0$, равносильного (6), является нижней оценкой параметра T (при этом не исключается случай $T = \infty$).

В частности, если μ зависит только от x , то из уравнения (6) легко получить явное выражение для T_1 . Теорема доказана.

Перейдем к оцениванию величины T сверху.

Дополним список используемых обозначений:

$$m = \max(|a|, |b|), \quad \alpha = \frac{1}{q+2} \left(r - \frac{rm}{2} - q \right).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mu(x, t) \in C^1[0; T; L_4]$, причем $\mu'(x, t) \geq 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t . Пусть $1 < r \leq 2$, $q \geq 1$. Кроме того, предположим, что

$$m < \frac{2(r-q)}{r}, \tag{8}$$

$$\Phi'_0 > \Phi_0 \sqrt{\frac{rm}{\alpha}}. \tag{9}$$

Тогда обобщенное решение задачи (1) разрушается за конечное время $T \leq T_2$, где

$$T_2 = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\alpha rm}} \cdot \ln \frac{\Phi'_0 + \Phi_0 \sqrt{rm/\alpha}}{\Phi'_0 - \Phi_0 \sqrt{rm/\alpha}}, & m > 0, \\ \frac{\Phi_0}{\alpha \Phi'_0}, & m = 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тождеством

$$\int_{\Omega} \mu |u|^r u u' dx = (r+2)^{-1} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx - \int_{\Omega} \mu' |u|^{r+2} dx \right).$$

Выразим $\int_{\Omega} \mu |u|^r u u' dx$ и $\int_{\Omega} \mu |u|^{r+2} dx$ соответственно из II и I энергетических равенств (3) и подставим в это тождество. Положим $I = a\|u\|^2 + b\|\nabla u\|^2$. После упрощений получим

$$W = \frac{1}{r+2} \Phi'' - \frac{r}{2(r+2)} \frac{dI}{dt} - \frac{1}{r+2} \int_{\Omega} \mu' |u|^{r+2} dx.$$

Несложно убедиться, что

$$\left| \frac{d}{dt} \|u\|^2 \right| \leq \int_{\Omega} (u^2 + u'^2) dx = \|u\|^2 + \|u'\|^2.$$

Аналогично можно оценить производную от $\|\nabla u\|^2$. Следовательно,

$$\left| \frac{dI}{dt} \right| \leq |a|(\|u\|^2 + \|u'\|^2) + |b|(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla u'\|^2) \leq \max(|a|, |b|)(2\Phi + W).$$

Так как выполнено условие $\mu'(x, t) \geq 0$ почти всюду на Ω при любом фиксированном t , то $\int_{\Omega} \mu' |u|^{r+2} dx \geq 0$. Поэтому

$$W \leq \frac{1}{r+2} \Phi'' + \frac{rm}{2(r+2)} (2\Phi + W),$$

откуда

$$W \left(1 - \frac{rm}{2(r+2)} \right) \leq \frac{1}{r+2} \Phi'' + \frac{rm}{r+2} \Phi. \quad (10)$$

Заметим, что положительность множителя при W следует из предполагаемого условия (8). Поэтому, сопоставляя неравенство (10) с леммой 2, получим

$$\Phi'^2 \left(1 - \frac{rm}{2(r+2)} \right) \leq \frac{q+2}{r+2} \Phi (\Phi'' + rm\Phi) \iff \Phi \Phi'' - (1+\alpha) \Phi'^2 + rm\Phi^2 \geq 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{q+2} \left(r - \frac{rm}{2} - q \right).$$

Заметим, что $\alpha > 0$ в силу условия (8).

Положим $\Phi = z^{-1/\alpha}$. После упрощений получим

$$z'' \leq \alpha rm z. \quad (11)$$

Рассмотрим по отдельности случаи $m > 0$ и $m = 0$.

1) Пусть $m > 0$. Положим

$$\rho = \sqrt{\alpha r m}, \quad z = e^{\rho t} w.$$

Неравенство (11) примет следующий вид:

$$w'' + 2\rho w' \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(w' e^{2\rho t}) \leq 0.$$

После интегрирования от 0 до t получим

$$w' \leq w'_0 e^{-2\rho t}.$$

Еще раз проинтегрируем от 0 до t . Так как $w_0 = z_0$ и $w'_0 = z'_0 - \rho z_0$, то

$$z \leq \frac{e^{\rho t}}{2\rho} \cdot [(z'_0 + \rho z_0) - (z'_0 - \rho z_0)e^{-2\rho t}].$$

Выражение в квадратных скобках положительно при достаточно малых t и достигает нулевого значения при

$$t = T_2 = \frac{1}{2\rho} \cdot \ln \frac{z'_0 - \rho z_0}{z'_0 + \rho z_0}.$$

Поэтому Φ обращается в бесконечность при $T \leq T_2$, а значит, T_2 является верхней оценкой для T . Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получим

$$T_2 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha r m}} \cdot \ln \frac{\Phi'_0 + \Phi_0 \sqrt{r m / \alpha}}{\Phi'_0 - \Phi_0 \sqrt{r m / \alpha}}.$$

2) Пусть $m = 0$. Дважды интегрируя неравенство (11) от 0 до t , получим

$$z \leq z_0 + z'_0 t,$$

откуда

$$\Phi \geq (z_0 + z'_0 t)^{-1/\alpha}.$$

Выражение в скобках положительно при достаточно малых t и достигает нулевого значения при

$$t = T_2 = -\frac{z_0}{z'_0}.$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получим

$$T_2 = \frac{\Phi_0}{\alpha \Phi'_0}.$$

Несложно убедиться, что и при $m > 0$, и при $m = 0$ предполагаемое условие (9) равносильно положительности T_2 , т.е. оно обеспечивает корректность сделанных оценок. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Л. Соболев, “Об одной новой задаче математической физики”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **18**:1 (1954), 3–50.
- [2] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, *Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных*, Научный мир, М., 2008.
- [3] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Математика и прикладная математика, Физматлит, М., 2007.
- [4] А. И. Аристов, “Исследование качественных свойств решений одного нелинейного соболевского уравнения”, *Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ 2010 г.*, Макс-Пресс, М., 2010, 11–22.
- [5] А. И. Аристов, “Оценки времени существования решений начально-краевой задачи для одного нелинейного соболевского уравнения”, *Материалы конференции “Тихоновские чтения”* (25–30 октября 2010 г.), Макс-Пресс, М., 2010, 27–28.

А. И. Аристов

E-mail: ai_aristov@mail.ru

Поступило

29.12.2010

Исправленный вариант

29.09.2011