Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Герко, Асимптотически рекуррентные решения уравнений в β -производных, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 837–851

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm902>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:56:59

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКИ РЕКУРРЕНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В β -ПРОИЗВОДНЫХ

А. И. Герко

В статье методами теории расширений динамических систем изучаются уравнения в β -производных со свойствами единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных и правых частей уравнения. На уравнения в β -производных (в частности, в полных производных) распространяются теоремы Жикова–Бронштейна об асимптотически почти периодических решениях обыкновенного дифференциального уравнения. Кроме асимптотической почти периодичности рассмотрены асимптотическая рекуррентность, слабая асимптотическая дистальность и асимптотическая дистальность. С уравнениями связываются динамические системы, которые порождаются пространством правых частей и пространствами решений и начальных значений решений уравнения. Фазовые полугруппы динамических систем, вообще говоря, не локально компактны.

Библиография: 27 названий.

Введение. В статье исследуются дифференциальные уравнения

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

где независимая переменная x принимает значения из некоторого подмножества отдельного вещественного топологического векторного пространства E ; неизвестная функция y принимает значения из некоторого подмножества отдельного полного локально выпуклого вещественного или комплексного топологического векторного пространства T ; отображение f определено на подмножестве из $E \times T$ и принимает значения в пространстве линейных непрерывных отображений $E \rightarrow T$; штрих означает β -производную [1] (в частности, производную Фреше), где β – некоторая совокупность ограниченных подмножеств из E .

В монографиях [2], [3] имеется обширная библиография, посвященная различным частным случаям уравнений (1) и их применениям. Наиболее известным и изученным представителем таких уравнений является обыкновенное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве. К уравнениям (1) сводятся системы дифференциальных уравнений $x'_{t_j} = \varphi_j(t, x)$ ($j = 1, 2, \dots, m, t \in \mathbb{R}^m, x(t) \in \mathbb{R}^n$) с частными производными. В [3] отмечается, что одним из интересных и важных классов уравнений, которые сводятся к уравнениям (1) в бесконечномерных пространствах, являются уравнения в вариационных (функциональных) производных (например, уравнение Шрёдингера [4], уравнение

Швингера [5]). Уравнения (1) широко применяются в различных разделах теоретической физики, дифференциальной геометрии, теории групп Ли, электродинамике, оптимальном управлении системами с распределенными параметрами, теории стохастических систем с импульсными воздействиями и др.

Теория уравнений (1) сохранила глубокие аналогии с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Общие вопросы теории изложены, в частности, в монографиях [2] и [3] (в [2] пространства E и T конечномерны, в [3] рассмотрены линейные уравнения). В этих монографиях а также в статьях [6]–[12] рассмотрены и некоторые аспекты качественной теории уравнений (1) (как правило, для конечномерного пространства E).

Целью настоящей статьи является распространение на уравнения в β -производных известной теоремы Жикова–Бронштейна–Черный о положительной асимптотической почти периодичности компактного равномерно асимптотически устойчивого решения обыкновенного дифференциального уравнения с почти периодической правой частью (см., например, [13]–[16]). Кроме асимптотической почти периодичности мы рассматриваем асимптотическую рекуррентность, слабую асимптотическую дистальность и асимптотическую дистальность.

Обычно *асимптотически почти периодической* называют функцию, представимую в виде суммы почти периодической функции и бесконечно малой на бесконечности функции. Поэтому при исследовании многомерных уравнений возникает необходимость интерпретировать понятие предела на бесконечности. В монографии [2], в частности, при исследовании автономных динамических систем это делается с помощью сходимости по фильтру. Отметим, что в одномерном случае понятие предела на бесконечности связано с упорядочением области определения решений отношением “ $>$ ”, определяемым так: $x > y \iff x = y + z$ для некоторого положительного числа z . Непосредственное обобщение этого определения, основанное на использовании операции “ $+$ ”, предопределяет возможность применять теорию расширений общих динамических систем (полугрупп преобразований) для исследования неавтономных многомерных уравнений. Использование же сходимости по фильтру не позволяет непосредственно применять к исследованиям теорию расширений полугрупп преобразований. В наших исследованиях мы пользуемся как непосредственным обобщением отношения “ $>$ ” через операцию “ $+$ ” на области определения решений, так и некоторым абстрактным отношением ρ на области определения решений. Используя различные обобщения предела на бесконечности и учитывая некоторые другие факторы, мы предлагаем различные виды определений асимптотического поведения решений уравнения. Из полученных нами теорем, в частности, при соответствующей конкретизации отношения ρ (например, $(a, b) \in \rho \iff \|a\| > \|b\|$) следуют результаты, использующие сходимость по фильтру (по фильтру Немыцкого).

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями мы связываем с уравнениями некоторые динамические системы в пространствах правых частей, решений и начальных значений решений уравнения. При этом, поскольку в качестве “пространства-времени” у нас выступает, вообще говоря, бесконечномерное пространство, мы используем динамические системы с, вообще говоря, не локально компактными фазовыми полугруппами; функциональные пространства мы наделяем равномерной структурой равномерной сходимости на элементах некоторого абстрактного семейства подмножеств из области определения рассматриваемых отображений (в отличие от общепринятой равномерной структуры компактной сходимости).

Наши определения в идейном плане практически не отличаются от общепринятых в случае одномерной области определения функций. Однако, ввиду большого выбора различных “направлений” и конусов в многомерном “пространстве-времени” мы учитываем возможность применения их к исследованию свойств функций при изменении аргументов в определенном “направлении”, в частности, к исследованию свойств функций (решений уравнений) по части аргументов. В качестве таких “направлений” могут выступать некоторые полугруппы (конусы) из области определения функций (наполненные полугруппы, полугруппы, порождающие группу).

Основные соглашения. Всюду в статье мы используем следующие обозначения и соглашения.

E – отделимое вещественное топологическое векторное пространство.

T – отделимое полное локально выпуклое вещественное или комплексное топологическое векторное пространство.

$P \subset E$, S – подполугруппа группы E , $0 \in S \subset P$ и $S + P \subset P$; W – отделимое подмножество из T .

β , $\tau(P)$, $\tau(W)$ и $\tau(S)$ – некоторые совокупности подмножеств из E , P , W и S соответственно, для которых выполнены условия:

- 1) β – некоторая совокупность ограниченных подмножеств, содержащая все одноточечные подмножества из E ;
- 2) каждая точка из S имеет окрестность, принадлежащую $\tau(S)$;
- 3) объединение любого конечного семейства множеств из $\tau(S)$ (соответственно из $\tau(P)$, $\tau(W)$) принадлежит $\tau(S)$ (соответственно $\tau(P)$, $\tau(W)$);
- 4) система $\tau(S)$ (соответственно $\tau(P)$, $\tau(W)$) покрывает S (соответственно P , W);
- 5) $\forall A \in \tau(S) \forall B \in \tau(P) \exists C \in \tau(P) A + B \subset C$.

Z – векторное пространство линейных непрерывных отображений $E \rightarrow T$ с β -топологией.

Φ_1 – множество равномерно непрерывных на каждом множестве из $\tau(P) \times \tau(W)$ отображений $P \times W \rightarrow Z$, снабженное равномерной структурой $\tau(P) \times \tau(W)$ -сходимости.

σ_1 – отображение $\Phi_1 \times S \rightarrow Z^{P \times W}$, определяемое по правилу $\sigma_1(f, s) = f_s$, где $f_s(p, t) = f(s + p, t)$ ($(p, t) \in P \times W$).

Φ_2 – множество равномерно непрерывных на каждом множестве из $\tau(P)$ отображений $P \rightarrow T$, снабженное равномерной структурой $\tau(P)$ -сходимости.

σ_2 – отображение $\Phi_2 \times S \rightarrow T^P$, определяемое по правилу $\sigma_2(f, s) = f_s$, где $f_s(p) = f(s + p)$ ($p \in P$).

$\mathcal{U}[X]$ – равномерность пространства X , согласованная с топологией на X .

В работе мы широко пользуемся терминологией, символикой и результатами теории топологических групп и полугрупп преобразований. Для большей полноты изложения приведем некоторые определения (подробнее см., например, [15]–[18]).

Под *полугруппой преобразований* мы понимаем тройку (X, S, π) , где X – топологическое пространство и $\pi: X \times S \rightarrow X$ – непрерывное отображение такое, что для любых $x \in X$, $s, t \in S$ $\pi(x, 0) = x$ и $\pi(\pi(x, s), t) = \pi(x, s + t)$.

При сделанных выше предположениях можно доказать, что (Φ_i, S, σ_i) – полугруппа преобразований – абстрактный аналог динамической системы сдвигов Бebutова ($i = 1, 2$).

Для полугруппы преобразований (X, S, π) , $D \subset S$ и $x \in X$ символом xD обозначаем множество $\{\pi(x, s) \mid s \in D\}$.

Расширением $\varphi: (X, S, \pi) \rightarrow (Y, S, \rho)$ полугрупп преобразований (X, S, π) и (Y, S, ρ) называем непрерывную сюръекцию $\varphi: X \rightarrow Y$, для которой $\varphi(\pi(x, s)) = \rho(\varphi(x), s)$ ($x \in X, s \in S$).

Пусть $\varphi: (X, S, \pi) \rightarrow (Y, S, \rho)$ – расширение полугрупп преобразований; $x \in X$; $M \subset X$; $D, Q \subset S$ – непустые подмножества; $[D]$ – некоторый класс непустых подмножеств множества D .

Множество M называется $[D]$ -устойчивым типа S_1 относительно расширения φ [18], если для любого $\alpha \in \mathcal{U}[X]$ существуют $A \in [D]$ и $\beta \in \mathcal{U}[X]$, для которых $((M \times X) \cap R_\varphi \cap \beta)A \subset \alpha$.

Множество M называется $[D]$ -устойчивым типа S_2 относительно расширения φ [18], если существует окружение $\beta \in \mathcal{U}[X]$ и для любого $\alpha \in \mathcal{U}[X]$ существуют $A \in [D]$ и $p \in D$ такие, что $((M \times X) \cap R_\varphi \cap \beta)pA \subset \alpha$.

Точка x называется $[D]Q$ -асимптотически поточечно почти периодической относительно расширения φ [18], если существует компактное минимальное множество $M \subset x\overline{Q}$ такое, что для некоторой точки $y \in M \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$ и произвольного окружения $\alpha \in \mathcal{U}[X]$ существует пара $(q, A) \in Q \times [D]$, для которой $(x, y)qA \subset \alpha$.

Точка x называется $[D]Q$ -асимптотически слабо дистальной относительно расширения φ [18], если существует компактное множество $M \subset x\overline{Q}$ такое, что для некоторой дистальной в M точки $y \in M \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$ и произвольного окружения $\alpha \in \mathcal{U}[X]$ существует пара $(q, A) \in Q \times [D]$, для которой $(x, y)qA \subset \alpha$.

Точка x называется $[D]Q$ -асимптотически дистальной ($[D]Q$ -асимптотически регионально дистальной) относительно расширения φ [18], если существует компактное дистальное (регионально дистальное) множество $M \subset x\overline{Q}$ такое, что для некоторой точки $y \in M \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$ и произвольного окружения $\alpha \in \mathcal{U}[X]$ существует пара $(q, A) \in Q \times [D]$, для которой $(x, y)qA \subset \alpha$.

Если $[D] = \{D\}$, то в приведенных определениях символ $[D]$ заменяем на D .

Подмножество D из S называется *наполненным*, если для произвольного компакта $K \subset S$ найдется элемент $p \in D$ такой, что $p + K \subset D$.

Уравнения в β -производных и связанные с ними расширения полугрупп преобразований. В этом пункте мы уточняем объект исследования – уравнения в β -производных с памятью. Кроме этого мы указываем некоторые расширения, к исследованию которых по существу сводится исследование уравнений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. β -производной отображения $\varphi: P \rightarrow T$ в точке x называется элемент $\varphi'(x) \in Z$ такой, что для любых $A \in \beta$, $\eta \in \mathcal{U}[T]$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < |\tau| < \delta$, и всех $a \in A$ выполняется соотношение

$$(\tau^{-1}(\varphi(x + \tau a) - \varphi(x)), \varphi'(x)a) \in \eta.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Уравнением в β -производных относительно функции y называем уравнение $y'(x) = f(x, y(x))$, где f – отображение $P \times W \rightarrow Z$ и $y'(x)$ означает β -производную функции y в точке x . Уравнение в β -производных называем *уравнением в полных производных*, если β – совокупность всех ограниченных подмножеств из E .

Обычно уравнение $y'(x) = f(x, y(x))$ записываем короче в форме $y' = f(x, y)$, т.е. в форме (1).

В дальнейшем считаем, что “правые части” f уравнений (1) принадлежат Φ_1 , решения уравнения (1) принадлежат Φ_2 , и уравнения в полных производных рассматриваем при следующих предположениях: E – квазиполное нормированное пространство, при этом $P = E$, если пространство E бесконечномерно, и P – выпуклое множество, если пространство E конечномерно; $\tau(P)$ (соответственно $\tau(W)$, $\tau(S)$) – совокупность всех компактных подмножеств из P (соответственно из W , S).

Справедливы следующие две леммы замкнутости для уравнений (1).

ЛЕММА 1. Пусть $K \in \tau(W)$, I – направленное множество и выполнены условия:

- 1) любая β -липшицева кривая, соединяющая произвольные две точки из P , содержится в некотором множестве, принадлежащем $\tau(P)$;
- 2) каждая ломаная в P является β -липшицевой (это выполняется, в частности, если β содержит все конечномерные ограниченные множества из E);
- 3) для любого $i \in I$ функция φ_i – решение уравнения $y' = f_i(x, y)$ в β -производных, причем $\overline{\varphi_i(P)} \subset K$;
- 4) $\lim_i f_i = f$ в Φ_1 и $\lim_i \varphi_i = \varphi$ в Φ_2 .

Тогда φ – решение уравнения $y' = f(x, y)$ в β -производных и $\overline{\varphi(P)} \subset K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $g \in \Phi_1$ и $\psi \in \Phi_2$ символом g^ψ обозначаем отображение, определяемое правилом $g^\psi(x) = g(x, \psi(x))$ ($x \in P$). Из условия леммы следует, что направленность $\{f_i^{\varphi_i}\}$ сходится к функции f^φ равномерно на множествах из $\tau(P)$.

Пусть $x_0, x_1 \in P$ и Γ – β -липшицева кривая в P , соединяющая точки x_0 и x_1 . Поскольку $f_i(x, \varphi_i(x)) = \varphi_i'(x)$ для любого $x \in P$, то по теореме 3.6 из [1]

$$\int_{\Gamma} \varphi_i'(x) dx = \varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_0), \quad i \in I.$$

По теореме 3.1 из [1]

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(x, \varphi(x)) dx &= \lim_i \int_{\Gamma} f_i(x, \varphi_i(x)) dx = \lim_i \int_{\Gamma} \varphi_i'(x) dx \\ &= \lim_i (\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_0)) = \varphi(x_1) - \varphi(x_0), \end{aligned}$$

т.е. $\int_{\Gamma} f(x, \varphi(x)) dx = \varphi(x_1) - \varphi(x_0)$. Мы получили, что интеграл $\int_{\Gamma} f(x, \varphi(x)) dx$ зависит только от начальной и конечной точек пути интегрирования. В таком случае по теореме 3.7 из [1] для любого $t \in P$ и фиксированного $x_0 \in P$

$$\varphi'(t) = (\varphi(t) - \varphi(x_0))' = \left(\int_{x_0}^t f(x, \varphi(x)) dx \right)' = f(t, \varphi(t)),$$

т.е. $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. Понятно, что $\overline{\varphi(P)} \subset K$.

Следующую лемму мы докажем для уравнений в полных производных. Предварительно отметим следующее.

Пусть E – нормированное пространство, β – совокупность всех ограниченных подмножеств из E и $\tilde{Q}$ – семейство непрерывных полунорм на T , порождающих топологию на T . Если $A \in Z$ и $q \in \tilde{Q}$, то согласно предложению 1.1 из [19, с. 96] существует число $c > 0$ такое, что $q(Ax) \leq c\|x\|$ для любого $x \in E$. Для произвольного $q \in \tilde{Q}$ через p_q обозначаем отображение $Z \rightarrow \mathbb{R}$, определяемое правилом

$$p_q(A) = \inf\{c \mid c > 0, q(Ax) \leq c\|x\| (x \in E)\}.$$

Непосредственно проверяется, что p_q – полунорма на Z ,

$$p_q(A) = \sup_{\|x\| \leq 1} q(Ax) \quad \forall A \in Z,$$

и семейство полунорм $Q^* = \{p_q \mid q \in \tilde{Q}\}$ определяет β -топологию на Z .

ЛЕММА 2. Пусть $K \in [W]$ и для любого $i \in I$ функция φ_i – решение уравнения $y' = f_i(x, y)$ в полных производных, причем $\varphi_i(P) \subset K$ и $\lim_i f_i = f$ в Φ_1 . Тогда

- 1) семейство $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ компактно;
- 2) предел φ произвольной поднаправленности направленности $\{\varphi_i\}$ является решением уравнения $y' = f(x, y)$ в полных производных и $\varphi(\overline{P}) \subset K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\mathcal{U}[T]$ обозначим равномерность пространства T , порождающую топологию на T и инвариантную относительно сдвигов. Последнее означает, что для произвольного базиса $\mathcal{N}$ окрестностей нуля совокупность $\mathcal{U}^*[T] = \{\alpha_V \mid V \in \mathcal{N}\}$ множеств $\alpha_V = \{(x, y) \mid x, y \in T, x - y \in V\}$ является базисом для $\mathcal{U}[T]$.

В силу теоремы Асколи [20, с. 308] для доказательства компактности множества $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ достаточно доказать равностепенную непрерывность множества $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ в каждой точке произвольного компакта из P . Пусть A – компакт из P , A' – замкнутая выпуклая оболочка A . Тогда A' – компакт из P . Предположим, что $t_1 \in A$ и α – произвольное окружение базы $\mathcal{U}^*[T]$ равномерности $\mathcal{U}[T]$. Существуют натуральные числа n, m и непрерывные полунормы $q_k \in \tilde{Q}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) такие, что $(x, y) \in \alpha$ тогда и только тогда, когда $q_k(x - y) \leq n^{-1}$ для произвольного $k = 1, 2, \dots, m$. Обозначим

$$M_i^k = \sup_{z \in A' \times K} p_{q_k}(f_i(z)), \quad i \in I, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Тогда $M_i^k = p_{q_k}(f_i(z_i^k))$ для некоторого $z_i^k \in A' \times K$ ($i \in I, k = 1, 2, \dots, m$). Считаем, что для произвольного $k = 1, 2, \dots, m$ $\lim_i z_i^k = z^k \in A' \times K$. Докажем, что $\lim_i f_i(z_i^k) = f(z^k)$ для произвольного $k = 1, 2, \dots, m$. Так как $\lim_i z_i^k = z^k$ и отображение f непрерывно на множестве $A' \times K$, то для натуральных чисел p, l и непрерывных полунорм $p_r \in Q^*$ ($r = 1, 2, \dots, l$) существует $i_1 \in I$ такое, что для произвольных $i > i_1$, $k = 1, 2, \dots, m$ и $r = 1, 2, \dots, l$

$$p_r(f(z_i^k) - f(z^k)) \leq (2p)^{-1}. \quad (2)$$

Поскольку $\lim_i f_i = f$, то существует $i_2 \in I$ такое, что для произвольных $i > i_2$, $k = 1, 2, \dots, m$ и $r = 1, 2, \dots, l$

$$p_r(f_i(z_i^k) - f(z_i^k)) \leq (2p)^{-1}. \quad (3)$$

С учетом (2) и (3) получим для произвольных $i > \max(i_1, i_2)$, $k = 1, 2, \dots, m$ и $r = 1, 2, \dots, l$ оценку

$$p_r(f_i(z_i^k) - f(z^k)) \leq p_r(f_i(z_i^k) - f(z_i^k)) + p_r(f(z_i^k) - f(z^k)) \leq p^{-1},$$

т.е. $p_r(f_i(z_i^k) - f(z^k)) \leq p^{-1}$. Доказанное означает, что $\lim_i f_i(z_i^k) = f(z^k)$ для произвольного $k = 1, 2, \dots, m$. В силу непрерывности полунорм p_{q_k} из доказанного следует, что

$$\lim_i p_{q_k}(f_i(z_i^k)) = p_{q_k}(f(z^k))$$

для произвольного $k = 1, 2, \dots, m$. Поэтому для произвольного $k = 1, 2, \dots, m$ существует

$$\sup_{i \in I} M_i^k = M^k \in \mathbb{R}.$$

Предположим, что $M > \max_k M^k$ и $t_2 \in A$ таково, что $\|t_1 - t_2\| < (nM)^{-1}$. Тогда, учитывая теорему о среднем, для произвольного $k = 1, 2, \dots, m$ получим оценку

$$\begin{aligned} q_k(\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)) &\leq \sup_{t \in [t_1, t_2]} q_k(\varphi'_i(t)(t_2 - t_1)) \leq \sup_{t \in [t_1, t_2]} p_{q_k}(\varphi'_i(t)) \|t_2 - t_1\| \\ &< \sup_{t \in [t_1, t_2]} p_{q_k}(f_i(t, \varphi_i(t)))(nM)^{-1} \leq M \cdot (nM)^{-1} = n^{-1}, \end{aligned}$$

т.е. $q_k(\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)) < n^{-1}$. Это означает, что $(\varphi_i(t_1), \varphi_i(t_2)) \in \alpha$ для произвольного $i \in I$. Мы доказали равностепенную непрерывность множества $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ в точке t_1 . Утверждение 1) леммы доказано. Утверждение 2) леммы следует из леммы 1 с учетом того, что β -топология на Z порождается семейством полунорм Q^* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Решение φ уравнения (1) называется *компактным*, если $\overline{\varphi(P)} \subset W$ и множество $\overline{\varphi(P)}$ компактно. Решение φ уравнения (1) называется $\tau(W)$ -*поглощаемым*, если $\overline{\varphi S} \subset \Phi_2$ и $\overline{\varphi(P)} \subset K$ для некоторого $K \in \tau(W)$.

Понятно, что каждое компактное решение уравнения в полных производных является $\tau(W)$ -поглощаемым. Понятно также, что для компактности множества $\overline{\varphi S}$ достаточно выполнения одного из следующих условий:

- 1) отображение φ равномерно непрерывно;
- 2) множество $f(P, \overline{\varphi(P)})$ ограничено;
- 3) множество $\overline{fS}$ компактно.

Всюду в дальнейшем мы (аналогично одномерному случаю) будем рассматривать уравнения со свойствами единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных и правых частей уравнения. Такие уравнения мы будем называть уравнениями с памятью. Приведем формальные определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Уравнение (1) в β -производных называем *уравнением с памятью W* , если выполнены условия:

- 1) для любой пары $(s, \omega) \in P \times W$ существует решение φ уравнения (1) такое, что $\varphi(s) = \omega$;
- 2) если для решений φ и ψ уравнения (1) выполняется равенство $\varphi(s) = \psi(s)$ для некоторого $s \in P$, то $\varphi = \psi$;

- 3) для произвольного решения φ уравнения (1), произвольных окружения $\alpha \in \mathcal{U}[W]$ и множества $K \in \tau(P)$ найдется окружение $\beta \in \mathcal{U}[W]$ такое, что если для некоторого решения ψ уравнения (1) $(\varphi(0), \psi(0)) \in \beta$, то $(\varphi(k), \psi(k)) \in \alpha$ для любого $k \in K$;
- 4) для f , произвольных $\alpha \in \mathcal{U}[W]$, $K \in \tau(P)$ и $M \in \tau(W)$ существует $\beta \in \mathcal{U}[Z]$ такое, что для произвольного решения φ уравнения (1) и произвольного решения ψ уравнения $y' = g(x, y)$ в β -производных из соотношений $\varphi(0) = \psi(0)$ и $(f(k, m), g(k, m)) \in \beta$ для любой пары $(k, m) \in K \times M$ следует соотношение $(\varphi(k), \psi(k)) \in \alpha$ для любого $k \in K$.

Через $\mathcal{A}$ обозначаем класс уравнений $y' = f(x, y)$ с памятью W , для которых из $g \in \overline{fS}$ следует, что $y' = g(x, y)$ – уравнение с памятью W , и выполнены условия:

- 1) для любого $A \in \tau(S)$ существует $B \in \tau(P)$ $A \subset B$;
- 2) любая β -липшицева кривая, соединяющая произвольные две точки из P , содержится в некотором множестве, принадлежащем $\tau(P)$;
- 3) каждая ломаная в P является β -липшицевой.

Считаем в дальнейшем, что уравнение (1) принадлежит классу $\mathcal{A}$.

Пусть $\varphi - \tau(W)$ -поглощаемое решение уравнения (1) (в частности, компактное решение уравнения (1) в полных производных); $\pi: \overline{fS} \times W \times S \rightarrow \overline{fS} \times W$ – отображение, задаваемое по правилу $\pi(g, w, s) = (g_s, \psi(s))$, где ψ – решение уравнения $y' = g(x, y)$, для которого $\psi(0) = w$; $X = \{(g, \psi) \mid g \in \overline{fS}, \psi - \text{решение уравнения } y' = g(x, y)\}$; $\mathcal{P}: \overline{fS} \times W \rightarrow \overline{fS}$ и $\mathcal{P}^*: X \rightarrow \overline{fS}$ – проектирования; $\lambda: X \rightarrow \overline{fS} \times W$ – отображение, задаваемое по правилу

$$\lambda(g, \psi) = (g, \psi(0)). \quad (4)$$

Понятно, что $X \subset \Phi_1 \times \Phi_2$ – инвариантное множество в прямом произведении $(\Phi_1 \times \Phi_2, S, \sigma_1 \times \sigma_2)$ полугрупп преобразований (Φ_1, S, σ_1) и (Φ_2, S, σ_2) . Поэтому определена полугруппа преобразований (X, S, σ_{12}) – подполугруппа преобразований полугруппы преобразований $(\Phi_1 \times \Phi_2, S, \sigma_1 \times \sigma_2)$. Кроме этого, используя стандартные рассуждения, можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 3. *Справедливы следующие утверждения.*

- 1) $(\overline{fS} \times W, S, \pi)$ – полугруппа преобразований, изоморфная полугруппе преобразований (X, S, σ_{12}) при изоморфизме λ , определяемом правилом (4).
- 2) Проектирования $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$ определяют расширения $\mathcal{P}: (\overline{fS} \times W, S, \pi) \rightarrow (\overline{fS}, S, \sigma_1)$ и $\mathcal{P}^*: (X, S, \sigma_{12}) \rightarrow (\overline{fS}, S, \sigma_1)$ полугрупп преобразований.
- 3) Определены две полугруппы преобразований: $(\overline{(f, \varphi)S}, S, \sigma_{12})$ – подполугруппа полугруппы преобразований (X, S, σ_{12}) и $((f, \varphi(0))S, S, \pi)$ – подполугруппа полугруппы преобразований $(\overline{fS} \times W, S, \pi)$. Эти полугруппы преобразований изоморфны при изоморфизме λ^* , где λ^* – сужение отображения λ по формуле (4) на множество $(f, \varphi)S$.

Основные результаты. Охарактеризуем основные классы функций, с которыми будем в дальнейшем работать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $Q \subset S$ и $f \in \Phi_1$.

Функция f называется SQ -рекуррентной в смысле Биркгофа, если для любых $A \in \tau(P)$, $C \in \tau(W)$ и $\alpha \in \mathcal{U}[Z]$ существует компакт K из Q такой, что для любого $s \in Q$ существует $t \in K$, для которого $(f(a, c), f(s+t+a, c)) \in \alpha$ при произвольных $(a, c) \in A \times C$.

Функция f называется слабо SQ -дистальной, если для любого $g \in \overline{fS}$, $f \neq g$, существуют $A \in \tau(P)$, $C \in \tau(W)$ и $\alpha \in \mathcal{U}[Z]$ такие, что для любого $s \in Q$ существует $(a, c) \in A \times C$, для которой $(f(s+a, c), g(s+a, c)) \notin \alpha$.

Функция f называется SQ -дистальной, если для любых $g, h \in \overline{fS}$, $g \neq h$, существуют $A \in \tau(P)$, $C \in \tau(W)$ и $\alpha \in \mathcal{U}[Z]$ такие, что для любого $s \in Q$ существует $(a, c) \in A \times C$, для которой $(g(s+a, c), h(s+a, c)) \notin \alpha$.

Функция f называется SQ -почти периодической в смысле Бора, если для любых $A \in \tau(P)$, $C \in \tau(W)$ и $\alpha \in \mathcal{U}[Z]$ существует компакт $K \subset Q$ такой, что для произвольного $t \in Q$ существует $k \in K$, для которого $(f(s+a, c), f(s+t+k+a, c)) \in \alpha$ при любых $(s, a, c) \in S \times A \times C$.

Приведенные определения естественно распространяются на функции из Φ_2 и функции-пары из $\Phi_1 \times \Phi_2$.

Понятно, что функция $f \in \Phi_i$ ($i = 1, 2$) является SQ -рекуррентной в смысле Биркгофа (слабо SQ -дистальной, SQ -дистальной, SQ -почти периодической в смысле Бора) тогда и только тогда, когда точка f Q -почти периодична (точка f Q -дистальна, множество $\overline{fS}$ Q -дистально, множество $\overline{fS}$ Q -почти периодично) в полугруппе преобразований $(\overline{fS}, S, \sigma_i)$ [17], [18]. Поэтому наши определения по существу удовлетворяют концепциям применения методов топологической динамики к исследованию конкретных классов уравнений [15], [16], и для них справедливы свойства, отмеченные в [21].

SQ -рекуррентность функции в смысле Биркгофа и SQ -почти периодичность функции в смысле Бора можно охарактеризовать в терминах "относительной плотности множества ε -периодов" [2] функции. Пусть для $f \in \Phi_2$, $M \in \tau(P)$ и $\alpha \in \mathcal{U}[T]$

$$A_{Q, M, \alpha}^f = \{q \mid q \in Q, (f(m), f(q+m)) \in \alpha \ (m \in M)\}.$$

Непосредственно из определений следует, что функция $f \in \Phi_2$ SQ -рекуррентна в смысле Биркгофа тогда и только тогда, когда для любых $M \in \tau(P)$, $\alpha \in \mathcal{U}[T]$ существует компакт $K \subset Q$ такой, что $Q \subset A_{Q, M, \alpha}^f - K$ и $0 \in A_{Q, M, \alpha}^f$. Аналогично, функция $f \in \Phi_2$ SQ -почти периодична в смысле Бора тогда и только тогда, когда для любых $M \in \tau(P)$, $\alpha \in \mathcal{U}[T]$ существует компакт $K \subset Q$ такой, что

$$Q \subset \bigcap_{s \in S} A_{Q, M, \alpha}^{f_s} - K, \quad 0 \in \bigcap_{s \in S} A_{Q, M, \alpha}^{f_s}.$$

При $Q = S = P = E$ и $\tau(P) = \{P\}$ (поскольку $\bigcap_{s \in E} A_{E, E, \alpha}^{f_s} = A_{E, E, \alpha}^f$) мы получаем, что функция f EE -почти периодична в смысле Бора тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in \mathcal{U}[T]$ существует компакт $K \subset E$ такой, что $E = A_{E, E, \alpha}^f + K$. Это хорошо согласуется с определением почти периодической функции из [2] (ибо в конечномерном случае для EE -почти периодической в смысле Бора функции f множество $\overline{fE}$ компактно, и в равенстве $E = A_{E, E, \alpha}^f + K$ множество K можно считать конечным).

Отметим, что наиболее полно изучены почти периодические функции (см., например, [22]). О рекуррентных и дистальных функциях см., например, в [23]–[26].

Следующие определения являются обобщениями на многомерный случай понятий равномерно устойчивого в положительном направлении, положительно притягивающего и положительно асимптотически почти периодического (устойчивого по Пуассону) решения из [15], [16], [27].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $D, Q \subset S$, $[D]$ – некоторая непустая совокупность подмножеств из D и φ – решение уравнения (1).

Решение φ называется $[D]Q$ -устойчивым, если для любого $\varepsilon \in \mathcal{U}[W]$ существуют $\delta \in \mathcal{U}[W]$ и $A \in [D]$ такие, что для любого решения ψ уравнения (1) и любого $d \in Q$ из условия $(\varphi(d), \psi(d)) \in \delta$ следует для произвольного $a \in A$ соотношение $(\varphi(d+a), \psi(d+a)) \in \varepsilon$.

Решение φ называется $[D]Q$ -притягивающим, если существует $\delta \in \mathcal{U}[W]$ такое, что для любого $\varepsilon \in \mathcal{U}[W]$ существует пара $(A, d) \in [D] \times D$ такая, что для любого решения ψ уравнения (1) и любого $p \in Q$ из условия $(\varphi(p), \psi(p)) \in \delta$ следует соотношение $(\varphi(d+p+a), \psi(d+p+a)) \in \varepsilon$ для любого $a \in A$.

Решение φ называется $[D]Q$ -асимптотически рекуррентным ($[D]Q$ -асимптотически слабо дистальным, $[D]Q$ -асимптотически дистальным, $[D]Q$ -асимптотически почти периодическим), если во множестве φQ существует SS -рекуррентное в смысле Биркгофа (слабо SS -дистальное, SS -дистальное, SS -почти периодическое в смысле Бора) решение ψ уравнения (1) такое, что для любого $\eta \in \mathcal{U}[W]$ существует пара $(A, d) \in [D] \times Q$, для которой при всех $t \in d + A$ выполняется соотношение $(\varphi(t), \psi(t)) \in \eta$.

Если $[D] = \{D\}$, то в приведенных определениях квадратные скобки опускаем.

Отметим, что в наших определениях обобщение предела на бесконечности реализовано с помощью операции “+”. Непосредственно, пользуясь определениями, можно доказать следующие две леммы, из которых следует, что наши определения $[D]Q$ -устойчивого, $[D]Q$ -притягивающего, $[D]Q$ -асимптотически рекуррентного, $[D]Q$ -асимптотически слабо дистального, $[D]Q$ -асимптотически дистального и $[D]Q$ -асимптотически почти периодического решения также удовлетворяют концепциям применения методов топологической динамики к исследованию конкретных классов уравнений.

ЛЕММА 4. Решение φ уравнения (1) является $[D]Q$ -устойчивым ($[D]Q$ -притягивающим) тогда и только тогда, когда множество $(f, \varphi(0))Q$ $[D]$ -устойчиво типа S_1 (S_2) относительно расширения $\mathcal{P}$ из леммы 3.

ЛЕММА 5. Пусть φ – $\tau(W)$ -поглощаемое решение уравнения (1). Если точка $(f, \varphi(0))$ $[D]Q$ -асимптотически поточечно почти периодична ($[D]Q$ -асимптотически слабо дистальна, $[D]Q$ -асимптотически дистальна, $[D]Q$ -асимптотически регионально дистальна) относительно расширения $\mathcal{P}$ из леммы 3, то решение φ $[D]Q$ -асимптотически рекуррентно ($[D]Q$ -асимптотически слабо дистально, $[D]Q$ -асимптотически дистально, $[D]Q$ -асимптотически почти периодично).

ТЕОРЕМА 1. Пусть Q – наполненная подполугруппа из S , $0 \in Q$, $D \subset S$; функция f SQ -рекуррентна в смысле Биркгофа; φ – $\tau(W)$ -поглощаемое решение уравнения (1) и множество $(f, \varphi(0))Q$ компактно. Тогда

- 1) если решение φ $[D]Q$ -устойчиво, то оно $[D]Q$ -асимптотически рекуррентно;

- 2) Если $0 \in D$ и решение φ $[D]Q$ -притягивающее, то оно $[D](Q+D)$ -асимптотически рекуррентно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если решение φ $[D]Q$ -устойчиво, то по лемме 4 множество $(f, \varphi(0))Q$ $[D]$ -устойчиво типа S_1 относительно расширения $\mathcal{P}$. Согласно теореме 5 из [18] точка $(f, \varphi(0))$ $[D]Q$ -асимптотически поточечно почти периодична относительно расширения $\mathcal{P}$. Поэтому по лемме 5 решение φ $[D]Q$ -асимптотически рекуррентно. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть S – группа, D и Q – наполненные подполугруппы из S , $L \subset S$, $0 \in D \cap Q \cap L$; функция f слабо SQ -дистальна (SQ -дистальна); φ – $\tau(W)$ -поглощающее решение уравнения (1) и множество $(f, \varphi(0))\overline{Q}$ компактно. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если решение φ DQ -устойчиво, то оно DQ -асимптотически слабо дистально (DQ -асимптотически дистально);
- 2) если решение φ DQ -устойчиво и $[L]Q$ -притягивающее, то оно $[L](L+Q)$ -асимптотически слабо дистально ($[L](L+Q)$ -асимптотически дистально).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует схеме доказательства теоремы 1 с использованием теорем 6 и 7 из [18].

ТЕОРЕМА 3. Пусть S – группа, D и Q – наполненные подполугруппы из S , причем полугруппа D такова, что для некоторого компакта K из D всякая открыто-замкнутая подполугруппа из D , содержащая K , совпадает с D ; $L \subset S$, $0 \in D \cap Q \cap L$; φ – $\tau(W)$ -поглощающее решение уравнения (1). Если

- 1) множество $(f, \varphi(0))\overline{Q}$ компактно,
- 2) функция f SQ -почти периодична в смысле Бора,
- 3) решение φ DQ -устойчиво и $[L]Q$ -притягивающее,

то решение φ DQ -асимптотически почти периодично и $[L](L+Q)$ -асимптотически почти периодично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы следует, что $\overline{fS}$ – компактное минимальное почти периодическое множество. Поэтому множество $\overline{fS}$ дистально. Согласно лемме 4 и утверждению 2 из [18] множество $(f, \varphi(0))\overline{Q}$ D -устойчиво типа S_1 и $[L]$ -устойчиво типа S_2 относительно расширения $\mathcal{P}$. В силу компактности множество $(f, \varphi(0))\overline{Q}$ содержит некоторое Q -минимальное и, следовательно, минимальное подмножество M . Докажем дистальность расширения $\mathcal{P}|_M: (M, S) \rightarrow (\overline{fS}, S)$ (здесь $\mathcal{P}|_M$ – сужение отображения $\mathcal{P}$ на множество M). В силу теоремы 1 из [18] достаточно доказать дистальность расширения $\mathcal{P}|_M: (M, D^{-1}) \rightarrow (\overline{fS}, D^{-1})$. Пусть $y \in \overline{fS}$ и точки x и z из M таковы, что $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(z) = y$. Предположим, что точки x и z D^{-1} -проксимальны; $\alpha \in \mathcal{U}[\overline{fS} \times W]$ – произвольное окружение. И пусть β – окружение, соответствующее окружению α в силу D -устойчивости типа S_1 относительно расширения $\mathcal{P}$ множества $(f, \varphi(0))\overline{Q}$. В силу D^{-1} -проксимальности точек x и z найдется элемент $p \in D$ такой, что $(xp^{-1}, zp^{-1}) \in \beta$. В таком случае $(x, z) \in \alpha$. В силу произвольности окружения α из $(x, z) \in \alpha$ следует, что $x = z$. Мы доказали дистальность слоя расширения $\mathcal{P}|_M$ над точкой y . В

силу произвольности точки y и дистальности множества $\overline{fS}$ расширение $\mathcal{P}|_M$ дистально. В таком случае отображение $\mathcal{P}|_M$ открыто. Из $[L]$ -устойчивости типа S_2 множества $\overline{(f, \varphi(0))Q}$ относительно расширения $\mathcal{P}$ следует локальная L -проксимальность [18] каждого слоя расширения $\mathcal{P}|_M$. Согласно теореме 4 из [18] слои расширения $\mathcal{P}|_M$ конечны. Мы находимся в условиях теоремы 3 из [18]. Значит, множество M регионально дистально, следовательно, почти периодически. Согласно лемме 1 из [18] во множестве M существует точка (f, ω) , Q -проксимальная точке $(f, \varphi(0))$. Можно считать, что $\omega = \psi(0)$ для некоторого решения ψ уравнения (1). Заметим, что согласно лемме 3 решение ψ SS -почти периодически в смысле Бора. Пусть $\alpha \in \mathcal{U}[\overline{fS} \times W]$ – произвольное окружение и $\beta \in \mathcal{U}[\overline{fS} \times W]$ – окружение, соответствующее α в силу D -устойчивости множества $\overline{(f, \varphi(0))Q}$ типа S_1 относительно расширения $\mathcal{P}$. Так как точка $(f, \varphi(0))$ Q -проксимальна точке $(f, \psi(0))$, то $((f, \varphi(0)), (f, \psi(0)))d \in \beta$ для некоторого элемента $d \in Q$. В таком случае $((f, \varphi(0)), (f, \psi(0)))(d + D) \subset \alpha$, значит точка $(f, \varphi(0))$ DQ -регионально дистальна относительно расширения $\mathcal{P}$. Согласно лемме 5 решение φ является DQ -асимптотически почти периодическим.

Докажем $[L](L + Q)$ -асимптотическую почти периодичность решения φ . В силу $[L]$ -устойчивости типа S_2 множества $\overline{(f, \varphi(0))Q}$ относительно расширения $\mathcal{P}$ существует окружение $\beta \in \mathcal{U}[\overline{fS} \times W]$ такое, что для произвольного окружения $\alpha \in \mathcal{U}[\overline{fS} \times W]$ существует пара $(A, d) \in [L] \times Q$, для которой

$$((\overline{(f, \varphi(0))Q} \times \overline{fS} \times W) \cap R_{\mathcal{P}} \cap \beta)(d + A) \subset \alpha. \quad (5)$$

Из Q -проксимальности точек $(f, \varphi(0))$ и $(f, \psi(0))$ следует, что $((f, \varphi(0)), (f, \psi(0)))p \in \beta$ для некоторого элемента $p \in Q$. В таком случае $((f, \varphi(0)), (f, \psi(0)))(p + d + A) \subset \alpha$ в силу соотношения (5), значит точка $(f, \varphi(0))$ $[L](L + Q)$ -регионально дистальна относительно расширения $\mathcal{P}$. Согласно лемме 5 решение φ $[L](L + Q)$ -асимптотически почти периодически.

Нижеследующие определения идейно ничем не отличаются от определений 6, однако в них реализована концепция обобщения предела на бесконечности через некоторое абстрактное отношение на S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $D, Q \subset S$; $[D]$ – некоторая непустая совокупность подмножеств из D ; ρ – некоторое отношение на S ; φ – решение уравнения (1).

Решение φ называется $\rho[D]Q$ -устойчивым, если для любого $\varepsilon \in \mathcal{U}[W]$ существуют $\delta \in \mathcal{U}[W]$ и $A \in [D]$ такие, что для произвольного решения ψ уравнения (1) и произвольного $d \in Q$ из условия $(\varphi(d), \psi(d)) \in \delta$ следует для любого $a \in A$, $(a, d) \in \rho$, соотношение $(\varphi(a), \psi(a)) \in \varepsilon$.

Решение φ называется $\rho[D]Q$ -притягивающим, если существует $\delta \in \mathcal{U}[W]$ такое, что для произвольного $\varepsilon \in \mathcal{U}[W]$ существует пара $(A, p) \in [D] \times D$ такая, что для любого решения ψ уравнения (1) и любого $d \in Q$ из условия $(\varphi(d), \psi(d)) \in \delta$ следует, что $(\varphi(a), \psi(a)) \in \varepsilon$ для всех $a \in A$, $(a, p + d) \in \rho$.

Решение φ называется $\rho[D]Q$ -асимптотически рекуррентным ($\rho[D]Q$ -асимптотически слабо дистальным, $\rho[D]Q$ -асимптотически дистальным, $\rho[D]Q$ -асимптотически почти периодическим), если во множестве $\overline{\varphi Q}$ существует SS -рекуррентное в смысле Биркгофа (слабо SS -дистальное, SS -дистальное, SS -почти периодическое в смысле Бора) решение ψ уравнения (1) такое, что для любого $\varepsilon \in \mathcal{U}[W]$ существует

пара $(A, d) \in [D] \times Q$, для которой при всех $a \in A$, $(a, d) \in \rho$, выполняется соотношение $(\varphi(a), \psi(a)) \in \varepsilon$.

Если $[D] = \{D\}$, то в приведенных определениях квадратные скобки опускаем.

При некоторых ограничениях на S , ρ , D и Q можно доказывать аналоги теорем 1–3. В этих доказательствах символом $V(\alpha, \delta)$ мы обозначаем элемент базы равномерности $\mathcal{U}[\overline{fS} \times W]$, определяемый правилом $V(\alpha, \delta) = \{((a, b), (m, n)) \mid (a, m) \in \alpha, (b, n) \in \beta\}$ (здесь $\alpha \in \mathcal{U}[\overline{fS}]$, $\delta \in \mathcal{U}[W]$).

ТЕОРЕМА 4. Пусть Q – наполненная подполугруппа из S , $0 \in Q$, $D \subset S$; функция f SQ -рекуррентна в смысле Биркгофа, φ – $\tau(W)$ -поглощаемое решение уравнения (1) и множество $\overline{(f, \varphi(0))Q}$ компактно. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если решение φ $\rho[D]Q$ -устойчиво, то оно $\rho[D]Q$ -асимптотически рекуррентно;
- 2) если $0 \in D$ и решение φ $\rho[D]Q$ -притягивающее, то оно $\rho[D](Q + D)$ -асимптотически рекуррентно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть решение φ $\rho[D]Q$ -устойчиво. В условиях теоремы множество $\overline{fS}$ компактно и минимально. Во множестве $\overline{(f, \varphi(0))Q}$ найдется Q -минимальное, следовательно, минимальное множество M . Согласно лемме 1 из [18] существует точка $(f, w) \in M$, Q -проксимальная точке $(f, \varphi(0))$. Считаем решение ψ уравнения (1) таковым, что $w = \psi(0)$. Пусть $\varepsilon \in \mathcal{U}[W]$ и $\alpha \in \mathcal{U}[\overline{fS}]$ произвольны, а $\delta \in \mathcal{U}[W]$ и $A \in [D]$ соответствуют ε в силу $\rho[D]Q$ -устойчивости решения φ . В силу Q -проксимальности точек $(f, \varphi(0))$ и $(f, \psi(0))$ существует $d \in Q$ такое, что $((f_d, \varphi(d)), (f_d, \psi(d))) \in V(\alpha, \delta)$. Поэтому $(\varphi(d), \psi(d)) \in \delta$ и, следовательно, $(\varphi(a), \psi(a)) \in \varepsilon$ для всех $a \in A$, $(a, d) \in \rho$. Поскольку множества $\overline{(f, \varphi)Q}$ и $\overline{(f, \varphi(0))Q}$ изоморфны, а точка $(f, \psi(0))$ принадлежит компактному минимальному множеству, то и точка (f, ψ) принадлежит компактному минимальному множеству. В таком случае функция ψ SS -рекуррентна в смысле Биркгофа. Поскольку, очевидно, $\psi \in \overline{\varphi Q}$, то утверждение 1) теоремы доказано. Аналогично доказывается утверждение 2) теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть S – группа, D и Q – наполненные подполугруппы из S , $L \subset S$, $0 \in Q \cap L$, $Q \subset D$; отношение ρ таково, что для всех $d \in D$, $l \in Q$ $(d + l, l) \in \rho$; функция f слабо SQ -дистальна (SQ -дистальна); φ – $\tau(W)$ -поглощаемое решение уравнения (1) и множество $\overline{(f, \varphi(0))Q}$ компактно. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если решение φ ρDQ -устойчиво, то оно ρDQ -асимптотически слабо дистально (ρDQ -асимптотически дистально);
- 2) если решение φ ρDQ -устойчиво и $\rho[L]Q$ -притягивающее, то оно $\rho[L](L + Q)$ -асимптотически слабо дистально ($\rho[L](L + Q)$ -асимптотически дистально).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы следует DQ -устойчивость решения φ . Кроме этого, множество $\overline{fS}$ компактно, минимально и точка f дистальна в $\overline{fS}$ (и множество $\overline{fS}$ дистально). Как и в доказательстве теоремы 4, во множестве $\overline{(f, \varphi(0))Q}$ найдем компактное минимальное множество M , а во множестве M найдем точку $(f, \psi(0))$,

Q -проксимальную точку $(f, \varphi(0))$. Кроме этого, точка $(f, \psi(0))$ дистальна во множестве M (множество M дистально) и ψ – решение уравнения (1). В таком случае решение ψ слабо SS -дистально (SS -дистально) и $\psi \in \overline{\varphi Q}$. Пусть $\varepsilon \in \mathcal{U}[W]$ и $\alpha \in \mathcal{U}[\overline{fS}]$ произвольны, а $\delta \in \mathcal{U}[W]$ соответствует ε в силу ρDQ -устойчивости решения φ . В силу Q -проксимальности точек $(f, \varphi(0))$ и $(f, \psi(0))$ существует элемент $d \in Q$, для которого $((f_d, \varphi(d)), (f_d, \psi(d))) \in V(\alpha, \delta)$. Поэтому $(\varphi(d), \psi(d)) \in \delta$ и для всех $a \in D$, $(a, d) \in \rho$, выполняется соотношение $(\varphi(a), \psi(a)) \in \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть S – группа, D и Q – наполненные подполугруппы из S , причем полугруппа D такова, что для некоторого компакта K из D всякая открыто-замкнутая подполугруппа из D , содержащая K , совпадает с D ; $L \subset S$, $0 \in D \cap Q \cap L$; $Q \cup L \subset D$; отношение ρ таково, что для всех $d \in D$, $p \in Q$, $l \in L$ $(d + p, p) \in \rho$ и $(d + l, l) \in \rho$; φ – $\tau(W)$ -поглощаемое решение уравнения (1). Кроме того, пусть выполнены условия:

- 1) множество $\overline{(f, \varphi(0))Q}$ компактно;
- 2) функция f SQ -почти периодична в смысле Бора;
- 3) решение φ ρDQ -устойчиво и $\rho[L]Q$ -притягивающее.

Тогда решение φ ρDQ - и $\rho[L](L + Q)$ -асимптотически почти периодично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы следует, что решение φ DQ -устойчиво и множество $\overline{fS}$ компактно, минимально и почти периодично. Как и в доказательстве теоремы 3, во множестве $\overline{\varphi Q}$ найдется SS -почти периодическое в смысле Бора решение ψ уравнения (1) такое, что точки $(f, \varphi(0))$ и $(f, \psi(0))$ Q -проксимальны. Пусть $\varepsilon \in \mathcal{U}[W]$ и $\alpha \in \mathcal{U}[\overline{fS}]$ произвольны и $\delta \in \mathcal{U}[W]$ соответствует ε в силу ρDQ -устойчивости решения φ . В силу Q -проксимальности точек $(f, \varphi(0))$ и $(f, \psi(0))$ существует $d \in Q$ такое, что $((f_d, \varphi(d)), (f_d, \psi(d))) \in V(\alpha, \delta)$. Поэтому из условия $(\varphi(d), \psi(d)) \in \delta$ следует соотношение $(\varphi(a), \psi(a)) \in \varepsilon$ для всех $a \in A$, $(a, d) \in \rho$. Значит, решение φ ρDQ -асимптотически почти периодично. Аналогично доказываем $\rho[L](L + Q)$ -асимптотическую почти периодичность решения φ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теоремы 1–6 верны, если условие $\tau(W)$ -поглощаемости решения φ заменить условием: φ – компактное решение уравнения (1) в полных производных. При этом вместо компактности множества $\overline{(f, \varphi(0))Q}$ достаточно потребовать компактность множества $\overline{fQ}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теоремы 1–6 и их аналоги согласно замечанию 1 для уравнений в полных производных верны, если полугруппы Q и D топологически порождают группу S . Топологическую порождаемость множеством группы мы понимаем в следующем смысле. Пусть S – топологическая группа, $L^* = L \cup (-L)$ и M – множество всевозможных конечных сумм элементов из L^* . Если $S = \overline{M}$, то говорим, что множество L топологически порождает группу S (символом $-L$ обозначаем множество $\{p \mid -p \in L\}$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Авербух В. И., Смолянов О. Г. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // УМН. 1967. Т. 22. № 6(138). С. 201–260.
- [2] Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск: Наука и техника, 1983.
- [3] Гайшун И. В. Линейные уравнения в полных производных. Минск: Наука и техника, 1989.

- [4] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1957.
- [5] Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1968.
- [6] Герко А. И. Некоторые теоремы существования устойчивых по Лагранжу, устойчивых по Пуассону, рекуррентных в смысле Биркгофа, дистальных и почти периодических в смысле Бора решений многомерных дифференциальных уравнений // Изв. АН ССР Молдова. Матем. 1991. № 1. С. 7–13.
- [7] Герко А. И. Согласованные решения многомерных дифференциальных уравнений // Изв. АН РМ. Матем. 1993. № 1. С. 85–90.
- [8] Герко А. И. Согласованные решения линейных многомерных дифференциальных уравнений // Изв. АН РМ. Матем. 1994. № 1. С. 42–47.
- [9] Щербаков В. А. Многомерные динамические системы // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 5. С. 739–747.
- [10] Герко А. И. Согласованные решения квазилинейных многомерных дифференциальных уравнений // Изв. АН РМ. Матем. 1995. № 1. С. 3–11.
- [11] Hâncu V. I. Приводимость линейных вполне интегрируемых систем с квазипериодическими коэффициентами // Изв. АН РМ. Матем. 1996. № 1. С. 24–30.
- [12] Glavan V. A., Hâncu V. I. Partial recurrent solutions of completely integrable systems // Изв. АН РМ. Матем. 1998. № 1(26). С. 103–112.
- [13] Бронштейн И. У., Черний В. Ф. О расширениях динамических систем с равномерно асимптотически устойчивыми точками // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 7. С. 1225–1230.
- [14] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [15] Бронштейн И. У. Расширения минимальных групп преобразований. Кишинев: Штиинца, 1975.
- [16] Bronstein I. U. Extensions of Minimal Transformation Groups: Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1979.
- [17] Герко А. И. Рекурсивность, минимальные множества и устойчивость по Ляпунову в полугруппах преобразований // Матем. исследования (Кишинев). 1972. № 24. С. 62–80.
- [18] Герко А. И. Об асимптотических относительно расширения свойствах точек топологических полугрупп преобразований // Изв. АН РМ. Матем. 1995. № 2–3. С. 66–75.
- [19] Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
- [20] Келли Дж. Л. Общая топология. М.: Наука, 1968.
- [21] Герко А. И. Poisson stability of mappings with respect to a semigroup // Изв. АН РМ. Матем. 1998. № 1. С. 95–102.
- [22] Левитан Б. М. Почти периодические функции. М., 1953.
- [23] Щербаков В. А. Устойчивость по Пуассону движений динамических систем и решений дифференциальных уравнений. Кишинев: Штиинца, 1985.
- [24] Auslander L., Hahn F. Real functions coming from flows and concepts of almost periodicity // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 415–426.
- [25] Knapp A. W. Distal functions on groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 128. P. 1–40.
- [26] Бронштейн И. У. К теории дистальных минимальных множеств и дистальных функций // Докл. АН СССР. 1967. Т. 172. № 2. С. 255–257.
- [27] Чебан Д. Н. Асимптотическая устойчивость по Пуассону решений операторных уравнений // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 3. № 8. С. 1411–1417.