Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Быковская, О многомерном обобщении теоремы Лагранжа о цепных дробях, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 3, 343–360

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9020>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:17:49

О многомерном обобщении теоремы Лагранжа о цепных дробях

А. В. Быковская

Предлагается многомерный геометрический аналог теоремы Лагранжа о цепных дробях. Многомерное обобщение геометрической интерпретации цепной дроби использует понятие полиэдра Клейна – выпуклой оболочки ненулевых точек решетки $\mathbb{Z}^n$, содержащихся внутри некоторого n -мерного симплицеального конуса с вершиной в начале координат. Доказывается критерий полупериодичности границы полиэдра Клейна, а также утверждение о непустом пересечении границ полиэдров Клейна, соответствующих заданному симплицеальному конусу и конусу, полученному некоторой его модификацией.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Результаты, описанные в этой работе, относятся к многомерному обобщению теоремы Лагранжа о цепных дробях, которая в классической формулировке утверждает, что *число α является квадратичной иррациональностью тогда и только тогда, когда, начиная с некоторого момента, его разложение в цепную дробь периодически.*

Для перехода к геометрическому аналогу рассмотрим на плоскости с введенной системой координат две прямые, порожденные векторами $(1, \alpha)$ и $(1, \beta)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\alpha \neq \beta$, α – число из теоремы Лагранжа. Эти прямые разбивают плоскость на четыре угла. Для каждого угла рассмотрим выпуклую оболочку ненулевых целочисленных точек, содержащихся в нем. Полученные 4 неограниченных многоугольника называются *полигонами Клейна*. Существует соответствие между последовательностью целочисленных длин сторон и целочисленных углов полигона Клейна с одной стороны и последовательностью неполных частных в разложении α в цепную дробь с другой стороны, а именно, с некоторого момента последовательности соответствующих величин совпадают. Под *целочисленной длиной* отрезка, концы которого – целочисленные точки, понимается число, на единицу большее количества целочисленных точек, содержащихся во внутренности этого отрезка. *Целочисленным углом* между двумя такими отрезками с общей вершиной называется число, равное отношению площади параллелограмма, натянутого на отрезки, к произведению их целочисленных длин. Теперь мы можем дать естественную геометрическую интерпретацию теоремы Лагранжа (приведенную в [1]).

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (грант № МК-1226.2010.1).

УТВЕРЖДЕНИЕ (Периодическая формулировка). *Следующие два условия эквивалентны:*

- (1) *угол K инвариантен относительно действия некоторого оператора из пространства $SL_2(\mathbb{Z})$ с различными действительными положительными собственными значениями;*
- (2) *комбинаторная структура границы полигона Клейна, соответствующего углу K , оснащенная целочисленными длинами сторон и целочисленными углами между соседними сторонами, периодична.*

УТВЕРЖДЕНИЕ (Полупериодическая формулировка). *Следующие два условия эквивалентны:*

- (1) *луч с вершиной в начале координат, соответствующий вектору $(1, \alpha)$, является собственным для некоторого оператора из $SL_2(\mathbb{Z})$ с различными действительными положительными собственными значениями;*
- (2) *комбинаторная структура границы полигона Клейна, соответствующего углу K , одной из сторон которого является указанный луч, оснащенная целочисленными длинами сторон и целочисленными углами между соседними сторонами, периодична, начиная с некоторого момента.*

В многомерном случае можно ввести аналогичные конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ — n -мерный симплициальный конус с вершиной в начале координат O . Выпуклая оболочка K ненулевых точек решетки $\mathbb{Z}^n$ (соответствующей базису σ_0), содержащихся в C , называется *полиэдром Клейна*, соответствующим решетке $\mathbb{Z}^n$ и конусу C .

Позднее мы наложим некоторые естественные условия на конус C , при которых поверхность соответствующего полиэдра Клейна является $(n - 1)$ -мерной полиэдральной поверхностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^{n-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Граница Π полиэдра Клейна K называется *парусом*.

В работе [2] предлагается многомерный аналог периодической формулировки для двумерного случая. В настоящей работе предлагается многомерный аналог полупериодической формулировки. Для некоторой полугруппы линейных операторов $\mathfrak{A}$ и специальным образом определяемого по $\mathfrak{A}$ понятия полупериодичности будет верной следующая

ТЕОРЕМА. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) *существует сектор $\bar{\Pi}$, образованный гранями паруса Π , для которого выполняется*

$$A(\bar{\Pi}) \subseteq \bar{\Pi} \quad \forall A \in \mathfrak{A};$$

- (2) *существует полупериодическая цепочка вершин паруса Π .*

Значение термина “сектор” позднее также будет уточнено, а также будет показано, что эквивалентной формулировкой теоремы является утверждение о том, что *поверхности полиэдров Клейна, соответствующих собственному конусу C оператора из $\mathfrak{A}$ и конусу C' , полученному некоторой модификацией конуса C , обладают непустым пересечением, содержащим сектор, описанный в сформулированной выше теореме.*

2. Формулировка основного результата. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с декартовой системой координат, заданной началом координат O и ортонормированным базисом $\sigma_0 = \{e_{01}, \dots, e_{0n}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Точки решетки $\mathbb{Z}^n$ далее всюду будем называть *целочисленными* точками.

Мы рассматриваем случай, когда конус иррационален, т.е. когда в плоскостях граней конуса нет целочисленных точек, кроме O . Тогда, как показано в [3], полиэдр Клейна является обобщенным многогранником, т.е. его пересечение с любым ограниченным многогранником тоже будет многогранником. Граница K в этом случае является $(n-1)$ -мерной полиэдральной поверхностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^{n-1}$ и состоящей из выпуклых $(n-1)$ -мерных обобщенных многогранников, среди которых, вообще говоря, могут встречаться неограниченные. Но в любом случае, каждая точка, лежащая на границе K , принадлежит лишь конечному числу граней K .

Реберную звезду вершины v паруса Π , т.е. объединение всех ребер паруса, инцидентных этой вершине, мы будем обозначать St_v .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Цепочкой* вершин паруса Π называется упорядоченный набор (конечный или бесконечный) вершин паруса Π такой, что любые две подряд идущие вершины соединены ребром.

Рассмотрим множество $\mathcal{V}_k(\Pi)$ всех цепочек длины k вершин паруса Π . Рассмотрим граф $\mathcal{G}_k(\Pi)$, вершинами которого являются точки множества $\mathcal{V}_k(\Pi)$, а ребрами – такие пары $(V, W) \in \mathcal{V}_k(\Pi) \times \mathcal{V}_k(\Pi)$, что $V \cup W \in \mathcal{V}_{k+1}(\Pi)$. Очевидно, граф $\mathcal{G}_{k+1}(\Pi)$ изоморфен реберному графу графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$. Как и в случае с вершинами паруса, упорядоченный набор (конечный или бесконечный) вершин графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$ такой, что любые две подряд идущие вершины соединены ребром, назовем *цепочкой* вершин графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$.

Рассмотрим группу операторов $SL_n(\mathbb{Z})$ и некоторую ее подгруппу $\mathfrak{A} \subseteq SL_n(\mathbb{Z})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Определим $\mathfrak{A}$ -раскраску графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$ следующим образом: две вершины $V, W \in \mathcal{G}_k$ раскрашиваются в один и тот же цвет, если существует оператор $A \in \mathfrak{A}$, для которого выполняется

$$A\left(\bigcup_{v \in V} St_v\right) = \bigcup_{v \in W} St_v$$

(сохранение порядка вершин паруса не требуется).

Пусть $\{v_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ – цепочка вершин паруса Π и любые $n-1$ подряд идущие вершины аффинно независимы (т.е. не лежат ни в какой $(n-3)$ -мерной плоскости) и принадлежат некоторой $(n-1)$ -мерной грани паруса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем называть цепочку $\{v_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ $\mathfrak{A}$ -полупериодической, если ее образы в $\mathcal{G}_n$ и $\mathcal{G}_{n+1}$ имеют периодичные, начиная с некоторого момента, $\mathfrak{A}$ -раскраски (и прообразы в $\{v_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ областей, $\mathfrak{A}$ -раскраски которых оказались периодичными, имеют неограниченное пересечение).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Было бы интересно заменить данное понятие полупериодичности на более естественное, связанное лишь с аффинной раскраской.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Оператор $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ называется *гиперболическим*, если его характеристический многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$ и все его корни – положительные вещественные числа.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Собственные значения гиперболического оператора попарно различны.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если собственные значения оператора A вещественны и попарно различны, то существует базис пространства $\mathbb{R}^n$, состоящий из собственных векторов A – *собственный базис* A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Будем называть оператор A σ -*положительным*, если $\sigma = \{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, – собственный базис оператора A и собственные значения, соответствующие e_i , $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют соотношению

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0.$$

Фиксируем базис $\sigma = \{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, собственный для некоторого гиперболического оператора, который является в нем σ -положительным. Определим множество $U^+(\sigma)$ как множество σ -положительных операторов из $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Заметим, что $U^+(\sigma)$ содержит хотя бы один гиперболический оператор. Ниже будет показано, что $U^+(\sigma)$ является полугруппой (можно также показать, что $U^+(\sigma)$ содержит свободно порожденную абелеву полугруппу ранга $(n - 1)$).

ТЕОРЕМА 1. Пусть парус Π соответствует решетке $\mathbb{Z}^n$ и иррациональному конусу $C \subset \mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) существует сектор $\bar{\Pi}$, образованный гранями паруса Π , для которого выполняется

$$A(\bar{\Pi}) \subseteq \bar{\Pi} \quad \forall A \in U^+(\sigma);$$

- (2) существует $U^+(\sigma)$ -полупериодическая цепочка $\{v_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ вершин паруса Π .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Сектором будем называть такое односвязное множество S , в котором для любой граничной точки $x \in \partial S$ выполнено:

- 1) $\forall x' \in \partial S \quad \rho_{\text{bound}}(x, x') < \infty$,
- 2) $\forall c > 0 \quad \exists x'' \in \partial S : \rho_{\text{bound}}(x, x'') > c$,
- 3) $\lim_{y \in \partial S, \rho_{\text{bound}}(x, y) \rightarrow \infty} \rho(x, y) = \infty$,

где будем понимать под $\rho_{\text{bound}}(x, y) < \infty$ расстояние между x и y вдоль границы. Очевидно, что это множество неограничено.

Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Доказательство (2) $\Rightarrow$ (1) разобьем на несколько вспомогательных теорем. Следствием доказательства одной из них будет приводимая ниже теорема 2, которая является фактически эквивалентной формулировкой утверждения теоремы 1.

Следующее определение принадлежит Е. И. Коркиной-Павловской (из неопубликованной работы).

вектор A с собственным значением λ_i . Тогда $Be_i = \mu e_i$, т.е. e_i – собственный вектор оператора B . Далее, пусть B, C коммутируют с A . Тогда $A(BC) = BAC = (BC)A$. Обратно, операторы из $SL_n(\mathbb{Z})$, матрицы которых в базисе σ имеют диагональный вид с положительными диагональными элементами, очевидно, коммутируют с A .

Аналогично, σ -положительные операторы из $U(\sigma)$ образуют полугруппу $U^+(\sigma)$. Очевидно, что она непуста, так как в собственном базисе матрица такого оператора имеет диагональный вид $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ с $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$, и наоборот, каждый оператор из $SL_n(\mathbb{Z})$ с такой матрицей входит в $U^+(\sigma)$, а мы уже подчеркивали, что найдется гиперболический σ -положительный оператор.

ТЕОРЕМА 6. *Рассмотрим парус Π , соответствующий решетке $\mathbb{Z}^n$ и σ -флаговому в обобщенном смысле иррациональному конусу $C \subset \mathbb{R}^n$. Тогда существует сектор $\bar{\Pi}$, образованный гранями паруса Π , для которого выполняется*

$$B(\bar{\Pi}) \subseteq \bar{\Pi} \quad \forall B \in U^+(\sigma).$$

Импликация $(2) \Rightarrow (1)$ теоремы 1, очевидно, доказывается последовательным применением теорем 3, 4 и 6.

4. Доказательства теорем 3, 4. Прежде всего заметим, что если парус Π соответствует собственному конусу C гиперболического оператора A , то A осуществляет автоморфизм паруса Π . Действительно, он переводит конус C в себя, а также внутренние точки C во внутренние точки C , и точки вне C в точки вне C . Значит, он осуществляет автоморфизм множества целочисленных точек, содержащихся в C . Автоморфизм границы их выпуклой оболочки следует из линейности оператора A и выпуклости этого множества.

Без ограничения общности будем считать, что за полупериодичность отвечает часть цепочки $\{v_i\}_{i \geq 0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В работе [2] доказывается аналогичное утверждение. В [2] периодичной является вся цепочка, однако, доказательство содержит рассуждения, которые доказывают утверждение теоремы 2.

Следующее доказательство является слегка модифицированным доказательством из [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Рассмотрим линейную форму $\langle \mathbf{h}, \cdot \rangle$ такую, что ни одна из компонент вектора $\mathbf{h}$ в базисе σ^* , двойственном к базису $\sigma = \{e_i\}$ (собственному для A), не равна нулю, и такую, что плоскость $\pi_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{h}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$ пересекает ребра звезды St_{v_0} во внутренних точках. Оператор A , действуя на цепочку вершин $\{v_i\}_{i \geq 0}$, “сдвигает” ее вдоль себя, а значит, количество ребер в каждой из реберных звезд не превышает некоторого k_0 , а в силу того, что $A \in SL(\mathbb{Z})$, выполняется равенство для n -мерных объемов $\det(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) = \det(Av_{i_1}, \dots, Av_{i_n})$. Тогда

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \text{vol}_n(\text{conv}(\mathbf{0}, C \cap A^m(\pi_{\mathbf{h}}))) > 0. \quad (1)$$

Обозначим через $w_1, \dots, w_n$ единичные векторы, задающие направления ребер конуса C . Плоскость $\pi_{\mathbf{h}}$ пересекает каждое из ребер, задаваемых $w_1, \dots, w_n$. Действительно, если перенести ее параллельно так, чтобы она содержала вершину v_0 ,

получим, что она отделяет от конуса множество целочисленных точек, и содержит лишь одну целочисленную точку. Поэтому пересечение, очевидно, имеет место. Тогда получаем, что

$$A^m(\pi_{\mathbf{h}} \cap \mathbf{aff}(\mathbf{0}, \mathbf{0} + w_i)) = \{\mathbf{0} + \lambda w_i \mid \langle (A^*)^{-m} \mathbf{h}, \lambda w_i \rangle = 1\} = \left\{ \mathbf{0} + w_i \frac{1}{\langle (A^*)^{-m} \mathbf{h}, w_i \rangle} \right\}.$$

Стало быть, неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\langle (A^*)^{-m} \mathbf{h}, w_i \rangle} > 0$$

(т.е. $A^m(\pi_{\mathbf{h}})$ не содержит начало координат и не приближается к нему слишком близко), из которого следует, что

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \prod_{i=1}^n \langle (A^*)^{-m} \mathbf{h}, w_i \rangle < \infty. \quad (2)$$

Будем считать, что e_i соответствует собственному значению λ_i . Тогда $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$. Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через M_i собственное подпространство оператора A , соответствующее λ_i . Получаем градуировку: $\mathbb{R}^n = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$.

Положим $L_i = \bigoplus_{j=1}^i M_j$. Докажем, что L_i содержит ровно $\dim L_i = i$ ребер конуса C .

Получаем фильтрацию

$$\mathbb{R}^n = L_n \supset \dots \supset L_1 = M_1.$$

Положим также

$$r_i = \max\{r : w_i \in L_r\}.$$

Поскольку $\{\lambda_i\}$ упорядочены по убыванию, для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется

$$\begin{aligned} \langle (A^*)^{-m} \mathbf{h}, w_i \rangle &= \langle \mathbf{h}, A^{-m} w_i \rangle \\ &= c_1^i(\mathbf{h}) \lambda_1^{-m} + \dots + c_{r_i}^i(\mathbf{h}) \lambda_{r_i}^{-m} \asymp \lambda_{r_i}^{-m} \quad \text{при } m \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

где $c_1^i(\mathbf{h}), \dots, c_{r_i}^i(\mathbf{h})$, $i = 1, \dots, n$, – некоторые константы при фиксированном $\mathbf{h}$.

Стало быть,

$$\prod_{i=1}^n \langle (A^*)^{-m} \mathbf{h}, w_i \rangle \asymp \prod_{i=1}^n \lambda_{r_i}^{-m} \asymp \left(\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_{r_i}} \right)^m \quad \text{при } m \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

поскольку $\prod_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$. Тогда $i \leq r_i$ для любого i (в противном случае для некоторого i подпространство размерности $r_i < i$ содержит i линейно независимых векторов – противоречие). Тогда для любого i $\lambda_i \geq \lambda_{r_i}$, и в (3) каждый множитель $\lambda_i / \lambda_{r_i} \geq 1$. Тогда из (2) и (3) следует, что $i = r_i$, а значит, L_i содержит ровно $\dim L_i = i$ ребер конуса C . Это, очевидно, завершает доказательство теоремы.

5. Доказательства теорем 5, 6. Сначала докажем два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Собственный конус C , соответствующий некоторому гиперболическому оператору A , иррационален.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. плоскость некоторой $(n - 1)$ -мерной грани F содержит ненулевую целочисленную точку $\mathbf{a}$. Эта плоскость инвариантна относительно действия A , поэтому и образ $\mathbf{a}$ содержится в этой же плоскости. Многократно применяя оператор A , получаем последовательность линейно независимых целочисленных векторов

$$\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k, \quad 1 \leq k < n, \quad A\bar{a}_j = \bar{a}_{j+1}, \quad A\bar{a}_k = \sum_{i=1}^k c^i \bar{a}_i, \quad c^i \in \mathbb{Q}.$$

Тогда они задают k -мерное инвариантное целочисленное пространство. Выберем базис $\mathbb{R}^n$ так, что его первые k векторов совпадают с $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$. Тогда матрица оператора A представима в этом базисе в виде

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где B – некоторая матрица размера $k \times k$ с рациональными значениями. Это означает, что у характеристического многочлена оператора A есть делитель с рациональными коэффициентами, что противоречит гиперболичности A .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Каждая грань размерности $(n - 1)$ паруса Π , соответствующего решетке $\mathbb{Z}^n$ и конусу $C \subset \mathbb{R}^n$, собственному для некоторого гиперболического оператора A , ограничена, и плоскость этой грани имеет компактное пересечение с конусом C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что некоторая грань F паруса Π неограничена. Очевидно, что это возможно лишь в том случае, когда $(n - 1)$ -мерная плоскость π этой грани параллельна хотя бы одному из ребер конуса C . То же самое должно выполняться в случае, если пересечение π с конусом C не является компактным.

Рассмотрим двойственный конус C° конуса C (задается ребрами e_j^* , $j = 1, \dots, n$: $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_i^j$, $i = 1, \dots, n$).

$$\langle Ae_i, e_j^* \rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j^* \rangle = \delta_i^j \cdot \lambda_i = \langle e_i, A^* e_j^* \rangle.$$

Выписывая эти соотношения при фиксированном j и $i = 1, \dots, n$, получаем, что $A^* e_j^* = \mu e_j^*$, т.е. e_j^* – собственный вектор A^* . Из этих же соотношений следует, что $\mu = \lambda_j$, и собственные значения операторов A и A^* , соответствующие векторам e_j и e_j^* , совпадают. С другой стороны, матрица оператора A^* равна транспонированной матрице оператора A при выборе ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$, т.е. A^* – гиперболический оператор. Тогда, используя рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве утверждения 1, получим, что плоскости граней C° не могут содержать ненулевые целочисленные точки.

Рассмотрим вектор $\mathbf{w}$ вида $\mathbf{w} = (1, w_2, \dots, w_n)$ (в базисе σ_0), задающий направление ребра конуса, параллельного π . Если его координаты линейно зависимы над $\mathbb{Z}$,

то это означает, что в ортогональной ему гиперплоскости есть ненулевая целочисленная точка. Однако соответствующая плоскость является плоскостью грани конуса C° , т.е. получаем противоречие с доказанным выше. Значит, координаты $\mathbf{w}$ в базисе σ_0 линейно независимы. Тогда можно применить теорему Кронекера: если $1, w_2, \dots, w_n$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$, то для любых $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ найдутся целые числа $t, p_2, \dots, p_n$ такие, что

$$t > N \quad \text{и} \quad |tw_i - p_i| < \varepsilon \quad \forall i = 2, \dots, n, \quad (4)$$

т.е. сколь угодно близко к лучу, задаваемому $\mathbf{w}$, и сколь угодно далеко от начала луча найдется целочисленная точка (точка $(t, p_2, \dots, p_n)$).

Плоскость π отделяет часть конуса, в которой нет целочисленных точек. В плоскости π в силу того, что полиэдр Клейна, соответствующий Π , является обобщенным многогранником, найдется хотя бы одна целочисленная точка, в которую можно перенести из начала координат луч, соответствующий ребру, задаваемому $\mathbf{w}$. Обозначим этот новый луч как $\mathbf{w}_F$. Мы можем выбрать такие $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $N = N_0$ в рассуждении выше, что целочисленные точки, удовлетворяющие (4) с $\varepsilon < 2\varepsilon_0$ и $N > N_0$, будут содержаться внутри конуса C . Значит, эти точки могут попадать лишь в полупространство $\mathbb{R}_{1/2}^n(\pi) \supset \pi$, отделяемое π . Возьмем целочисленную точку, удовлетворяющую (4) с $\varepsilon < \varepsilon_0$, $N > N_0$, не лежащую в π (предположим, такая найдется), и перенесем в нее параллельно луч $\mathbf{w}_F$, а также плоскость π . Соответствующие луч и плоскость обозначим как $\mathbf{w}'$ и π' . Но тогда множество $\mathfrak{M}$ целочисленных точек, удовлетворяющих (4) для луча $\mathbf{w}'$ с $\varepsilon < 2\varepsilon_0$ и $N > N_0$, содержится в полупространстве $\mathbb{R}_{1/2}^n(\pi')$, отделяемом π' ($\mathbb{R}_{1/2}^n(\pi') \subset \mathbb{R}_{1/2}^n(\pi)$). Целочисленные точки, удовлетворяющие (4) для луча $\mathbf{w}_F$ с $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $N > N_1$ для некоторого $N_1 > N_0$, попадают в $\mathfrak{M}$. Но тогда все они отделены от $\mathbf{w}_F$ плоскостью π' , параллельной $\mathbf{w}_F$, — получаем противоречие с теоремой Кронекера.

Если мы не сможем выбрать точку, удовлетворяющую (4) для луча $\mathbf{w}_F$ с $\varepsilon < \varepsilon_0$, $N > N_0$, не лежащую в π , то это означает, что все такие точки лежат в $(n-1)$ -мерной плоскости π . Предположим, что в π найдется лишь $k < n$ линейно независимых целочисленных точек (т.е. соответствующие им целочисленные вектора линейно независимы). Тогда они лежат в некоторой $(k-1)$ -мерной плоскости. Она может быть параллельной $\mathbf{w}_F$, может пересекаться с $\mathbf{w}_F$, а может содержать $\mathbf{w}_F$. Первые два случая противоречат теореме Кронекера. Значит, эта плоскость содержит $\mathbf{w}_F$. Дополним множество этих k точек любыми $n-k$ целочисленными точками так, что полученные n точек линейно независимы (что, очевидно, всегда можно сделать). Полученные n точек задают $(n-1)$ -мерное пространство $\bar{\pi}$, которое также содержит $\mathbf{w}_F$. Таким образом, либо π , либо $\bar{\pi}$ содержит n линейно независимых целых точек. Но тогда вектор нормали к соответствующей гиперплоскости целочисленен, а значит, в гиперплоскости, ортогональной $\mathbf{w}$, найдется ненулевая целочисленная точка. Это противоречит доказанной выше иррациональности конуса C° . Полученное противоречие завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Для доказательства теоремы будем использовать ряд лемм из неопубликованной работы Е. И. Коркиной-Павловской, основная часть доказательства теоремы 5 также приводится в этой работе. Далее везде предполагаем, что выполняются условия теоремы 5.

ЛЕММА 1. Для любой точки p , лежащей внутри собственного конуса $\tilde{C}$, ее образ $A^N p$ лежит внутри $\tilde{\sigma}$ -флагового конуса C , начиная с некоторого $N = N_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть p_i и $p_i^{(N)}$ — i -е координаты точек p и $A^N p$ в базисе σ соответственно. Пусть $q_i^{(N)}$ — i -я координата $A^N p$ в $\tilde{\sigma}$ -флаговом базисе. Тогда

$$\begin{aligned} q_n^{(N)} &= p_n^{(N)}, \\ q_{n-1}^{(N)} &= p_{n-1}^{(N)} + \langle p_n^{(N)} \rangle, \\ &\dots\dots\dots \\ q_1^{(N)} &= p_1^{(N)} + \langle p_2^{(N)}, \dots, p_n^{(N)} \rangle \end{aligned}$$

(здесь под $\langle x, \dots, y \rangle$ подразумевается некоторая линейная комбинация $x, \dots, y$).

Пусть собственные числа оператора A в собственном базисе $\tilde{\sigma} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — это $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$, соответственно. Тогда

$$p_i^{(N)} = \lambda_i^{(N)} p_i \quad \forall i \quad \text{и} \quad p_i^{(N)} / p_{i+1}^{(N)} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

и тогда

$$\begin{aligned} q_n^{(N)} &= p_n^{(N)}, \\ q_{n-1}^{(N)} &= p_{n-1}^{(N)} + o(N), \\ &\dots\dots\dots \\ q_1^{(N)} &= p_1^{(N)} + o(N). \end{aligned}$$

Это означает, что, начиная с некоторого N , знаки координат $p_i^{(N)}$ и $q_i^{(N)}$ совпадают (координаты положительны), т.е. $A^N p$ лежит внутри C .

ЛЕММА 2. Для любой точки p , не лежащей внутри собственного конуса $\tilde{C}$, ее образ $A^N p$ не лежит внутри $\tilde{\sigma}$ -флагового конуса C , начиная с некоторого $N = N_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма является очевидным следствием леммы 1, если учесть, что мы можем применить ее и для $\tilde{\sigma}' = \{\delta_1 e_1, \dots, \delta_n e_n\}$, где $\delta_i = +1$ или $\delta_i = -1$.

ЛЕММА 3. Если некоторая гиперплоскость имеет компактное пересечение с собственным конусом $\tilde{C}$, то ее образ при действии оператора A^N имеет компактное пересечение с $\tilde{\sigma}$ -флаговым конусом C , начиная с некоторого $N = N_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Обозначим эту гиперплоскость

$$(\alpha, c) = \{p \mid \alpha p = c\}, \quad c = \text{const} > 0.$$

Ее пересечение с $\tilde{C}$ компактно, значит, все координаты α_i (в базисе $\tilde{\sigma}$) положительны. Тогда ее образ $(\alpha^{(N)}, c) = \{p \mid \alpha p = c\}$ при действии оператора A^N имеет координаты $\alpha_1^{(N)} < \dots < \alpha_n^{(N)}$. Пересечение $(\alpha^{(N)}, c)$ с tf_i определяется уравнением на t :

$$t \cdot [\alpha_i^{(N)} + \langle \alpha_{i-1}^{(N)}, \dots, \alpha_1^{(N)} \rangle] = c.$$

Значит, при больших N получаем $t \approx c / \alpha_i^{(N)}$, т.е. $0 < t < +\infty$, и пересечение $(\alpha^{(N)}, c)$ и C компактно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть $\tilde{\sigma} = \{\tilde{e}_i\}$, $i = 1, \dots, n$. $\tilde{\sigma}$ -Веерным конусом будем называть конус с вершиной в начале координат, натянутый на вектора $f_1, \dots, f_n$ вида

$$\begin{aligned} f_1 &= \tilde{e}_1, \\ f_2 &= \tilde{e}_2 - b^1 \cdot \tilde{e}_1, \\ &\dots\dots\dots \\ f_n &= \tilde{e}_n - b^{n-1} \cdot \tilde{e}_{n-1}, \end{aligned}$$

где b^j – некоторые положительные числа.

ЛЕММА 4. Для любого $\tilde{\sigma}$ -флагового конуса существует $\tilde{\sigma}$ -веерный конус, который его содержит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Для каждой точки p рассмотрим ее координаты $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ в базисе $\{g_1, \dots, g_n\}$. Тогда, очевидно, $\tilde{\sigma}$ -веерный конус задается соотношениями

$$\begin{aligned} \phi_n &= x_n \geq 0, \\ \phi_{n-1} &= x_{n-1} + b^{n-1} \cdot \phi_n \geq 0, \\ \phi_{n-2} &= x_{n-2} + b^{n-2} \cdot \phi_{n-1} \geq 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \phi_1 &= x_1 + b^1 \cdot \phi_2 \geq 0, \end{aligned}$$

где $\{x_i\}$ – координаты в $\tilde{\sigma}$.

Тогда для доказательства утверждения достаточно подобрать коэффициенты $\{b_j\}$ так, чтобы $\phi_k(f_i) \geq 0$. Это делается очень легко, если выписать выражения для всех $\phi_k(f_i)$ и последовательно подбирать $b_{n-1}, \dots, b_1$.

ЛЕММА 5. Если точка p не лежит внутри $\tilde{\sigma}$ -веерного конуса, то и ее образ Ap в нем не содержится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Воспользуемся методом, рассмотренным при доказательстве леммы 4. Очевидно, нарушается хотя бы одно из неравенств: $\phi_{n-i}(p) < 0$ (пусть i – наименьшее, при котором это верно). Тогда индукцией легко показывается, что

$$\phi_{n-j}(Ap) \leq \lambda_{n-j} \phi_{n-j}(p) \quad \forall j \leq i,$$

а значит, и для точки Ap не выполняется хотя бы одно из необходимых неравенств, т.е. она не лежит внутри конуса.

Вернемся к доказательству теоремы.

Грань F целиком лежит внутри $\tilde{C}$. По лемме 1, начиная с некоторого $N = N_0$, образ каждой вершины F при отображении A^N будет содержаться в C , а поскольку грань задается вершинами, то и образ грани при отображении A^N .

Согласно лемме 4 можно выбрать $\tilde{\sigma}$ -веерный конус $\tilde{C}$, содержащий C . По лемме 3 образ гиперплоскости π , содержащей F , при действии оператора A^N имеет компактное пересечение с $\tilde{C}$, начиная с некоторого $N = N_2$. Тогда в области конуса $\tilde{C}$ ниже плоскости $A^N(\pi)$ (будем говорить, что гиперплоскость, не содержащая 0, делит пространство на 2 полупространства: *ниже* гиперплоскости – то полупространство, которое содержит 0, и *выше* – другое) лежит лишь конечное число целочисленных

точек $p_1, \dots, p_k$. Ни одна из этих точек не содержится в $\tilde{C}$, поскольку $A^N(F)$ – грань паруса $\tilde{\Pi}$. Согласно лемме 2, начиная с некоторого $N = N_1$ ($N_1 > N_0, N_2$) точки $A^N(p_1), \dots, A^N(p_k)$ не будут содержаться в $\tilde{C}$. Точки выше $A^t(\pi)$ не могут переходить в точки ниже $A^{t+1}\pi$, так как оператор A не меняет ориентацию, а точки вне $\tilde{C}$ не могут попасть внутрь $\tilde{C}$ при действии A по лемме 5. Это означает, что, начиная с некоторого $N = N_1$ в области конуса $\hat{C}$ (а значит, и конуса C) ниже плоскости $A^N(\pi)$ не найдется ни одной целочисленной точки, тогда как плоскость $A^N(\pi)$ содержит некоторую целочисленную грань паруса $\tilde{\Pi}$. Все вершины этой грани также лежат внутри C , а значит, плоскость $A^N(\pi)$ содержит некоторую выпуклую целочисленную грань F' паруса Π . Но, возможно, в $A^N(\pi)$ найдутся целочисленные точки вне $A^N(F)$, лежащие в C , т.е. $F' \neq A^N(F)$.

Однако, заметим, что грань F размерности $n-1$ можно задать пересечением гиперплоскостей, содержащих грани, “смежные” с F (это грани, содержащие общие с F грани размерности $n-2$, которые и будут лежать в пересечениях), с гиперплоскостью, содержащей F . Как было показано выше, начиная с некоторого $N = N_3 > N_1$, образы плоскостей, содержащих эти грани $\tilde{\Pi}$, при действии оператора A^N содержат также грани паруса Π . Отсюда непосредственно следует, что $A^N(F)$ – грань Π .

Рассмотрим отображение паруса Π , соответствующего произвольному иррациональному конусу $C \subset \mathbb{R}^n$, лежащему внутри конуса, образованного векторами некоторого базиса $\tilde{\sigma} = \{\tilde{e}_i\}$, $i = 1, \dots, n$, пространства $\mathbb{R}^n$, на логарифмическую гиперплоскость. Для этого спроецируем его вдоль лучей, проходящих через 0, на “обобщенную гиперболу” – поверхность $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, где $x_1, \dots, x_n$ – координаты в базисе $\{e_i\}$. Затем эту поверхность отобразим на гиперплоскость $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0$ (логарифмическую гиперплоскость) с координатами $u_1, \dots, u_n$ в базисе $\{\tilde{e}_i\}$ с помощью отображения $u_i = \ln x_i$.

Рассмотрим образ действия оператора $A \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ с положительными собственными значениями и собственным базисом $\tilde{\sigma}$ на логарифмической гиперплоскости. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ – собственные значения, $v = v_1 \tilde{e}_1 + \cdots + v_n \tilde{e}_n$ – некоторый вектор (точка). Тогда $Av = \lambda_1 v_1 \tilde{e}_1 + \cdots + \lambda_n v_n \tilde{e}_n$. Рассмотрим теперь образы на логарифмической гиперплоскости. Образ точки v – точка

$$(\ln v_1 - \ln(v_1 \cdots v_n), \dots, \ln v_n - \ln(v_1 \cdots v_n)),$$

а образ точки Av – точка

$$(\ln v_1 + \ln \lambda_1 - \ln(v_1 \cdots v_n), \dots, \ln v_n + \ln \lambda_n - \ln(v_1 \cdots v_n))$$

(учитывая, что $\ln(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = \ln(1) = 0$). Таким образом, на логарифмической гиперплоскости действие оператора A совпадает со сдвигом на вектор $(\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Выберем базис $\tilde{\sigma} = \{\tilde{e}_i\}$, $i = 1, \dots, n$, так, чтобы конус C был $\tilde{\sigma}$ -флаговым. Очевидно, что его вектора получаются простым домножением векторов $\{e_i\}$ на соответствующие коэффициенты. Очевидно, $U^+(\sigma) = U^+(\tilde{\sigma})$.

Выберем гиперболический оператор A из полугруппы $U^+(\sigma)$. Рассмотрим парус $\tilde{\Pi}$, соответствующий решетке $\mathbb{Z}^n$ и $\tilde{\sigma}$ -конусу $\tilde{C} \subset \mathbb{R}^n$, собственному для оператора A .

Если флаговый конус C не содержится в собственном конусе $\tilde{C}$, то можно построить флаговый конус C_{inn} , содержащийся как в C , так и в $\tilde{C}$.

Действительно, если

$$f_1 = \tilde{e}_1, \quad f_2 = \tilde{e}_2 + a_2^1 \tilde{e}_1, \quad \dots, \quad f_n = \tilde{e}_n + a_n^{n-1} \tilde{e}_{n-1} + \dots + a_n^1 \tilde{e}_1$$

– векторы, задающие ребра C (для краткости будем называть их также ребрами), причем некоторые из a_j^i меньше нуля (C не содержится в $\tilde{C}$), то будем строить последовательность вложенных друг в друга конусов C_i , $i = 1, \dots, n$, $C_1 = C$, по индукции: положим $f'_1 = f_1$ и будем считать, что C_1 задается ребрами $f'_1, f_2, \dots, f_n$. Если $a_2^1 < 0$, то возьмем

$$f'_2 = f_2 + 2 \cdot |a_2^1| \cdot f_1;$$

f'_2 содержится в C_1 по построению. Тогда конус C_2 , задаваемый ребрами $f'_1, f'_2, f_3, \dots, f_n$, содержится в C_1 , причем коэффициенты разложения f'_1, f'_2 в базисе $\tilde{\sigma}$ неотрицательны. Пусть последовательность $C_1, \dots, C_k$ уже построена; для любого $i = 1, \dots, k$ конус C'_i задается ребрами $f'_1, \dots, f'_i, f_{i+1}, \dots, f_n$, причем коэффициенты разложения $f'_1, \dots, f'_i$ в базисе $\tilde{\sigma}$ неотрицательны. Рассмотрим ребро

$$f'_{k+1} = f_{k+1} + \sum_{i \leq k, a_{k+1}^i < 0} 2 \cdot |a_{k+1}^i| \cdot f'_i.$$

Оно содержится в C_k по построению, а конус C_{k+1} , задаваемый ребрами $f'_1, \dots, f'_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_n$, содержится в C_k , причем коэффициенты разложения $f'_1, \dots, f'_{k+1}$ в базисе $\tilde{\sigma}$ неотрицательны.

Конус C_n содержится в C , а также в собственном конусе $\tilde{C}$, так как коэффициенты разложения его ребер $f'_1, \dots, f'_n$ в базисе $\tilde{\sigma}$ неотрицательны. Более того, рассуждая аналогично, можно построить флаговый конус $C_{inn} \subseteq C_n$, коэффициенты разложения ребер которого в базисе $\tilde{\sigma}$ положительны.

Модифицируем конус еще раз в целях удобства работы с образом паруса Π на логарифмической гиперплоскости. Полагая, что конус C_{inn} задан ребрами вида

$$\begin{aligned} f_1 &= \tilde{e}_1, \\ f_2 &= \tilde{e}_2 + b_2^1 \tilde{e}_1, \\ &\dots \dots \dots \\ f_n &= \tilde{e}_n + b_n^{n-1} \tilde{e}_{n-1} + \dots + b_n^1 \tilde{e}_1, \end{aligned}$$

где $b_i^j > 0$, будем строить конус C' , задаваемый ребрами вида

$$\begin{aligned} f'_1 &= \tilde{e}_1, \\ f'_2 &= \tilde{e}_2 + k_1 \tilde{e}_1, \\ f'_3 &= \tilde{e}_3 + k_2 \tilde{e}_2 + k_2 k_1 \tilde{e}_1, \\ &\dots \dots \dots \\ f'_n &= \tilde{e}_n + k_{n-1} \tilde{e}_{n-1} + k_{n-1} k_{n-2} \tilde{e}_{n-2} + \dots + k_{n-1} \dots k_1 \tilde{e}_1, \end{aligned} \tag{5}$$

где $k_i > 0$.

Для этого вновь будем строить по индукции последовательность вложенных друг в друга флаговых конусов

$$C_1 \supseteq \dots \supseteq C_n, \quad C_1 = C_{inn}, \quad C_n = C'.$$

Без ограничения общности это первые две строки, и $d_i^1 d_{i+1}^2 - d_{i+1}^1 d_i^2 \neq 0$. Значит, выполняется

$$d_i^1 \neq 0, \quad d_{i+1}^2 \neq 0 \quad \text{либо} \quad d_{i+1}^1 \neq 0, \quad d_i^2 \neq 0. \quad (6)$$

Очевидно, достаточно добиться, чтобы отношение двух координат

$$\frac{k_i d_i^1 + d_{i+1}^1}{k_i d_i^2 + d_{i+1}^2} = q$$

было иррациональным числом. Заметим, что в силу (6) в знаменателе стоит ненулевое значение при любых k_i , кроме, возможно, одного значения. Выразим k_i :

$$k_i = \frac{q d_{i+1}^2 - d_{i+1}^1}{d_i^1 - q d_i^2}.$$

Для любого иррационального q , кроме, возможно, одного или двух значений (обнуляющих знаменатели) получаем выражение для k_i , при котором конус иррационален. Далее, необходима возможность выбора сколь угодно большого значения k_i . Это условие дает соотношение

$$k_i = \frac{q d_{i+1}^2 - d_{i+1}^1}{d_i^1 - q d_i^2} > w$$

для произвольного положительного w , откуда получаем соотношение на q :

$$q > \frac{d_{i+1}^1 + w d_i^1}{d_{i+1}^2 + w d_i^2}. \quad (7)$$

Таким образом, выбирая произвольное иррациональное q (за исключением одного или двух значений, возможно, обнуляющих знаменатели), удовлетворяющее (7) при достаточно большом w , находим сколь угодно большое k_i , при котором конус иррационален. Замечая, что эти рассуждения накладывают на k_i лишь конечное число требований, которые выполнимы при выборе k_i в силу рассуждений выше, получаем, что без ограничения общности можно считать, что построенный конус C' иррационален.

Теорема 5 утверждает, что образ любой грани F паруса, соответствующего $\tilde{C}$, при действии оператора A^n является гранью паруса, соответствующего $C \quad \forall n > N$ и гранью паруса, соответствующего иррациональному $\tilde{\sigma}$ -флаговому конусу $C' \quad \forall n > M$ для некоторых $M, N \geq 0$. Если всюду применять теорему 5 для всех $n > \tilde{N} = \max(N, M)$, то грань будет принадлежать обоим парусам. Тогда, очевидно, можно доказывать теорему 6 лишь для C' .

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что ребра C задаются соотношениями вида (5).

Мы рассматриваем действие операторов из $U^+(\sigma)$. Поскольку образ действия такого оператора B на гиперплоскости – сдвиг на вектор $(\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_n)$, где $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ – собственные значения B , получим, что образы таких операторов сдвигают внутрь себя любую область на логарифмической гиперплоскости, задаваемую соотношениями

$$u_1 - u_2 \geq r_1, \quad \dots, \quad u_{n-1} - u_n \geq r_{n-1}$$

или

$$u_1 - u_2 > r_1, \quad \dots, \quad u_{n-1} - u_n > r_{n-1}.$$

Соотнося это утверждение с утверждением об образе C на логарифмической гиперплоскости и теоремой 4, получаем, что образ C на логарифмической гиперплоскости задается соотношениями

$$u_1 - u_2 \geq \ln k_1, \quad \dots, \quad u_{n-1} - u_n \geq \ln k_{n-1}.$$

Образ паруса Π , соответственно, находится внутри этой области. Обозначим

$$\Omega = \{(u_1, \dots, u_n) \mid u_1 - u_2 > \ln k_1, \dots, u_{n-1} - u_n > \ln k_{n-1}\}.$$

Цушихаши в [4] доказал, что парус $\tilde{\Pi}$, соответствующий собственному конусу $\tilde{C}$ гиперболического оператора A является периодичным и фактормножество его паруса по действию группы $U(A)$ (то же, что $U(\sigma)$ в наших обозначениях) операторов из $SL_n(\mathbb{Z})$ с положительными собственными значениями, коммутирующих с A , топологически эквивалентно $(n-1)$ -мерному тору $\mathbb{T}^{n-1}$, причем группа симметрий порождается $n-1$ операторами из $U(A)$. Учитывая, что на логарифмической гиперплоскости действию операторов соответствуют параллельные переносы, получаем периодическое разбиение образа $\tilde{\Pi}$ на ячейки (будем так называть образы $(n-1)$ -мерных граней), причем в качестве фундаментального множества $\mathfrak{M}$ можно выбрать некоторое связное конечное объединение ячеек. Заметим, что те из параллельных переносов, которые сдвигают любую точку из Ω внутрь Ω , соответствуют операторам из $U^+(\sigma)$, поэтому можно показать, что $U^+(\sigma)$ содержит свободно порожденную абелеву подгруппу ранга $n-1$.

Рассмотрим часть образа $\tilde{\Pi}$, образованную ячейками и находящуюся внутри Ω . Это множество может не быть связным. Пусть $d_{\max} = \max_{x,y \in \mathfrak{M}} \rho(x,y)$. Для каждой плоскости $\pi_i = \{u_i - u_{i+1} = \ln k_i\}$ построим параллельную ей плоскость $\pi'_i = \{u_i - u_{i+1} = u_{0i}\}$, пересекающую образ конуса C так, что расстояние между π_i и π'_i равно $d_{\max}$. Рассмотрим множество образов граней $\tilde{\Pi}$, имеющих непустое пересечение с областью

$$\Omega' = \{(u_1, \dots, u_n) \mid u_1 - u_2 > u_{01}, \dots, u_{n-1} - u_n > u_{0n-1}\}.$$

Оно, очевидно, связно и содержится в области Ω . Дополним это множество теми образами граней $\tilde{\Pi}$ внутри области Ω , которые не нарушают связности (“максимальное” связное множество). Очевидно, это можно сделать единственным способом. В частности, можно показать, что это множество односвязно.

Обозначим эту область $\tilde{\Pi}'$. Рассмотрим прообраз $\tilde{\Pi}$ области $\tilde{\Pi}'$ в $\mathbb{R}^n$. Он является областью паруса $\tilde{\Pi}$, а в силу того, что $\tilde{\Pi}'$ содержится внутри области Ω , $\tilde{\Pi}$ содержится в C . Но это означает, что $\tilde{\Pi}$ является частью паруса Π , поскольку плоскость каждой грани $\tilde{\Pi}$ отделяет от $\tilde{C}$ область, в которой не содержится целочисленных точек, а C содержится в $\tilde{C}$.

Индукцируемое оператором B действие на логарифмической гиперплоскости будем обозначать B' . Как было показано выше, если B – гиперболический $\tilde{\sigma}$ -положительный оператор, то при действии B' ячейка $F' \subset \tilde{\Pi}'$ перейдет в ячейку, также содержащуюся в области Ω . Однако, возможно, этот образ не входит в связную область $\tilde{\Pi}'$. Поскольку $F' \subset \tilde{\Pi}'$, для любой ячейки $F'_0 \subset \tilde{\Pi}'$ найдется “цепочка”

$F'_1, \dots, F'_s$ с условием $F'_1 = F'$, $F'_s = F'_0$ ячеек $\overline{\Pi}'$ – такая последовательность ячеек, что их прообразы – $(n-1)$ -мерные грани $F_1, \dots, F_s \subset \overline{\Pi}$ такие, что для всех i пересечение F_i и F_{i+1} есть $(n-2)$ -мерная грань. Заметим, что если выбрать $F'_0 \subset \Omega'$, то и $B'(F'_0) \subset \Omega'$, а значит, лежит в $\overline{\Pi}'$. С другой стороны, образы $B'(F'_i)$ лежат внутри Ω и также образуют “цепочку”. Значит, образ ячейки F' также является ячейкой $\overline{\Pi}'$.

По построению $\overline{\Pi}'$ является сектором. Это завершает доказательство теоремы 6.

Очевидным следствием доказательства теоремы 6 является теорема 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. И. Коркина, “Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры”, *Особенности гладких отображений с дополнительными структурами*, Сборник статей, Тр. МИ-АН, **209**, Наука, М., 1995, 143–166.
- [2] О. Н. Герман, Е. Л. Лакштанов, “О многомерном обобщении теоремы Лагранжа для цепных дробей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:1 (2008), 51–66.
- [3] J.-O. Moussafr, “Convex hulls of integral points”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. V*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **266**, ПОМИ, СПб., 2000, 188–217.
- [4] Н. Tsuchihashi, “Higher-dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities”, *Tôhoku Math. J. (2)*, **35**:4 (1983), 607–639.

А. В. Быковская

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: anna.bykovskaya@gmail.com

Поступило

20.12.2010

Исправленный вариант

04.04.2011