Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Двирный, В. И. Слынько, Применение прямого метода Ляпунова к исследованию устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 1, 22–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9021>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:40:44

Применение прямого метода Ляпунова к исследованию устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

А. И. Двирный, В. И. Слынько

В статье проведено развитие классических теорем об устойчивости для исследуемого типа уравнений.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm9021

Введение. Задача об устойчивости нестационарных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием является актуальной задачей качественного анализа для этого класса систем. При решении этой задачи целесообразно применять различные модификации прямого метода Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [1]–[10].

Целью настоящей работы является развитие прямого метода Ляпунова для этого класса систем, путем обобщения результатов работы [3]. Предложенные подходы применяются к исследованию линейных нестационарных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

1. Обобщение прямого метода Ляпунова. Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [1]

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t, x), & t &\neq \tau_k, \\ \Delta x(t) &= g_k(x(t)), & t &= \tau_k,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $t \in [a, \infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^{p+1}([a, \infty) \times D; \mathbb{R}^n)$, $\Delta x(t) = x(t+0) - x(t)$, $g_k \in C(D; \mathbb{R}^n)$, $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность моментов импульсного воздействия, D – открытая связная окрестность точки $x = 0$. Обозначим $x(t; t_0, x_0)$ решение задачи Коши для системы (1.1). Не уменьшая общности можно считать, что $t_0 < \tau_1$. Функция $x(t; t_0, x_0)$ является непрерывно-дифференцируемой по t на множестве

$$[a, \infty) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_k\},$$

$x_0 \in D$. Считаем, что в точках $t = \tau_k$, $k \in \mathbb{N}$, функция $x(t; t_0, x_0)$ является непрерывной слева.

Предположим, что точка $x = 0$ является изолированным состоянием равновесия системы (1.1), а моменты импульсного воздействия удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2 < \infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Относительно функции $f(t, x)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условию Липшица в области D по переменной x , т.е. для любого компактного подмножества $K \subset D$ существует постоянная $L_K > 0$ такая, что при всех $t \in [a, \infty)$ и $x_1 \in K$, $x_2 \in K$ выполняется неравенство

$$\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq L_K \|x_2 - x_1\|.$$

Аналогично, относительно функций $g_k(x)$ будем предполагать, что они удовлетворяют условию Липшица в области D по переменной x , т.е. для любого компактного подмножества $K \subset D$ существует постоянная $L_K > 0$ такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ и $x_1 \in K$, $x_2 \in K$ выполняется неравенство

$$\|g_k(x_2) - g_k(x_1)\| \leq L_K \|x_2 - x_1\|.$$

Напомним определения устойчивости и асимптотической устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [1]. Состояние равновесия $x = 0$ системы (1.1) называется:

- 1) *устойчивым по Ляпунову*, если для любых $t_0 \in [a, \infty)$ и $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ такое, что неравенство $\|x_0\| < \delta$ влечет за собой выполнение неравенства $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;
- 2) *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если оно устойчиво и для любого $t_0 \in [a, \infty)$ существует положительное число $\rho = \rho(t_0)$ такое, что неравенство $\|x_0\| < \rho$ влечет за собой выполнение равенства $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, x_0)\| = 0$.

Введем класс вспомогательных функций, которые будут применяться в настоящей работе при исследовании устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функция $v: [a, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $\mathfrak{V}^p$, если выполняются условия

- 1) $v \in C^{p+1}([a, \infty) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_k\} \times D; \mathbb{R})$;
- 2) для $l = 0, 1, \dots, p+1$ существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \tau_k - 0} \frac{\partial^l v}{\partial t^l}(t, x) = \frac{\partial^l v}{\partial t^l}(\tau_k, x), \quad \lim_{t \rightarrow \tau_k + 0} \frac{\partial^l v}{\partial t^l}(t, x) = \frac{\partial^l v}{\partial t^l}(\tau_k + 0, x).$$

При

$$(t, x) \in ([a, \infty) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_k\}) \times D$$

определим индуктивно функции $w_l(t, x)$, $l = 0, 1, \dots, p+1$:

$$w_0(t, x) = v(t, x), \quad w_l(t, x) = \frac{\partial w_{l-1}}{\partial t} + (\nabla_x w_{l-1})^T f(t, x),$$

полагая

$$w_l(\tau_k, x) = \lim_{t \rightarrow \tau_k - 0} w_l(t, x), \quad w_l(\tau_k + 0, x) = \lim_{t \rightarrow \tau_k + 0} w_l(t, x).$$

Также определим функции

$$W_k(x) = \sum_{l=1}^p \frac{(\tau_{k+1} - \tau_k)^l}{l!} w_l(\tau_k + 0, x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Всюду в дальнейшем будем обозначать через B_r открытый шар радиуса r с центром в точке $x = 0$.

Следующее утверждение является простым следствием леммы Гронуолла [11].

ЛЕММА 1.1. Пусть R – положительное число, $\bar{B}_R \subset D$, $x(t)$ – решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, $x(\tau_k + 0) \in B_R$ и $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$. Тогда неравенство

$$\|x(t)\| \leq \|x(\tau_k + 0)\| e^{L_1 \theta_2},$$

где L_1 – постоянная Липшица функции $f(t, x)$ для подмножества $\bar{B}_R$, выполняется при всех $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$ таких, что $x(t) \in \bar{B}_R$.

Следующее утверждение устанавливает достаточные условия устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (1.1).

ТЕОРЕМА 1.1. Предположим, что система дифференциальных уравнений (1.1) такова, что существует вспомогательная функция $v \in \mathfrak{V}^p$, удовлетворяющая следующим условиям

- 1) существуют функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$, принадлежащие классу Хана [12], такие, что при всех $(t, x) \in [a, \infty) \times D$ выполняются неравенства

$$a(\|x\|) \leq v(t, x) \leq b(\|x\|);$$

- 2) при всех $(k, x) \in \mathbb{N} \times D$ выполняются неравенства

$$W_k(x + g_k(x)) + v(\tau_k + 0, x + g_k(x)) - v(\tau_k, x) \leq 0;$$

(существует функция $c(\cdot)$, принадлежащая классу Хана, такая, что при всех $(k, x) \in \mathbb{N} \times D$ выполняется неравенство

$$W_k(x + g_k(x)) + v(\tau_k + 0, x + g_k(x)) - v(\tau_k, x) \leq -c(\|x\|);$$

- 3) при всех $(t, x) \in ([a, \infty) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_k\}) \times D$ выполняется неравенство

$$w_{p+1}(t, x) \leq 0.$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (1.1) устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – положительное число такое, что $\bar{B}_R \subset D$. Обозначим через $x(t)$ решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (1.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Обозначим через $L > 0$ и $L_1 > 0$ положительные постоянные такие, что при всех $(t, k, x) \in [a, \infty) \times \mathbb{N} \times \bar{B}_R$ выполняются неравенства

$$\|g_k(x)\| \leq L\|x\|, \quad \|f(t, x)\| \leq L_1\|x\|. \quad (1.2)$$

Пусть ε – произвольное положительное число и

$$\delta(\varepsilon) = \left\{ e^{-L_1\theta} b^{-1} \left(a \left(\frac{Re^{-L_1\theta}}{1+L} \right) \right), e^{-L_1\theta} b^{-1} \left(a \left(\frac{\varepsilon e^{-L_1\theta}}{1+L} \right) \right) \right\},$$

где $\theta = \max\{\theta_2, \tau_1 - t_0\}$, $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$. Предположим, что существует момент времени $t^* > t_0$ такой, что

$$\|x(t)\| < R, \quad t \in [0, t^*), \quad \|x(t^*)\| \geq R.$$

Пусть k_0 – наибольшее целое неотрицательное число такое, что $t^* > \tau_{k_0}$ (полагаем $\tau_0 = t_0$). Если $k_0 = 0$, то из леммы 1.1 следует, что $\|x(t^*)\| \leq \|x_0\| e^{L_1\theta}$ и, как следствие,

$$R \leq \|x(t^*)\| \leq e^{-L_1\theta} b^{-1} \left(a \left(\frac{Re^{-L_1\theta}}{1+L} \right) \right) e^{L_1\theta} < \frac{R}{1+L} < R,$$

что противоречиво. Рассмотрим случай, когда $k_0 \geq 1$. Прежде всего отметим, что формула Тейлора позволяет установить неравенство

$$\begin{aligned} & v(\tau_k, x(\tau_k)) - v(\tau_{k-1} + 0, x(\tau_{k-1} + 0)) \\ &= \sum_{l=1}^p \frac{(\tau_k - \tau_{k-1})^l}{l!} w_l(\tau_{k-1} + 0, x(\tau_{k-1} + 0)) + \frac{1}{(p+1)!} w_{p+1}(c_k, x(c_k))(\tau_k - \tau_{k-1})^{p+1} \\ &\leq W_{k-1}(x(\tau_{k-1}) + g_{k-1}(x(\tau_{k-1}))), \end{aligned}$$

где $c_k \in (\tau_{k-1}, \tau_k)$. Если $k_0 \geq 2$, то

$$\begin{aligned} & v(\tau_{k_0}, x(\tau_{k_0})) \\ &= v(\tau_1, x(\tau_1)) + \sum_{l=2}^{k_0} (v(\tau_l, x(\tau_l)) - v(\tau_{l-1} + 0, x(\tau_{l-1} + 0)) \\ &\quad + v(\tau_{l-1} + 0, x(\tau_{l-1} + 0)) - v(\tau_{l-1}, x(\tau_{l-1}))) \\ &\leq v(\tau_1, x(\tau_1)) + \sum_{l=2}^{k_0} (W_{l-1}(x(\tau_{l-1}) + g_{l-1}(x(\tau_{l-1}))) \\ &\quad + v(\tau_{l-1} + 0, x(\tau_{l-1}) + g_{l-1}(x(\tau_{l-1}))) - v(\tau_{l-1}, x(\tau_{l-1}))). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Из условий 1, 2 теоремы 1.1 и оценки $\|x(t^*)\| \leq \|x(\tau_{k_0} + 0)\| e^{L_1\theta}$ следует, что при $k_0 \geq 1$

$$\begin{aligned} a \left(\frac{Re^{-L_1\theta}}{1+L} \right) &\leq a \left(\frac{\|x(t^*)\| e^{-L_1\theta}}{1+L} \right) \leq a \left(\frac{\|x(\tau_{k_0} + 0)\|}{1+L} \right) \leq a(\|x(\tau_{k_0})\|) \leq v(\tau_{k_0}, x(\tau_{k_0})) \\ &\leq v(\tau_1, x(\tau_1)) \leq b(\|x(\tau_1)\|) \leq b(e^{L_1\theta} \|x_0\|) < a \left(\frac{Re^{-L_1\theta}}{1+L} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, оценки (1.2) на решение $x(t)$ выполняются при всех $t \geq t_0$, если только $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, и, как следствие, при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$v(\tau_k, x(\tau_k)) \leq v(\tau_1, x(\tau_1)).$$

Предположим, что существует момент времени t^* ($t^* \geq t_0$) такой, что $\|x(t^*)\| \geq \varepsilon$. Пусть k_1 – наибольшее целое неотрицательное число такое, что $t^* > \tau_{k_1}$. Если $k_1 = 0$, то

$$\varepsilon \leq \|x(t^*)\| \leq e^{-L_1\theta} b^{-1} \left(a \left(\frac{\varepsilon e^{-L_1\theta}}{1+L} \right) \right) e^{L_1\theta} < \frac{\varepsilon}{1+L} < \varepsilon,$$

что противоречиво. Рассмотрим случай, когда $k_1 \geq 1$. Из условий 1, 2 теоремы 1.1 и оценки $\|x(t^*)\| \leq \|x(\tau_{k_1} + 0)\| e^{L_1\theta}$ следует, что

$$\begin{aligned} a \left(\frac{\varepsilon e^{-L_1\theta}}{1+L} \right) &\leq a \left(\frac{\|x(t^*)\| e^{-L_1\theta}}{1+L} \right) \leq a \left(\frac{\|x(\tau_{k_1} + 0)\|}{1+L} \right) \leq a(\|x(\tau_{k_1})\|) \leq v(\tau_{k_1}, x(\tau_{k_1})) \\ &\leq v(\tau_1, x(\tau_1)) \leq b(\|x(\tau_1)\|) \leq b(e^{L_1\theta} \|x_0\|) < a \left(\frac{\varepsilon e^{-L_1\theta}}{1+L} \right). \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает устойчивость состояния равновесия $x = 0$ системы (1.1).

Рассмотрим вопрос об асимптотической устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (1.1). Выберем

$$\rho = e^{-L_1\theta} b^{-1} \left(a \left(e^{-L_1\theta} \frac{R}{1+L} \right) \right)$$

и покажем, что из условия $\|x_0\| < \rho$ следует, что $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Рассмотрим последовательность $\{v(\tau_k, x(\tau_k))\}_{k=1}^{\infty}$. По доказанному выше эта последовательность является невозрастающей, поэтому существует число $\alpha \geq 0$ такое, что

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} v(\tau_k, x(\tau_k)) = \inf_k v(\tau_k, x(\tau_k)) \geq 0.$$

Предположим, что $\alpha > 0$. Тогда при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$v(\tau_k, x(\tau_k)) \geq \alpha > 0.$$

Отметим, что $\inf_k \|x(\tau_k)\| = \beta > 0$. Действительно, в противном случае, существует подпоследовательность $\{\|x(\tau_{n_k})\|\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{\|x(\tau_k)\|\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к нулю при $k \rightarrow \infty$. Из условия 1 теоремы 1.1 следует, что

$$0 < \alpha \leq v(\tau_{n_k}, x(\tau_{n_k})) \leq b(\|x(\tau_{n_k})\|).$$

При $k \rightarrow \infty$ получим противоречие, и как следствие, $\|x(\tau_k)\| \geq \beta$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, с учетом неравенства (1.3) получим при $k \geq 1$ оценку

$$\alpha \leq v(\tau_k, x(\tau_k)) \leq - \sum_{l=2}^k c(\|x(\tau_{l-1})\|) + v(\tau_1, x(\tau_1)) \leq -(k-1)c(\beta) + v(\tau_1, x(\tau_1)).$$

При достаточно большом числе k приходим к противоречию, которое доказывает, что $\lim_{k \rightarrow \infty} v(\tau_k, x(\tau_k)) = 0$. Обозначим $\gamma = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x(\tau_k)\| \geq 0$. Тогда существует подпоследовательность $\{\|x(\tau_{n_k})\|\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{\|x(\tau_k)\|\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к γ при $k \rightarrow \infty$. Из неравенства

$$a(\|x(\tau_{n_k})\|) \leq v(\tau_{n_k}, x(\tau_{n_k})),$$

переходом к пределу $k \rightarrow \infty$ получим $a(\gamma) \leq 0$, откуда следует, что $\gamma = 0$. Применение леммы 1.1 завершает доказательство теоремы. Утверждение теоремы 1.1 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Отметим, что при $p = 1$ утверждение теоремы 1.1 совпадает с результатами работы [3]. При $p > 1$ утверждение теоремы 1.1 является обобщением результатов, полученных в работах [13]–[15] для линейных и локально-линейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Условие 3 предыдущей теоремы можно несколько модифицировать. Приведем соответствующий результат.

ТЕОРЕМА 1.2. *Предположим, что система дифференциальных уравнений (1.1) такова, что существует функция $v \in \mathfrak{V}^p$, для которой выполняются условия:*

- 1) *существуют функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$, принадлежащие классу Хана, такие, что при всех $(t, x) \in [a, \infty) \times D$ выполняются неравенства*

$$a(\|x\|) \leq v(t, x) \leq b(\|x\|);$$

- 2) *существует функция $c(\cdot)$, принадлежащая классу Хана, такая, что при всех $(k, x) \in \mathbb{N} \times D$ выполняется неравенство*

$$W_k(x + g_k(x)) + v(\tau_k + 0, x + g_k(x)) - v(\tau_k, x) \leq -c(\|x\|);$$

- 3) *при всех $(t, x) \in ([a, \infty) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_k\}) \times D$ выполняется неравенство*

$$|w_{p+1}(t, x)| \leq d(\|x\|),$$

где $d(\cdot)$ – функция класса Хана, удовлетворяющая при всех $\gamma > 0$ предельному соотношению

$$\lim_{r \rightarrow 0+0} \frac{d(\gamma r)}{c(r)} = 0.$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия 3 теоремы 1.2 следует, что существует положительное число R такое, что $\overline{B}_R \subset D$ и при всех $(t, k, x) \in [a, \infty) \times \mathbb{N} \times \overline{B}_R$ выполняются неравенства

$$\|g_k(x)\| \leq L\|x\|, \quad \|f(t, x)\| \leq L_1\|x\|, \quad \frac{\theta_2^{p+1} d((1+L)e^{L_1\theta}\|x\|)}{(p+1)!c(\|x\|)} \leq \frac{1}{2}, \quad (1.4)$$

где L_1 и L – положительные постоянные.

Пусть ε – произвольное положительное число,

$$\delta(\varepsilon) = \left\{ e^{-L_1\theta} b^{-1} \left(a \left(\frac{R e^{-L_1\theta}}{1+L} \right) \right), e^{-L_1\theta} b^{-1} \left(a \left(\frac{\varepsilon e^{-L_1\theta}}{1+L} \right) \right) \right\}$$

и $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$. Предположим, что существует момент времени $t^* > t_0$ такой, что

$$\|x(t)\| < R, \quad t \in [0, t^*), \quad \|x(t^*)\| \geq R.$$

Можно считать, что $t^* > \tau_1$ (см. доказательство предыдущей теоремы). Обозначим через k_0 наибольшее натуральное число такое, что $t^* > \tau_{k_0}$. Если $k_0 \geq 2$, то

$$\begin{aligned} & v(\tau_{k_0}, x(\tau_{k_0})) \\ & \leq \sum_{l=2}^{k_0} \left(W_{l-1}(x(\tau_{l-1}) + g_{l-1}(x(\tau_{l-1}))) + v(\tau_{l-1} + 0, x(\tau_{l-1}) + g_{l-1}(x(\tau_{l-1}))) \right. \\ & \quad \left. - v(\tau_{l-1}, x(\tau_{l-1})) + \frac{\theta_2^{p+1}}{(p+1)!} |w_{p+1}(c_l, x(c_l))| \right) + v(\tau_1, x(\tau_1)), \end{aligned}$$

где $c_l \in (\tau_{l-1}, \tau_l)$. Из оценки $\|x(c_l)\| \leq \|x(\tau_{l-1} + 0)\| e^{L_1\theta} \leq (1+L)e^{L_1\theta} \|x(\tau_{l-1})\|$ следует неравенство

$$\begin{aligned} v(\tau_{k_0}, x(\tau_{k_0})) & \leq \sum_{l=2}^{k_0} \left(-c(\|x(\tau_{l-1})\|) + \frac{\theta_2^{p+1}}{(p+1)!} |w_{p+1}(c_l, x(c_l))| \right) + v(\tau_1, x(\tau_1)) \\ & \leq \sum_{l=2}^{k_0} \left(-c(\|x(\tau_{l-1})\|) + \frac{\theta_2^{p+1}}{(p+1)!} d(\|x(c_l)\|) \right) + v(\tau_1, x(\tau_1)) \\ & \leq \sum_{l=2}^{k_0} \left(-c(\|x(\tau_{l-1})\|) + \frac{\theta_2^{p+1}}{(p+1)!} d((1+L)e^{L_1\theta} \|x(\tau_{l-1})\|) \right) + v(\tau_1, x(\tau_1)) \\ & \leq -\frac{1}{2} \sum_{l=2}^{k_0} c(\|x(\tau_{l-1})\|) + v(\tau_1, x(\tau_1)). \end{aligned}$$

Из условий 1 и 2 теоремы 1.2 и оценки

$$\|x(t^*)\| \leq e^{L_1\theta} \|x(\tau_{k_0} + 0)\| \leq (1+L)e^{L_1\theta} \|x(\tau_{k_0})\|$$

следует, что при $k_0 \geq 1$ справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} a\left(\frac{Re^{-L\theta_1}}{1+L}\right) & \leq a\left(\frac{\|x(t^*)\|e^{-L\theta_1}}{1+L}\right) \leq a(\|x(\tau_{k_0})\|) \leq v(\tau_{k_0}, x(\tau_{k_0})) \\ & \leq v(\tau_1, x(\tau_1)) \leq b(\|x(\tau_1)\|) \leq b(e^{L_1\theta} \|x_0\|) < a\left(\frac{Re^{-L\theta_1}}{1+L}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, оценки (1.4) выполняются на решении $x(t)$ при всех $t \geq t_0$, если только $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, и, как следствие, при всех $k \geq 2$ выполняется неравенство

$$v(\tau_k, x(\tau_k)) \leq v(\tau_1, x(\tau_1)) - \frac{1}{2} \sum_{l=2}^k c(\|x(\tau_{l-1})\|).$$

Из этого неравенства выводится асимптотическая устойчивость состояния равновесия $x = 0$ системы (1.1) так же, как и при доказательстве утверждения теоремы 1.1. Теорема 1.2 доказана.

Следующие два утверждения являются некоторой модификацией утверждений теорем 1.1 и 1.2. Введем функции $V_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ по формулам

$$V_k(x) = \sum_{l=1}^p (-1)^l \frac{(\tau_k - \tau_{k-1})^l}{l!} w_l(\tau_k, x).$$

ТЕОРЕМА 1.3. *Предположим, что система дифференциальных уравнений (1.1) такова, что существует вспомогательная функция $v \in \mathfrak{V}^p$, удовлетворяющая следующим условиям:*

- 1) *существуют функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$, принадлежащие классу Хана, такие, что при всех $(t, x) \in [a, \infty) \times D$ выполняются неравенства*

$$a(\|x\|) \leq v(t, x) \leq b(\|x\|);$$

- 2) *при всех $(k, x) \in \mathbb{N} \times D$ выполняются неравенства*

$$-V_k(x) + v(\tau_k + 0, x + g_k(x)) - v(\tau_k, x) \leq 0$$

(существует функция $c(\cdot)$, принадлежащая классу Хана, такая, что при всех $(k, x) \in \mathbb{N} \times D$ выполняется неравенство

$$-V_k(x) + v(\tau_k + 0, x + g_k(x)) - v(\tau_k, x) \leq -c(\|x\|);$$

- 3) *при всех $(t, x) \in ([a, \infty) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_k\}) \times D$ выполняется неравенство*

$$(-1)^{p+1} w_{p+1}(t, x) \geq 0.$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (1.1) устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число R выберем также, как и в доказательстве теоремы 1.1. Пусть ε – произвольное положительное число,

$$\delta(\varepsilon) = \min \left\{ \frac{e^{-L_1 \theta}}{1+L} b^{-1}(a(Re^{-L_1 \theta})), \frac{e^{-L_1 \theta}}{1+L} b^{-1}(a(\varepsilon e^{-L_1 \theta})) \right\}$$

и $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$. Предположим, что существует момент времени $t^* > t_0$ такой, что

$$\|x(t)\| < R, \quad t \in [0, t^*), \quad \|x(t^*)\| \geq R.$$

Можно считать, что $t^* > \tau_1$ (см. доказательство теоремы 1.1). Обозначим через k_0 наибольшее натуральное число такое, что $t^* > \tau_{k_0}$. Если $k_0 \geq 2$, то

$$\begin{aligned} & v(\tau_{k_0} + 0, x(\tau_{k_0} + 0)) \\ &= \sum_{l=2}^{k_0} [v(\tau_l + 0, x(\tau_l + 0)) - v(\tau_l, x(\tau_l)) + v(\tau_l, x(\tau_l)) - v(\tau_{l-1} + 0, x(\tau_{l-1} + 0))] \\ & \quad + v(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0)). \end{aligned}$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} & v(\tau_l + 0, x(\tau_l + 0)) - v(\tau_{l+1}, x(\tau_{l+1})) \\ &= w_1(\tau_{l+1}, x(\tau_{l+1}))(\tau_l - \tau_{l+1}) + \dots + \frac{1}{p!} w_p(\tau_{l+1}, x(\tau_{l+1}))(\tau_l - \tau_{l+1})^p \\ & \quad + \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} w_{p+1}(c_l, x(c_l))(\tau_{l+1} - \tau_l)^{p+1}, \end{aligned}$$

где $c_l \in (\tau_l, \tau_{l+1})$. По условию 3 теоремы 1.3 $(-1)^{p+1} w_{p+1}(c_l, x(c_l)) \geq 0$, поэтому при $k_0 \geq 2$

$$\begin{aligned} v(\tau_{k_0} + 0, x(\tau_{k_0} + 0)) &\leq v(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0)) \\ &+ \sum_{l=2}^{k_0} [v(\tau_l + 0, x(\tau_l) + g_l(x(\tau_l)) - v(\tau_l, x(\tau_l)) - V_l(x(\tau_l))]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из неравенства (1.5) следует, что при $k_0 \in \mathbb{N}$

$$v(\tau_{k_0} + 0, x(\tau_{k_0} + 0)) \leq v(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0)).$$

Как следствие, получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} a(Re^{-L_1\theta}) &\leq a(\|x(t^*)\|e^{-L_1\theta}) \leq a(\|x(\tau_{k_0} + 0)\|) \leq v(\tau_{k_0} + 0, x(\tau_{k_0} + 0)) \\ &\leq v(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0)) \leq b(\|x(\tau_1 + 0)\|) \leq b((1+L)\|x(\tau_1)\|) \\ &\leq b((1+L)e^{L_1\theta}\|x_0\|) < a(Re^{-L_1\theta}). \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает, что оценки (1.2) выполняются на решении $x(t)$ при всех $t \geq t_0$, и, как следствие, при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$v(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \leq v(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0)). \quad (1.6)$$

Предположим, что существует момент времени $t^* > t_0$ такой, что $\|x(t^*)\| \geq \varepsilon$. Пусть k_1 – наибольшее целое неотрицательное число такое, что $t^* > \tau_{k_1}$. Можно считать, что $k_1 \geq 1$ (см. доказательство теоремы 1.1). Используя неравенство (1.6), получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} a(\varepsilon e^{-L_1\theta}) &\leq a(\|x(t^*)\|e^{-L_1\theta}) \leq a(\|x(\tau_{k_1} + 0)\|) \leq v(\tau_{k_1} + 0, x(\tau_{k_1} + 0)) \\ &\leq v(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0)) \leq b(\|x(\tau_1 + 0)\|) \leq b((1+L)\|x(\tau_1)\|) \\ &\leq b((1+L)e^{L_1\theta}\|x_0\|) < a(\varepsilon e^{-L_1\theta}). \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает устойчивость состояния равновесия $x = 0$ системы (1.1).

Рассмотрим вопрос об асимптотической устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (1.1). Выберем

$$\rho = \frac{e^{-L_1\theta}}{1+L} b^{-1}(a(Re^{-L_1\theta}))$$

и покажем, что из условия $\|x_0\| < \rho$ следует, что $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Рассмотрим последовательность $\{v(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0))\}_{k=1}^{\infty}$. По доказанному выше, эта последовательность является невозрастающей, поэтому существует число $\alpha \geq 0$ такое, что

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} v(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) = \inf_k v(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \geq 0.$$

Отметим, что если $\alpha > 0$, то $\inf_k \|x(\tau_k + 0)\| = \beta > 0$. Поэтому, учитывая неравенство (1.5), получим при $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \alpha \leq v(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) &\leq - \sum_{l=2}^k c \left(\frac{\|x(\tau_k + 0)\|}{1+L} \right) + v(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0)) \\ &\leq -(k-1)c \left(\frac{\beta}{1+L} \right) + v(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0)). \end{aligned}$$

При достаточно большом k приходим к противоречию, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) = 0.$$

Если обозначить $\gamma = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x(\tau_k + 0)\|$, то $\gamma = 0$ и применение леммы 1.1 завершает доказательство теоремы. Теорема 1.3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. При $p = 1$ утверждение теоремы 1.2 совпадает с результатом работы [3].

Следующее утверждение аналогично теореме 1.2 и доказывается также.

ТЕОРЕМА 1.4. *Предположим, что система дифференциальных уравнений (1.1) такова, что существует функция $v \in \mathfrak{V}^p$, для которой выполняются условия:*

- 1) *существуют функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$, принадлежащие классу Хана, такие, что при всех $(t, x) \in [a, \infty) \times D$ выполняются неравенства*

$$a(\|x\|) \leq v(t, x) \leq b(\|x\|);$$

- 2) *существует функция $c(\cdot)$, принадлежащая классу Хана, такая, что при всех $(k, x) \in \mathbb{N} \times D$ выполняется неравенство*

$$-V_k(x) + v(\tau_k + 0, x + g_k(x)) - v(\tau_k, x) \leq -c(\|x\|);$$

- 3) *при всех $(t, x) \in ([a, \infty) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_k\}) \times D$ выполняется неравенство*

$$|w_{p+1}(t, x)| \leq d(\|x\|),$$

где $d(\cdot)$ – функция класса Хана, удовлетворяющая при всех $\gamma > 0$ предельному соотношению

$$\lim_{r \rightarrow 0+0} \frac{d(\gamma r)}{c(r)} = 0.$$

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критическом случае

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1^3 + x_1 x_2^2, & \frac{dx_2}{dt} &= -x_1^2 x_2, & t &\neq \tau_k, \\ \Delta x_1 &= \alpha x_1^5 + \mu x_1^2 x_2^3, & \Delta x_2 &= -\mu x_1^3 x_2^2 + \beta x_2^5, & t &= \tau_k, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, α, β, μ – действительные параметры, моменты импульсного воздействия $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют неравенствам

$$0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2 < \infty.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $v = (x_1^2 + x_2^2)/2$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} w_1(x) &= -x_1^4, & w_2(x) &= -4x_1^3(-x_1^3 + x_1x_2^2) = 4x_1^6 - 4x_1^4x_2^2. \\ V_k(x) &= x_1^4(\tau_k - \tau_{k-1}) + \frac{(\tau_k - \tau_{k-1})^2}{2}(4x_1^6 - 4x_1^4x_2^2), \\ v(x + g(x)) - v(x) &= \alpha x_1^6 + \beta x_2^6 + o(\|x\|^6). \\ -V_k(x) + v(x + g(x)) - v(x) &= -x_1^4(\tau_k - \tau_{k-1}) - \frac{(\tau_k - \tau_{k-1})^2}{2}(4x_1^6 - 4x_1^4x_2^2) + \alpha x_1^6 + \beta x_2^6 \\ &\leq (\alpha - 2\theta_1^2)x_1^6 + 2\theta_2^2x_1^4x_2^2 + \beta x_2^6 + o(\|x\|^6). \end{aligned}$$

Теорема 1.4 приводит к следующим условиям асимптотической устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (1.7):

$$\alpha - 2\theta_1^2 < 0, \quad \beta < 0, \quad 32\theta_2^6 + 27\beta(2\theta_1^2 - \alpha)^2 < 0.$$

2. Применение к линейным системам. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x, & t &\neq \tau_k, \\ \Delta x(t) &= B_k x(t), & t &= \tau_k, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in C^{p+1}([a, \infty); \mathbb{R}^{n \times n})$, $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \in \mathbb{N}$, $\Delta x(t) = x(t+0) - x(t)$. Относительно последовательности моментов импульсного воздействия предположим, что выполняются неравенства

$$0 \leq \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2 < \infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Функцию Ляпунова выберем в виде $v(t, x) = x^T P(t)x$, где $P(t) = P_k$ при $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$, $\tau_0 = t_0$, $P(t_0) = P_0$. Определим последовательность матриц $Q_{l,k}(t)$, $l = 0, 1, \dots, p+1$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} Q_{0,k}(t) &= P(t), \\ Q_{l,k}(t) &= \frac{dQ_{l-1,k}}{dt} + A^T(t)Q_{l-1,k}(t) + Q_{l-1,k}(t)A(t), \quad t \in [a, \infty) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_k\} \end{aligned}$$

и матрицы

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k &= \sum_{l=1}^p (-1)^l \frac{(\tau_k - \tau_{k-1})^l}{l!} Q_{l,k}(\tau_k), \\ \mathcal{W}_k &= \sum_{l=1}^p \frac{(\tau_{k+1} - \tau_k)^l}{l!} Q_{l,k}(\tau_k + 0). \end{aligned}$$

Пусть Q – симметричная матрица. Рассмотрим дискретное матричное уравнение относительно последовательности матриц $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$-\mathcal{V}_k + (I + B_k)^T P_{k+1} (I + B_k) - P_k = -Q. \tag{2.2}$$

Непосредственным следствием теоремы 1.3 является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. *Предположим, что для некоторой положительно-полуопределенной (положительно-определенной) матрицы Q уравнение (2.2) имеет решение $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ такое, что для некоторых положительных постоянных α, β выполняются неравенства*

$$\alpha I \leq P_k \leq \beta I, \quad (-1)^{p+1} Q_{p+1,k}(t) \geq 0, \quad t \in [a, \infty) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда система (2.1) устойчива (асимптотически устойчива).

Рассмотрим также дискретное матричное уравнение относительно последовательности матриц $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$(I + B_k)^T \mathcal{W}_k(I + B_k) + (I + B_k)^T P_{k+1}(I + B_k) - P_k = -Q. \quad (2.3)$$

Непосредственным следствием теоремы 2.1 является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2. *Предположим, что для некоторой положительно-полуопределенной (положительно-определенной) матрицы Q уравнение (2.3) имеет решение $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ такое, что для некоторых положительных постоянных α, β выполняются неравенства*

$$\alpha I \leq P_k \leq \beta I, \quad Q_{p+1,k}(t) \geq 0, \quad t \in [a, \infty) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда система (2.1) устойчива (асимптотически устойчива).

Таким образом, утверждения теорем 2.1 и 2.2 сводят задачу об устойчивости системы (2.1) к вопросу об существовании ограниченного решения дискретного уравнения (2.2) или (2.3). Приведем пример, иллюстрирующий применение теоремы 2.1.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (A + \mu \sin 2\pi t I)x, & t \neq k, \\ \Delta x(t) &= Bx(t), & t = k, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где A, B – постоянные $n \times n$ -матрицы, μ – действительный параметр.

Утверждение теоремы 2.1 приводит к следующим достаточным условиям асимптотической устойчивости системы (2.4): если существует положительно-определенная матрица X такая, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} (A + B)^T X + X(A + B) + B^T X B &< 0, \\ (A^T)^2 X + 2A^T X A + X A^2 &= G > 0, \\ 2\|X\|\mu^2 + 4|\mu|(\pi\|X\| + \|A^T X + X A\|) &\leq \lambda_m(G), \end{aligned}$$

то система (2.4) асимптотически устойчива.

3. Обсуждение результатов. Теоремы прямого метода Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, приведенные в монографии [1], позволяют исследовать асимптотическую устойчивость нулевого решения системы вида (1.1), в том случае, когда выполняется хотя бы одно из двух предположений: либо состояние равновесия $x = 0$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (3.1)$$

является асимптотически устойчивым, либо состояние равновесия $x = 0$ дискретного уравнения

$$x_{k+1} = x_k + g_k(x_k) \quad (3.2)$$

является асимптотически устойчивым. В работе [10] эти результаты монографии [1] обобщены. Там предложен подход к исследованию устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (1.1) на основе двух вспомогательных функций. Этот подход позволяет исследовать те случаи, когда состояние равновесия $x = 0$ системы (3.1) и состояние равновесия $x = 0$ дискретного уравнения (3.2) являются одновременно неустойчивыми. Другое обобщение прямого метода Ляпунова для систем вида (1.1), приведенное в монографии [2], предусматривает использование кусочно-дифференцируемых вспомогательных функций. Эти теоремы могут быть в некоторых случаях обращены [7], [8], поэтому охватывают и этот случай. Однако, здесь возникает проблема конструктивного выбора вспомогательной функции. Некоторые результаты и идеи в этом направлении содержатся в работах [15], [16]. Третий подход к обобщению прямого метода Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием предложен в работе [3]. В этом подходе используется вторая производная вспомогательной функции вдоль решений системы дифференциальных уравнений (3.1). Этот подход также позволяет иногда исследовать случаи, когда состояния равновесия $x = 0$ системы (3.1) и дискретного уравнения (3.2) являются одновременно неустойчивыми. Теоремы 2.1, 2.2 обобщают эти результаты. Пример 2.1 показывает, что такое обобщение существенно, так как к системе (1.7) не применимы результаты работы [3], но применимо утверждение теоремы 2.2 при $p = 2$. Отметим, что некоторый интерес представляет применение полученных результатов к исследованию критических положений равновесия систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища школа, К., 1987.
- [2] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, Ser. Modern Appl. Math., **6**, World Sci. Publ., Singapore, 1989.
- [3] X. Liu, A. Willms, "Stability analysis and applications to large scale impulsive systems: a new approach", *Canad. Appl. Math. Quart.*, **3**:4 (1995), 419–444.
- [4] M. O. Perestyuk, O. S. Chernikova, "Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations", *Ukrainian Math. J.*, 2008, № 1, 91–107.
- [5] Н. А. Перестюк, "К вопросу устойчивости положения равновесия импульсных систем", *Годишн. вист. учебн. завед. Прилож. матем.*, **1**:1 (1975), 145–151.
- [6] А. О. Игнатьев, О. А. Игнатьев, А. А. Солиман, "Об асимптотической устойчивости и неустойчивости решений систем с импульсным воздействием", *Матем. заметки*, **80**:4 (2006), 516–525.

- [7] A. O. Ignatyev, “On the stability of invariant sets of systems with impulse effect”, *Nonlinear Anal.*, **69**:1 (2008), 53–72.
- [8] A. O. Ignatyev, O. A. Ignatyev, “Stability of Solutions of Systems with Impulse Effect”, *Progress in Nonlinear Analysis Research*, Nova Sci. Publ., New York, 2009, 363–389.
- [9] Р. И. Гладилина, А. О. Игнатъев, “Об устойчивости периодических систем с импульсным воздействием”, *Матем. заметки*, **76**:1 (2004), 44–51.
- [10] А. А. Мартынюк, В. И. Слынько, “Об устойчивости движения нелинейной импульсной системы”, *Прикл. мех.*, **40**:2 (2004), 134–144.
- [11] А. А. Мартынюк, В. Лакшмикантам, С. Лиля, *Устойчивость движения: метод интегральных неравенств*, Наукова думка, К., 1989.
- [12] W. Hahn, *Stability of Motion*, Grundlehren Math. Wiss., **138**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [13] В. И. Слынько, “Линейные матричные неравенства и устойчивость движения импульсных систем”, *Доп. НАН України*, 2008, № 4, 68–71.
- [14] В. С. Денисенко, “Устойчивость нечетких импульсных систем Такаги–Сугено: метод линейных матричных неравенств”, *Доп. НАН України*, 2008, № 11, 66–73.
- [15] В. С. Денисенко, В. И. Слынько, “Импульсная стабилизация механических систем для моделей Такаги–Сугено”, *Прикл. мех.*, **45**:10 (2009), 115–130.
- [16] А. И. Двирный, В. И. Слынько, “Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаях”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:1 (2011), 70–80.

А. И. Двирный

Hedmark University College, Norway,
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН
Украины
E-mail: dvirny@mail.ru

Поступило

06.12.2010

Исправленный вариант

11.01.2013

В. И. Слынько

Hedmark University College, Norway,
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН
Украины
E-mail: vststab@ukr.net