Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Зенков, О m -транзитивных группах, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 1, 151–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9022>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:35:45

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О m -транзитивных группах

А. В. Зенков

1. Введение. Напомним, что m -группой называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e, {}^{-1}, \vee, \wedge, * \rangle$, где $\langle G, \cdot, e, {}^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ является ℓ -группой и одноместная операция $*$ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, {}^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т.е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения

$$(xy)_* = x_*y_*, \quad (x_*)_* = x, \quad (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, \quad (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

В дальнейшем m -группу G с фиксированным автоморфизмом $*$ записываем как пару $(G, *)$. Пусть Λ – некоторое линейно упорядоченное множество и a – реверсивный автоморфизм 2-го порядка Λ , т.е. для любых $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ верно $((\lambda)a)a = \lambda$ и $\lambda < \lambda' \Leftrightarrow (\lambda)a > (\lambda')a$. Через $\text{Aut}(\Lambda)$ обозначим группу (относительно суперпозиции) всех порядковых подстановок Λ . Группа $\text{Aut}(\Lambda)$ может быть превращена в m -группу, если операция $(\cdot)_*$ задается при помощи равенства $g_* = aga$ для всякого $g \in \text{Aut}(\Lambda)$. Согласно [1], представлением m -группы $(G, *)$ порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Λ является ℓ -гомоморфизм $\nu: G \rightarrow \text{Aut}(\Lambda)$ такой, что $((g)_*)\nu = a(g)\nu a$ для любого $g \in G$. Если ν есть изоморфизм, то представление называется *точным*. Этот факт записываем в виде (G, Λ, a) . Отметим [1], что всякая m -группа допускает точное представление порядковыми подстановками подходящего линейно упорядоченного множества.

Точное представление (G, Λ, a) назовем *m -транзитивным*, если для всех $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, быть может за исключением точки o , существует такой $x \in G_* = gr.(G, a)$, что $(w)x = w'$ (здесь o – точка Λ , неподвижная относительно действия a).

Как обычно, неединичная m -группа $(G, *)$ называется *подпрямой m -неразложимой*, если пересечение всех ее неединичных m -идеалов отлично от единицы.

Показано, что произвольная m -группа подпрямой m -неразложима тогда и только тогда, когда она допускает точное m -транзитивное представление (теорема 2.1). Поэтому всякое многообразие m -групп порождается своими m -транзитивными группами (следствие 2.2).

Все необходимые сведения по теории групп и решеточно упорядоченных групп можно найти в книгах [2]–[4] соответственно.

2. Основной результат. Пусть $(G, *)$ – произвольная m -группа и V – ее выпуклая ℓ -подгруппа. Как обычно, через $R(G : V)$ обозначим множество правых смежных классов ℓ -группы G по ее выпуклой ℓ -подгруппе V с порядком: $Vx \leq Vy$ тогда и только тогда, когда $vx \leq y$ для некоторого $v \in V$. Если данный порядок линейен, то V называется *спрямляющей*. Пусть, более того, V является *m -подгруппой*. Зададим $a: R(G : V) \rightarrow R(G : V)$ по правилу $(Vg)a = Vg_*$. Следующие рассуждения доказывают взаимнооднозначность a :

$$Vg = Vh \iff g = vh \iff g_* = v_*h_* \iff Vg_* = Vh_*.$$

Далее,

$$(Vx)aga = (Vx_*)ga = (Vx_*g)a = Vxg_*$$

и

$$Vg \geq Vh \iff g \geq vh \iff g_* \leq v_*h_* \iff Vg_* \leq Vh_*.$$

Поэтому, отображение a есть реверсивный автоморфизм 2-го порядка линейно упорядоченного множества $R(G : V)$. Тогда $\nu : G \rightarrow \text{Aut}(R(G : V))$, определяемое по правилу $(Vx)(g)\nu = Vxg$, является представлением, которое называется *правым регулярным представлением*.

ТЕОРЕМА 2.1. *Произвольная m -группа $(G, *)$ подпрямой неразложима тогда и только тогда, когда она допускает точное m -транзитивное представление.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m -группа $(G, *)$ подпрямой неразложима и $H \neq \{e\}$ – пересечение всех ее неединичных идеалов. Рассмотрим $h > e \in H$. Тогда $t = h \vee h_*^{-1} \in H$ и $t_* = t^{-1}$. Далее, рассмотрим скачок $V \prec \bar{V}$ выпуклых ℓ -подгрупп, определяемый t . Так как $t_* = t^{-1}$, то V_* будет так же спрямляющей. Если $V = V_*$ (т.е. V – спрямляющая m -подгруппа), то можно рассмотреть правое регулярное представление $\nu : G \rightarrow \text{Aut}(R(G : V))$. Очевидно, что $\ker(\nu) \subseteq V \subsetneq H$. Следовательно, $\ker(\nu) = \{e\}$, т.е. ν – изоморфизм и представление точное. Отметим, что точное правое регулярное представление транзитивно.

Пусть $V \neq V_*$. Рассмотрим множество $\Lambda = R(G : V) \cup R(G : V_*)$. Зафиксируем некоторый $Vx \in R(G : V)$. Далее $L = \{Vy \mid Vy \leq Vx\hat{v}_*\}$ и $R = R(G : V) \setminus L$. Отметим, что множество R может оказаться пустым. Таким образом, пара (L, R) образует сечение и мы полагаем $L < V_* < R$. Так как для всякого $g \in V_*$ верно $Lg = L$ и $V_*g = V_* \Leftrightarrow g \in V_*$, то неравенство $L < V_* < R$ определено корректно. Пусть $y > e \in G \setminus V_*$. Тогда $V_* < V_*y$ в линейно упорядоченном множестве $R(G : V_*)$. Если $Ly = L$, то $L < V_* < V_*y < R$. Если $L \subsetneq Ly$, то $L \subsetneq Ly < V_*y < Ry$ и полагаем $V_* < V_*y$. Следовательно, Λ можно рассматривать как *линейно упорядоченное множество*. Отметим следующую особенность построенного порядка: сохранены порядки линейно упорядоченных множеств $R(G : V)$ и $R(G : V_*)$.

Определим $a : \Lambda \rightarrow \Lambda$ по правилу $(Vy)a = V_*y_*$, $(V_*y)a = Vy_*$. Из определения следует, что $(\lambda)a^2 = ((\lambda)a)a = \lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Проверим, что a является реверсивным. Из сказанного выше следует, что достаточно проверить случай $Vy < V_*$. Можно считать, что $y_* = y^{-1}$. Действительно, элементы Vy и Vy_*^{-1} сравнимы; например, $Vy \geq Vy_*^{-1}$. Тогда $V(y \vee y_*^{-1}) = Vy$ и $(y \vee y_*^{-1})_* = (y \vee y_*^{-1})^{-1}$. Неравенство $Vy < V_*$ означает, что $Vy \in L$. Тогда $V \in Ly^{-1}$ и поэтому $(V_*)a = V < V_*y^{-1} = (Vy)a$.

Определим $\nu : G \rightarrow \text{Aut}(\Lambda)$ по правилу $(Vx)(g)\nu = Vxg$ и $(V_*x)(g)\nu = V_*xg$. Пусть $Vx \in \Lambda$ и $g \in G$. Тогда

$$(Vx)a(g)\nu a = (V_*x_*g)a = Vxg_*.$$

Аналогично проверяется $(V_*x)a(g)\nu a = V_*xg_*$. Следовательно, ν является представлением. Отметим, что данное представление m -транзитивно (но нетранзитивно). Ядро данного представления $\ker \nu \subseteq V \cap V_* \subsetneq H$, т.е. ν – изоморфизм и представление точное.

Обратное утверждение доказывается по аналогии с соответствующим утверждением для ℓ -групп (см., например, [4; с. 230]).

Из общей теории алгебраических систем известно (см., например, [5; с. 115]), что всякая алгебраическая система является подпрямым произведением подпрямой неразложимых алгебраических систем. Таким образом, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Всякое многообразие m -групп порождается своими m -транзитивными группами.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Giraudet, F. Lucas, *Fund. Math.*, **139**:2 (1991), 75–89. [2] А. Г. Курош, *Теория групп*, Наука, М., 1967. [3] V. M. Kopytov, N. Ya. Medvedev, *The Theory of Lattice-Ordered Groups*, Math. Appl., **307**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994. [4] A. M. W. Glass, *Partially Ordered Groups*, Ser. Algebra, **7**, World Sci. Publ., Singapore, 1999. [5] П. Кон, *Универсальная алгебра*, Мир, М., 1968.

А. В. Зенков

Алтайский государственный
аграрный университет, г. Барнаул
E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

Поступило

09.01.2011