Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Давлетов, Асимптотика собственного значения
двумерной краевой задачи Дирихле для оператора Ламе
в области с малым отверстием, *Матем. заметки*, 2013,
том 93, выпуск 4, 537–548

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9023>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:13:40

Асимптотика собственного значения двумерной краевой задачи Дирихле для оператора Ламе в области с малым отверстием

Д. Б. Давлетов

Исследуется краевая задача Дирихле на собственные значения для оператора Ламе в двумерной ограниченной области с малым отверстием. Строится и обосновывается асимптотика собственного значения такой краевой задачи с точностью до степени параметра, определяющего диаметр отверстия.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm9023

1. Введение. Исследованием поведения собственных значений скалярных эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий занимались многие математики. Например, в [1] была получена оценка скорости сходимости собственного значения краевой задачи Дирихле для оператора Лапласа в трехмерной области с малой полостью. В [2] были получены полные асимптотические разложения первых собственных чисел и соответствующих собственных функций классических краевых задач для оператора Лапласа в двумерных и трехмерных областях с малыми отверстиями.

Краевые задачи для эллиптических операторов теории упругости в ограниченных областях с малыми отверстиями исследованы в работах [3]–[5]. В [3] рассматривался случай краевых условий Неймана на границе n -мерной области ($n \geq 3$) с малой полостью. Построены полные асимптотические разложения собственных элементов возмущенной краевой задачи для общей системы теории упругости. В работе [4] доказана сходимость собственных элементов возмущенной краевой задачи Дирихле для общего оператора теории упругости к собственным элементам соответствующей предельной краевой задачи, когда параметр ε , определяющий диаметр малой полости, стремится к нулю. В [5] построены и обоснованы первые члены асимптотики собственных значений краевой задачи Дирихле для оператора Ламе в трехмерной ограниченной области с малой полостью.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-97007), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (грант № 02.740.110612) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-6249.2010.1).

Особый интерес представляют двумерные эллиптические краевые задачи на собственные значения в ограниченных областях с малыми отверстиями, так как попытка найти асимптотические разложения собственных значений таких краевых задач при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде ряда по степеням ε не приводит к успеху. Поэтому в настоящей работе строится и обосновывается асимптотика собственного значения двумерной краевой задачи Дирихле для оператора Ламе в ограниченной области с малым отверстием с точностью до степени параметра, определяющего диаметр отверстия.

2. Постановка задачи и формулировка основного результата. Пусть Ω и ω – связные ограниченные области в $\mathbb{R}^2$ с бесконечно дифференцируемыми границами $\partial\Omega$ и $\partial\omega$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $0 < \varepsilon \ll 1$, – малый параметр. Не ограничивая общности будем считать, что начало координат лежит в Ω и ω . Пусть

$$\omega_\varepsilon := \{\mathbf{x} : \mathbf{x}\varepsilon^{-1} \in \omega\}, \quad \Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{\omega}_\varepsilon, \quad \Gamma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon.$$

Вектор $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ определим как столбец $\mathbf{z}(\mathbf{x}) := (z_1(\mathbf{x}), z_2(\mathbf{x}))^t$ (t – знак транспонирования). Через Δ^* обозначим оператор Ламе:

$$\Delta^* := \Delta + \alpha \nabla \operatorname{div},$$

где $\alpha := (\lambda + \mu)/\mu$, $\lambda, \mu > 0$ – постоянные Ламе. Рассматривается следующая сингулярно возмущенная краевая задача Дирихле:

$$-\Delta^* \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \lambda_\varepsilon \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \quad \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon. \quad (2.1)$$

Для (2.1) назовем предельной следующую краевую задачу:

$$-\Delta^* \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) = \lambda_0 \mathbf{z}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (2.2)$$

Известно (см., например, [6]), что спектры краевых задач (2.1) и (2.2) состоят из вещественных собственных значений конечной кратности, образующих счетные множества и накапливающихся только на бесконечности.

В [4] доказано, что если λ_0 – простое собственное значение краевой задачи (2.2), то при $\varepsilon \rightarrow 0$ к нему сходится единственное (и к тому же простое) собственное значение λ_ε краевой задачи (2.1), а для соответствующих нормированных в $L_2(\Omega)$ собственных вектор-функций $\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mathbf{z}_0(\mathbf{x})$ (считая, что $\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x})$ продолжена нулем в ω_ε) имеет место сходимостъ:

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.3)$$

Всюду далее предполагается, что λ_0 – простое собственное значение предельной краевой задачи (2.2) и $\mathbf{z}_0(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$.

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть λ_0 – простое собственное значение предельной краевой задачи (2.2), и значение в нуле соответствующей ему собственной вектор-функции $\mathbf{z}_0(\mathbf{x})$ отлично от нулевого вектора. Тогда асимптотика собственного значения λ_ε краевой задачи (2.1), сходящегося к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеет вид:

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right) + O(\varepsilon^{1/2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

где $\Lambda(\tau)$ – голоморфная в нуле функция,

$$\Lambda(0) = \lambda_0, \quad \Lambda'(0) = \lambda_1, \quad (2.5)$$

$$\lambda_1 = -2\pi|\mathbf{z}_0(\mathbf{0})|^2. \quad (2.6)$$

При построении асимптотики собственного значения краевой задачи (2.1) используется метод согласования асимптотических разложений [7].

3. Вспомогательные утверждения. Обозначим (2×2) -матрицу фундаментальных решений оператора Ламе в $\mathbb{R}^2$ (см., например, [8; гл. IX, § 1, гл. X, § 18]) через $\overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x})$. В дальнейшем будет удобно использовать обозначение

$$\Gamma_a(\mathbf{x}) := a^{-1}\overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}), \quad \text{где } a := \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}.$$

ЛЕММА 3.1. *Существует матричное решение краевой задачи:*

$$\Delta^*\Psi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \quad \Psi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\omega, \quad (3.1)$$

имеющее дифференцируемую асимптотику на бесконечности:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Gamma_a(\mathbf{x}) + \sigma(\omega) + \left(\frac{\partial \Gamma_a(\mathbf{x})}{\partial x_1} \nu(\omega) + \frac{\partial \Gamma_a(\mathbf{x})}{\partial x_2} \zeta(\omega) \right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (3.2)$$

где $r := |\mathbf{x}|$, a , $\sigma(\omega)$, $\nu(\omega)$ и $\zeta(\omega)$ – некоторые постоянные (2×2) -матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\Delta^*\overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}) = 0$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, то решение краевой задачи (3.1) с асимптотикой $\Psi(\mathbf{x}) = \Gamma_a(\mathbf{x}) + O(1)$ на бесконечности будем искать в виде:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Gamma_a(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

где $\Phi(\mathbf{x})$ – ограниченное на бесконечности решение краевой задачи

$$\Delta^*\Phi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \quad \Phi(\mathbf{x}) = -\Gamma_a(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\omega.$$

В свою очередь, решение этой краевой задачи представляется в виде

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sigma(\omega) + a^{-1} \frac{1}{\pi} \int_{\partial\omega} \overset{0}{\Gamma}_I(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}, \quad (3.4)$$

где $\overset{0}{\Gamma}_I(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ – (2×2) -матрица фундаментальных решений первого рода оператора Ламе в $\mathbb{R}^2$ (см., например, [8; гл. VIII, § 2, гл. X, § 28]), а плотность $\varphi(\mathbf{y})$ – решение интегрального уравнения

$$-\varphi(\mathbf{x}) + a^{-1} \frac{1}{\pi} \int_{\partial\omega} \overset{0}{\Gamma}_I(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = -(\Gamma_a(\mathbf{x}) + \sigma(\omega)), \quad \mathbf{x} \in \partial\omega,$$

для которого справедлива альтернатива Фредгольма (см. [8; гл. VIII, §§ 5, 6]). Постоянная матрица $\sigma(\omega)$ находится из условия разрешимости этого уравнения (для скалярного случая см., например, [9; гл. V, § 31]).

Из (3.4) следует, что $\Phi(\mathbf{x})$ имеет на бесконечности дифференцируемую асимптотику:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sigma(\omega) + \left(\frac{\partial \Gamma_a(\mathbf{x})}{\partial x_1} \nu(\omega) + \frac{\partial \Gamma_a(\mathbf{x})}{\partial x_2} \zeta(\omega) \right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Отсюда и из (3.3) вытекает справедливость асимптотики (3.2).

Аналогично лемме 3.1 легко показать справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\mathbf{X}_1(\mathbf{x}, \tau)$ – произвольная вектор-функция, компоненты которой являются однородными полиномами первой степени по $\mathbf{x}$ с коэффициентами, голоморфными по τ в нуле. Тогда существует решение краевой задачи

$$\Delta^* \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_1) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_1) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\omega,$$

имеющее следующую дифференцируемую по $\mathbf{x}$ асимптотику на бесконечности:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{X}_1) = \mathbf{X}_1(\mathbf{x}, \tau) + \varsigma(\omega, \tau) + \mathbf{O}\left(\frac{1}{r}\right),$$

где вектор $\varsigma(\omega, \tau)$ является голоморфным по τ в нуле и зависит от геометрии области ω , и вектор-функции $\mathbf{X}_1(\mathbf{x}, \tau)$.

Пусть $z_0^j(\mathbf{x})$ – j -е компоненты вектор-функции $\mathbf{z}_0(\mathbf{x})$, а $\{\alpha_1 \mathbf{z}_0(\mathbf{x}), \alpha_2 \mathbf{z}_0(\mathbf{x})\}$ – матрица размера 2×2 , столбцы которой представляют собой векторы $\alpha_j \mathbf{z}_0(\mathbf{x})$, где α_j – некоторые константы.

ЛЕММА 3.3. При

$$\alpha_1 = 2\pi z_0^1(\mathbf{0}), \quad \alpha_2 = 2\pi z_0^2(\mathbf{0}) \quad (3.5)$$

существует решение матричной краевой задачи

$$\begin{aligned} -(\Delta^* + \lambda_0)B_0(\mathbf{x}) &= \{\alpha_1 \mathbf{z}_0(\mathbf{x}), \alpha_2 \mathbf{z}_0(\mathbf{x})\}, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ B_0(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.6)$$

имеющее следующую дифференцируемую асимптотику в нуле:

$$B_0(\mathbf{x}) = \Gamma_a(\mathbf{x}) + B_0^{(0)} + P_1(\mathbf{x}) + O(r^2 \ln r), \quad (3.7)$$

где $B_0^{(0)}$ – некоторая постоянная матрица, определенная с точностью до слагаемого $\{c_1 \mathbf{z}_0(\mathbf{0}), c_2 \mathbf{z}_0(\mathbf{0})\}$ для любых констант c_1 и c_2 , а $P_1(\mathbf{x})$ – матрица, компоненты которой суть однородные полиномы первой степени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\kappa > 0$ обозначим через $\overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}, \kappa)$ матрицу с элементами

$$\overset{0}{\Gamma}_{kj}(\mathbf{x}, \kappa) := -\frac{\pi}{2} \left[\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\delta_{kj}}{\mu} (\Delta + b_1^2) \right] \frac{1}{b_2^2 - b_1^2} (N_0(b_1 r) - N_0(b_2 r)),$$

где δ_{kj} – символ Кронекера,

$$b_1 := \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda + 2\mu}}, \quad b_2 := \frac{\kappa}{\sqrt{\mu}},$$

а N_0 – функция Неймана (функция Бесселя второго рода, нулевого порядка).

Из определения $\overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}, \kappa)$ следует, что справедлива следующая дифференцируемая асимптотика:

$$\overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}, \sqrt{l\mu}) = \overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}) + \Upsilon + O(r^2 \ln r), \quad r \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

где Υ – некоторая постоянная матрица. Аналогично [10] легко показать, что

$$-\Delta^* \overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}, \sqrt{l\mu}) = l \overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}, \sqrt{l\mu}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (3.9)$$

Обозначим через $\mathbf{B}_0^{(j)}(\mathbf{x})$, $\overset{0}{\Gamma}^{(j)}(\mathbf{x}, \sqrt{l\mu})$, $\Gamma_a^{(j)}(\mathbf{x})$, $\sigma^{(j)}(\omega)$ и $\mathbf{Y}_0^{(j)}$ вектор-столбцы матриц $B_0(\mathbf{x})$, $\overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}, \sqrt{l\mu})$, $\Gamma_a(\mathbf{x})$, $\sigma(\omega)$ и $Y(\mathbf{x})$ соответственно.

Краевая задача (3.6) при $j = 1, 2$ равносильна следующим векторным краевым задачам:

$$-(\Delta^* + \lambda_0)\mathbf{B}_0^{(j)}(\mathbf{x}) = \alpha_j \mathbf{z}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \mathbf{B}_0^{(j)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (3.10)$$

решения которых будем искать в виде:

$$\mathbf{B}_0^{(j)}(\mathbf{x}) = a^{-1} \overset{0}{\Gamma}^{(j)}(\mathbf{x}, \sqrt{\lambda_0 \mu}) + \sigma^{(j)}(\omega) + \mathbf{Y}_0^{(j)}(\mathbf{x}), \quad (3.11)$$

где $\mathbf{Y}_0^{(j)}(\mathbf{x})$ не имеют особенностей в нуле. Подставляя (3.11) в (3.10), получаем следующие краевые задачи на $\mathbf{Y}_0^{(j)}$:

$$\begin{aligned} -(\Delta^* + \lambda_0)\mathbf{Y}_0^{(j)}(\mathbf{x}) &= \lambda_0 \sigma^{(j)}(\omega) + \alpha_j \mathbf{z}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{Y}_0^{(j)}(\mathbf{x}) &= -(a^{-1} \overset{0}{\Gamma}^{(j)}(\mathbf{x}, \sqrt{\lambda_0 \mu}) + \sigma^{(j)}(\omega)), & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\mathbf{Y}_0^{(j)} \in C^\infty(\partial\Omega)$. В силу теорем о разрешимости краевых задач на спектре (см., например, [11]) и теорем о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач существуют постоянные α_j , при которых существуют решения $\mathbf{Y}_0^{(j)} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ краевых задач (3.12), причем, они определены с точностью до слагаемых $c_j \mathbf{z}_0(\mathbf{x})$ для любых постоянных c_j . Отсюда в силу равенств (3.11) и (3.8) вытекает, что существует решение краевой задачи (3.6) с асимптотикой (3.7).

Осталось показать справедливость равенств (3.5) для α_j . Обозначим через $B(R)$ круг радиуса R с центром в начале координат. Умножая уравнение в (3.10) на $\mathbf{z}_0(\mathbf{x})$, применяя третью формулу Бетти [8; гл. VIII, § 4] по области $\Omega \setminus B(R)$, переходя в полученном равенстве к пределу при $R \rightarrow 0$, с учетом асимптотик в нуле вектор-функций $\mathbf{z}_0(\mathbf{x})$ и $\mathbf{B}_0^{(j)}(\mathbf{x})$ получаем справедливость равенств (3.5).

В силу произвола в выборе констант c_1 и c_2 из леммы 3.3 вытекает справедливость следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. При λ_1 , определяемом равенством (2.6), существует решение краевой задачи

$$-(\Delta^* + \lambda_0)\mathbf{z}_1(\mathbf{x}) = \lambda_1 \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \mathbf{z}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (3.13)$$

имеющее следующую дифференцируемую асимптотику в нуле:

$$\mathbf{z}_1(\mathbf{x}) = -(\Gamma_a(\mathbf{x}) + \sigma(\omega))\mathbf{z}_0(\mathbf{0}) + \mathbf{z}_0^\perp + \mathbf{P}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{O}(r^2 \ln r),$$

где постоянный вектор $\mathbf{z}_0^\perp$ ортогонален $\mathbf{z}_0(\mathbf{0})$, а $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$ – вектор-функция, компоненты которой суть однородные полиномы первой степени.

Существует решение краевой задачи

$$-(\Delta^* + \lambda_0)\mathbf{z}_1^\perp(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \mathbf{z}_1^\perp(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (3.14)$$

имеющее следующую дифференцируемую асимптотику в нуле:

$$\mathbf{z}_1^\perp(\mathbf{x}) = -(\Gamma_a(\mathbf{x}) + \sigma(\omega))\mathbf{z}_0^\perp + m\mathbf{z}_0^\perp + \mathbf{Q}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{O}(r^2 \ln r), \quad (3.15)$$

где $m = \text{const}$, а $\mathbf{Q}_1(\mathbf{x})$ – вектор-функция, компоненты которой суть однородные полиномы первой степени.

Обозначим через $L_2^\perp(\Omega)$ подмножество вектор-функций из $L_2(\Omega)$ ортогональных $\mathbf{z}_0(\mathbf{x})$, а через $H_0^l(\Omega)$ обозначим подпространство Соболевского пространства $H^l(\Omega)$, состоящее из вектор-функций, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$.

ЛЕММА 3.4. Обратный оператор $\mathfrak{R}$ краевой задачи

$$\begin{aligned} -(\Delta^* + \lambda_0)\varphi(\mathbf{x}) &= \mathbf{q}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \varphi(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad \varphi(\mathbf{0})\mathbf{z}_0(\mathbf{0}) = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

является ограниченным из $L_2^\perp(\Omega)$ в $H_0^2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{R}}$ обратный оператор краевой задачи

$$\begin{aligned} -(\Delta^* + \lambda_0)\varphi(\mathbf{x}) &= \mathbf{q}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \varphi(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (\varphi, \mathbf{z}_0)_{L_2(\Omega)} = 0, \end{aligned}$$

определенный на $L_2^\perp(\Omega)$. Тогда

$$\mathfrak{R}\mathbf{q} = \tilde{\mathfrak{R}}\mathbf{q} - |\mathbf{z}_0(\mathbf{0})|^{-2}((\tilde{\mathfrak{R}}\mathbf{q})(\mathbf{0})\mathbf{z}_0(\mathbf{0}))\mathbf{z}_0. \quad (3.17)$$

Так как $\tilde{\mathfrak{R}}$ – ограниченный оператор из $L_2^\perp(\Omega)$ в $H_0^2(\Omega)$, а $\|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_1\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}$ (см., например, [11; гл. III, IV, § 6, 2, п. 2, 3]), то из (3.17) следует справедливость доказываемой леммы.

ТЕОРЕМА 3.1. Существуют голоморфная в нуле функция $\Lambda(\tau)$, для которой справедливы равенства (2.5), (2.6), и вектор

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) + \tau\mathbf{z}_1(\mathbf{x}) + \tau^2 d(\tau)\mathbf{z}_1^\perp(\mathbf{x}) + \tau^2 \mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau), \quad (3.18)$$

где $\mathbf{z}_1(\mathbf{x})$ и $\mathbf{z}_1^\perp(\mathbf{x})$ из следствия 1, а $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau)$ – голоморфная в нуле вектор-функция со значениями в $H_0^2(\Omega)$ такие, что

$$-(\Delta^* + \Lambda(\tau))\mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (3.19)$$

причем

$$\mathbf{U}(\mathbf{0}, \tau) = U_0(\tau)\mathbf{z}_0^\perp, \quad (3.20)$$

где $U_0(\tau)$ – голоморфная в нуле функция,

$$d(\tau) = \frac{1 + \tau U_0(\tau)}{1 - m\tau},$$

а константа m из (3.15).

Доказательство. Функцию $\Lambda(\tau)$ будем искать в виде

$$\Lambda(\tau) = \lambda_0 + \tau\lambda_1 + \tau^2\delta(\tau). \quad (3.21)$$

Подставляя (3.18), (3.21) в (3.19), в силу (2.2), (3.13) и (3.14) получаем следующую краевую задачу для $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau)$:

$$-(\Delta^* + \lambda_0)\mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau) := & \lambda_1 \mathbf{z}_1(\mathbf{x}) + \tau\lambda_1(d(\tau)\mathbf{z}_1^\perp(\mathbf{x}) + \mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau)) \\ & + \delta(\tau)(\mathbf{z}_0(\mathbf{x}) + \tau\mathbf{z}_1(\mathbf{x}) + \tau^2 d(\tau)\mathbf{z}_1^\perp(\mathbf{x}) + \tau^2 \mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau)). \end{aligned}$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости этой краевой задачи (см., например, [11; гл. II, § 4, п. 5]) является равенство

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Отсюда находим

$$\delta(\tau) = - \frac{\int_{\Omega} (\lambda_1 \mathbf{z}_1(\mathbf{x}) + \tau\lambda_1(d(\tau)\mathbf{z}_1^\perp(\mathbf{x}) + \mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau))) \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{1 + \tau \int_{\Omega} (\mathbf{z}_1(\mathbf{x}) + \tau d(\tau)\mathbf{z}_1^\perp(\mathbf{x}) + \tau \mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau)) \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}. \quad (3.23)$$

Заметим, что (3.20) равносильно условию

$$\mathbf{U}(\mathbf{0}, \tau) \mathbf{z}_0(\mathbf{0}) = 0. \quad (3.24)$$

Подставляя (3.23) в (3.22), в силу леммы 3.4 получаем, что краевая задача (3.22) с условием (3.24) эквивалентна следующему уравнению в $H_0^2(\Omega)$:

$$\mathbf{U} = T(\tau, \mathbf{U}), \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned} T(\tau, \mathbf{U}) := & \lambda_1 \Re(\mathbf{z}_1) + \tau\lambda_1(d(\tau)\Re(\mathbf{z}_1^\perp) + \Re(\mathbf{U})) \\ & - \frac{\int_{\Omega} (\lambda_1 \mathbf{z}_1 + \tau\lambda_1(d(\tau)\mathbf{z}_1^\perp + \mathbf{U})) \mathbf{z}_0 d\mathbf{x}}{1 + \tau \int_{\Omega} (\mathbf{z}_1 + \tau d(\tau)\mathbf{z}_1^\perp + \tau \mathbf{U}) \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \\ & \times (\Re(\mathbf{z}_0) + \tau\Re(\mathbf{z}_1) + \tau^2 d(\tau)\Re(\mathbf{z}_1^\perp) + \tau^2 \Re(\mathbf{U})). \end{aligned}$$

Из определения $T(\tau, \mathbf{U})$ следует, что, во-первых, оператор-функция $T(\tau, \mathbf{U})$ голоморфна в точке $(\tau, \mathbf{U}) = (0, \mathbf{0})$, а во-вторых,

$$(\mathbf{U} - T(\tau, \mathbf{U}))'|_{(\tau, \mathbf{U})=(0, \mathbf{0})} = I,$$

где I – тождественный оператор. Следовательно (см., например, [12; гл. 5, § 20]), существует единственная голоморфная в нуле вектор-функция $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau)$ со значениями в $H_0^2(\Omega)$, являющаяся решением уравнения (3.25).

В свою очередь, отсюда и из (3.21), и (3.23) вытекает, что $\Lambda(\tau)$ – голоморфная в нуле функция, для которой справедливы равенства (2.5) и (2.6).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть вектор $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Тогда справедлива следующая дифференцируемая по $\mathbf{x}$ асимптотика в нуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau) = & -\tau(\Gamma_a(\mathbf{x}) + \sigma(\omega))\mathbf{z}_0(\mathbf{0}) - \tau^2 d(\tau)(\Gamma_a(\mathbf{x}) + \sigma(\omega))\mathbf{z}_0^\perp \\ & + \mathbf{z}_0(\mathbf{0}) + (\tau + \tau^2 d(\tau)m + \tau^2 U_0(\tau))\mathbf{z}_0^\perp + \mathbf{X}_1(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{O}(\tau r^2 \ln r), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $\mathbf{X}_1(\mathbf{x}, \tau)$ – вектор-функция, компоненты которой являются однородными полиномами первой степени по $\mathbf{x}$ с коэффициентами, голоморфными по τ в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau)$ представим в виде

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau) = -\tau a^{-1} \overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}, \sqrt{\Lambda(\tau)\mu})\mathbf{z}_0(\mathbf{0}) - \tau^2 d(\tau) a^{-1} \overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}, \sqrt{\Lambda(\tau)\mu})\mathbf{z}_0^\perp + \mathbf{W}(\mathbf{x}, \tau). \quad (3.27)$$

Из следствия 1, теоремы 3.1 и (3.8) следует, что

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau) + \tau a^{-1} \overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}, \sqrt{\Lambda(\tau)\mu})\mathbf{z}_0(\mathbf{0}) + \tau^2 d(\tau) a^{-1} \overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}, \sqrt{\Lambda(\tau)\mu})\mathbf{z}_0^\perp \in H^2(\Omega).$$

С другой стороны, в силу (3.9) и (3.19) вектор-функция $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \tau)$ является решением краевой задачи:

$$\begin{aligned} -(\Delta^* + \Lambda(\tau))\mathbf{W}(\mathbf{x}, \tau) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ \mathbf{W}(\mathbf{x}, \tau) &= \tau a^{-1} \overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}, \sqrt{\Lambda(\tau)\mu})\mathbf{z}_0(\mathbf{0}) + \tau^2 d(\tau) a^{-1} \overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}, \sqrt{\Lambda(\tau)\mu})\mathbf{z}_0^\perp, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Так как $\Lambda(\tau)$ – голоморфная в нуле функция и $\Lambda'(0) \neq 0$, а $\overset{0}{\Gamma}(\mathbf{x}, \sqrt{\Lambda(\tau)\mu})$ – голоморфная в нуле функция со значениями $C^k(\partial\Omega)$ для любого k , то из теорем о повышении гладкости решений эллиптических уравнений и теорем вложения следует, что решение краевой задачи (3.28) является голоморфным в нуле вектором со значениями в $C^k(\overline{\Omega})$ для любого k . Тогда справедливость утверждения немедленно вытекает из (3.8), (3.27), теоремы 3.1 и следствия 1.

Аналогично устанавливается справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 3.5. Существуют решения $\mathbf{Z}_1(\mathbf{x}, \tau)$, $\mathbf{Z}_1^\perp(\mathbf{x}, \tau)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} -(\Delta^* + \Lambda(\tau))\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.29)$$

имеющие следующие дифференцируемые по $\mathbf{x}$ асимптотики в нуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}, \tau) &= -\tau \left(\frac{\partial \Gamma_a(\mathbf{x})}{\partial x_1} \nu(\omega) + \frac{\partial \Gamma_a(\mathbf{x})}{\partial x_2} \zeta(\omega) \right) \mathbf{z}_0(\mathbf{0}) + \mathbf{b}_1(\tau) + \mathbf{O}(\tau r \ln r + r), \\ \mathbf{Z}_1^\perp(\mathbf{x}, \tau) &= -\tau \left(\frac{\partial \Gamma_a(\mathbf{x})}{\partial x_1} \nu(\omega) + \frac{\partial \Gamma_a(\mathbf{x})}{\partial x_2} \zeta(\omega) \right) \mathbf{z}_0^\perp + \mathbf{b}_2(\tau) + \mathbf{O}(\tau r \ln r + r), \end{aligned}$$

где $\mathbf{b}_i(\tau)$ – голоморфные в нуле вектор-функции.

4. Доказательство теоремы 2.1. Обозначим

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}, \tau) := \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}, \tau) + \tau \frac{1 + \tau U_0(\tau)}{1 - m\tau} \mathbf{Z}_1^\perp(\mathbf{x}, \tau), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{Z}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) := \mathbf{z}(\mathbf{x}, \tau) + \varepsilon \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \tau). \quad (4.2)$$

Пусть $\Lambda(\tau)$ – голоморфная в нуле функция из теоремы 2.1, удовлетворяющая условиям (2.5), (2.6), тогда в силу теоремы 3.1, следствия 2 и леммы 3.5 получаем, что $\mathbf{Z}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$ является решением краевой задачи

$$-(\Delta^* + \Lambda(\tau))\mathbf{Z}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \mathbf{Z}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (4.3)$$

и имеет следующую дифференцируемую по $\mathbf{x}$ асимптотику в нуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = & -\varepsilon\tau \left(\frac{\partial \Gamma_a(\mathbf{x})}{\partial x_1} \nu(\omega) + \frac{\partial \Gamma_a(\mathbf{x})}{\partial x_2} \zeta(\omega) \right) \mathbf{z}_0(\mathbf{0}) \\ & - \varepsilon\tau^2 \frac{1 + \tau U_0(\tau)}{1 - m\tau} \left(\frac{\partial \Gamma_a(\mathbf{x})}{\partial x_1} \nu(\omega) + \frac{\partial \Gamma_a(\mathbf{x})}{\partial x_2} \zeta(\omega) \right) \mathbf{z}_0^\perp \\ & - \tau(\Gamma_a(\mathbf{x}) + \sigma(\omega))\mathbf{z}_0(\mathbf{0}) - \tau^2 \frac{1 + \tau U_0(\tau)}{1 - m\tau} (\Gamma_a(\mathbf{x}) + \sigma(\omega))\mathbf{z}_0^\perp \\ & + \mathbf{z}_0(\mathbf{0}) + \left(\tau + \tau^2 \frac{1 + \tau U_0(\tau)}{1 - m\tau} m + \tau^2 U_0(\tau) \right) \mathbf{z}_0^\perp + \varepsilon \mathbf{b}(\tau) \\ & + \mathbf{X}_1(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{O}((\tau + \tau^2)\varepsilon r \ln r + \varepsilon r + \tau r^2 \ln r), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $\mathbf{b}(\tau)$ – голоморфная в нуле вектор-функция.

Обозначим

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}, \tau) := -\tau \Psi(\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}_0(\mathbf{0}) - \tau^2 \frac{1 + \tau U_0(\tau)}{1 - m\tau} \Psi(\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}_0^\perp + \varepsilon \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}_1), \quad (4.5)$$

где $\mathbf{v}_1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}_1)$ из леммы 3.2, а $\mathbf{X}_1$ из (4.4). Из лемм 3.1 и 3.2 следует, что $\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ является решением краевой задачи

$$\Delta_{\boldsymbol{\xi}}^* \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \partial\omega, \quad (4.6)$$

и имеет дифференцируемую по $\boldsymbol{\xi}$ асимптотику на бесконечности:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}, \tau) = & -\tau(\Gamma_a(\boldsymbol{\xi}) + \sigma(\omega))\mathbf{z}_0(\mathbf{0}) - \tau^2 \frac{1 + \tau U_0(\tau)}{1 - m\tau} (\Gamma_a(\boldsymbol{\xi}) + \sigma(\omega))\mathbf{z}_0^\perp \\ & - \tau \left(\frac{\partial \Gamma_a(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} \nu(\omega) + \frac{\partial \Gamma_a(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} \zeta(\omega) \right) \mathbf{z}_0(\mathbf{0}) \\ & - \tau^2 \frac{1 + \tau U_0(\tau)}{1 - m\tau} \left(\frac{\partial \Gamma_a(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} \nu(\omega) + \frac{\partial \Gamma_a(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} \zeta(\omega) \right) \mathbf{z}_0^\perp \\ & + \varepsilon \mathbf{X}_1(\boldsymbol{\xi}, \tau) + \varepsilon \boldsymbol{\varsigma}(\omega, \tau) + \mathbf{O}\left(\varepsilon \frac{1}{\rho} + (\tau + \tau^2) \frac{1}{\rho^2}\right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\rho = |\boldsymbol{\xi}|$.

Пусть $\chi(s)$ – срезающая функция из $C^\infty(\overline{\Omega})$, равная единице при $s < 1$ и нулю при $s > 2$. Положим

$$\chi_\varepsilon := \chi\left(\frac{r}{\varepsilon^{1/2}}\right)$$

и

$$\tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \frac{1}{\ln \varepsilon}\right) \chi\left(\frac{r}{\varepsilon^{1/2}}\right) + \mathbf{Z}_\varepsilon\left(\mathbf{x}, \frac{1}{\ln \varepsilon}\right) \left(1 - \chi\left(\frac{r}{\varepsilon^{1/2}}\right)\right). \quad (4.8)$$

В силу (4.5), (4.7) имеем

$$\|\chi_\varepsilon \mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)} = \|\chi_\varepsilon \mathbf{v}\|_{L_2(\overline{B(2\varepsilon^{1/2})})} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad (4.9)$$

а из (3.18), (3.26), (4.1), (4.2) и леммы 3.5 последовательно получаем, что

$$\begin{aligned} \|(1 - \chi_\varepsilon)\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\|_{L_2(\Omega)} &= \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\|_{L_2(\Omega \setminus \overline{B(2\varepsilon^{1/2})})} + \|(1 - \chi_\varepsilon)\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\|_{L_2(\overline{B(2\varepsilon^{1/2})} \setminus B(\varepsilon^{1/2}))} \\ &= O\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|} + \varepsilon^{1/2}\right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(1 - \chi_\varepsilon)\mathbf{Z}\|_{L_2(\Omega)} &= \|\varepsilon\mathbf{Z}\|_{L_2(\Omega \setminus \overline{B(2\varepsilon^{1/2})})} + \|\varepsilon(1 - \chi_\varepsilon)\mathbf{Z}\|_{L_2(\overline{B(2\varepsilon^{1/2})} \setminus B(\varepsilon^{1/2}))} \\ &= O\left(\frac{\varepsilon}{|\ln \varepsilon|}\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Поэтому из (4.8) в силу (4.9)–(4.11) вытекает следующая сходимость:

$$\|\tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon - \mathbf{z}_0\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (4.12)$$

Через $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$ обозначим матрицу размерности 2×2 с элементами

$$(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))_{ij} = \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2.$$

В силу (3.19), (3.29) и (4.6) вектор-функция $\tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon(\mathbf{x})$ является решением краевой задачи

$$-\Delta^* \tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon = \Lambda\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right) \tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon + \tilde{\mathbf{f}}_\varepsilon, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \quad \tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon, \quad (4.13)$$

где

$$\tilde{\mathbf{f}}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}), \quad (4.14)$$

$$\mathbf{f}_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}) = -\Lambda\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right) \mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \frac{1}{\ln \varepsilon}\right) \chi\left(\frac{r}{\varepsilon^{1/2}}\right), \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}) &= 2\nabla\left(\mathbf{Z}_\varepsilon\left(\mathbf{x}, \frac{1}{\ln \varepsilon}\right) - \mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \frac{1}{\ln \varepsilon}\right)\right) \nabla \chi\left(\frac{r}{\varepsilon^{1/2}}\right) \\ &\quad + \alpha \nabla \chi\left(\frac{r}{\varepsilon^{1/2}}\right) \operatorname{div}\left(\mathbf{Z}_\varepsilon\left(\mathbf{x}, \frac{1}{\ln \varepsilon}\right) - \mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \frac{1}{\ln \varepsilon}\right)\right) \\ &\quad + \alpha \nabla\left(\left(\mathbf{Z}_\varepsilon\left(\mathbf{x}, \frac{1}{\ln \varepsilon}\right) - \mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \frac{1}{\ln \varepsilon}\right)\right) \nabla \chi\left(\frac{r}{\varepsilon^{1/2}}\right)\right) \\ &\quad + \left(\mathbf{Z}_\varepsilon\left(\mathbf{x}, \frac{1}{\ln \varepsilon}\right) - \mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \frac{1}{\ln \varepsilon}\right)\right) \Delta \chi\left(\frac{r}{\varepsilon^{1/2}}\right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Напомним, что через $B(R)$ обозначается круг радиуса R с центром в начале координат. Из (4.15) следует, что $\operatorname{supp} \mathbf{f}_{\varepsilon,1} \subset \overline{B(2\varepsilon^{1/2})}$. Поэтому в силу (4.15) и (4.7) последовательно получаем, что $|\mathbf{f}_{\varepsilon,1}(\mathbf{x})| = O(1)$,

$$\|\mathbf{f}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{1/2}). \quad (4.17)$$

В силу (4.4), (4.7) и теоремы 3.1 при $\mathbf{x} \in \overline{B(2\varepsilon^{1/2})} \setminus B(\varepsilon^{1/2})$ (или, что то же самое, при $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{x}\varepsilon^{-1} \in \overline{B(2\varepsilon^{-1/2})} \setminus B(\varepsilon^{-1/2})$) справедливо следующее дифференцируемое по $\mathbf{x}$ равенство:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_\varepsilon\left(\mathbf{x}, \frac{1}{\ln \varepsilon}\right) - \mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \frac{1}{\ln \varepsilon}\right) &= \left(\varepsilon \mathbf{b}\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|}\right) - \varepsilon \boldsymbol{\varsigma}\left(\omega, \frac{1}{|\ln \varepsilon|}\right)\right) \\ &+ \mathbf{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{r} + \frac{1}{|\ln \varepsilon|} \frac{\varepsilon^2}{r^2} + \frac{1}{|\ln \varepsilon|} \varepsilon r \ln r + \varepsilon r + \frac{1}{|\ln \varepsilon|} r^2 \ln r\right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Из (4.16) следует, что $\text{supp } \mathbf{f}_{\varepsilon,2} \subset \overline{B(2\varepsilon^{1/2})} \setminus B(\varepsilon^{1/2})$. Поэтому в силу (4.16), (4.18) и очевидных равенств $|\nabla \chi(r\varepsilon^{-1/2})| = O(\varepsilon^{-1/2})$ и $|\Delta \chi(r\varepsilon^{-1/2})| = O(\varepsilon^{-1})$ последовательно получаем, что $|\mathbf{f}_{\varepsilon,2}(\mathbf{x})| = O(1)$,

$$\|\mathbf{f}_{\varepsilon,2}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{1/2}). \quad (4.19)$$

Тогда из (4.14) в силу (4.17), (4.19) имеем

$$\|\tilde{\mathbf{f}}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{1/2}). \quad (4.20)$$

В работе [4] доказано, что при $\hat{\lambda}$, близких к λ_0 , для решения краевой задачи

$$-\Delta^* \mathbf{u}_\varepsilon = \hat{\lambda} \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{f}_\varepsilon, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \quad \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon, \quad (4.21)$$

справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon = \frac{(\mathbf{f}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}}{\lambda_\varepsilon - \hat{\lambda}} \mathbf{z}_\varepsilon + \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon,$$

где, напомним, $\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x})$ – нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная вектор-функция краевой задачи (2.1) (считая, что $\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x})$ продолжена нулем в ω_ε), а $(\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = 0$. Умножая обе части последнего равенства на $\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x})$ скалярно в $L_2(\Omega)$, получаем

$$|\lambda_\varepsilon - \hat{\lambda}| = \frac{|(\mathbf{f}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}|}{|(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}|}.$$

При $\hat{\lambda} = \Lambda(1/\ln \varepsilon)$, $\mathbf{f}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{f}}_\varepsilon$ и $\mathbf{u}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon$ краевая задача (4.21) примет вид (4.13). Поэтому

$$\left| \lambda_\varepsilon - \Lambda\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right) \right| = \frac{|(\tilde{\mathbf{f}}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}|}{|(\tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}|}. \quad (4.22)$$

Так как в силу (2.3), (4.12) имеет место сходимость

$$|(\tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1,$$

то из (4.20), (4.22) следует, что

$$\left| \lambda_\varepsilon - \Lambda\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right) \right| = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

т.е. верно равенство (2.4). Теорема 2.1 полностью доказана.

Автор выражает благодарность Гадылышину Р.Р. и Борисову Д.И. за внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Самарский, “О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов”, *ДАН СССР*, **63**:6 (1948), 631–634.
- [2] В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, “Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:2 (1984), 347–371.
- [3] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, “Спектральные задачи в сингулярно возмущенных областях и самосопряженные расширения дифференциальных операторов”, *Тр. Санкт-Петербургск. матем. об-ва*, **6**, Научная книга, Новосибирск, 1998, 151–212.
- [4] Д. Б. Давлетов, “Сингулярно возмущенная краевая задача Дирихле для стационарной системы линейной теории упругости”, *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 12, 7–16.
- [5] Д. Б. Давлетов, “Асимптотика собственных значений краевой задачи Дирихле оператора Ламэ в трехмерной области с малой полостью”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1847–1858.
- [6] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев, *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1990.
- [7] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989.
- [8] В. Д. Купрадзе, *Методы потенциала в теории упругости*, Физматгиз, М., 1963.
- [9] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1971.
- [10] В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелиа, М. О. Башелейшвили, Т. В. Бурчуладзе, *Трехмерные задачи математической теории упругости*, Тбилиск. ун-т, Тбилиси, 1968.
- [11] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1983.
- [12] М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рунтцкий, В. Я. Стеценко, *Приближенное решение операторных уравнений*, Наука, М., 1969.

Д. Б. Давлетов

Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы, г. Уфа
E-mail: DavletovDB@mail.ru

Поступило

10.11.2010

Исправленный вариант

09.12.2011