Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Маламуд, В. И. Могилевский, С. Хасси, Об унитарной эквивалентности собственных расширений эрмита оператора и функции Вейля, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 2, 316–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9024>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 18:16:43

Об унитарной эквивалентности собственных расширений эрмитова оператора и функции Вейля

М. М. Маламуд, В. И. Могилевский, С. Хасси

1. Введение. Пусть A – симметрический плотно заданный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с равными индексами дефекта. В последние 30 лет заметную популярность в теории расширений приобрел подход, основанный на понятиях граничной тройки оператора A^* и соответствующей функции Вейля (см. [1]–[3]). Хорошо известно (см. [2]), что в случае простого A функция Вейля $M(\cdot)$ граничной тройки $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ определяет ее однозначно, с точностью до унитарной эквивалентности. В частности, $M(\cdot)$ определяет пару $\{A, A_0\}$, в которой $A_0 := A^* \upharpoonright \ker \Gamma_0 = A_0^*$ однозначно с точностью до унитарного подобия.

С другой стороны, если $\Pi_D = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma, \Gamma^\top\}$ – граничная тройка дуальной пары $\{A, A^\top\}$ операторов, то соответствующая функция Вейля определяет тройку Π_D только с точностью до слабого подобия (см. [4]). В недавних работах [5]–[7] найдены условия на пару $\{A, A^\top\}$, при выполнении которых функция Вейля определяет тройку Π_D с точностью до подобия.

В настоящей заметке исследуются дуальные пары $\{A, A^\top\}$, в которых $A = A^\top$, и те их граничные тройки, функции Вейля которых имеют вид $\widetilde{M}(\cdot) = K^*(B - M(\cdot))^{-1}K$ (см. ниже формулу (4)).

Найдены достаточные условия на один из операторов A_0 или $A_B := A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0)$, при которых функция Вейля $\widetilde{M}(\cdot)$ определяет пару $\{A_0, A_B\}$ (да и всю тройку Π_D) однозначно (с точностью до унитарного подобия). Показано также, что в других случаях функция Вейля $\widetilde{M}(\cdot)$ не определяет основной оператор A_B даже с точностью до подобия.

Всюду далее $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_j$ – гильбертовы пространства, $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ – множество ограниченных линейных операторов из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$, $[\mathcal{H}] := [\mathcal{H}, \mathcal{H}]$, $\mathcal{C}(\mathfrak{H})$ – множество замкнутых плотно заданных операторов в $\mathfrak{H}$.

2. Граничные тройки и функция Вейля. Говорят, что операторы $A, A^\top \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$ образуют *дуальную пару* (ДП) $\{A, A^\top\}$, если $(Af, g) = (f, A^\top g)$ для всех $f \in \text{dom}(A)$, $g \in \text{dom}(A^\top)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [8]. Пусть $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ – гильбертовы пространства и

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix} : \text{dom}((A^\top)^*) \rightarrow \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \quad \Gamma^\top = \begin{pmatrix} \Gamma_0^\top \\ \Gamma_1^\top \end{pmatrix} : \text{dom}(A^*) \rightarrow \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0$$

– линейные отображения. Совокупность $\Pi_D = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma, \Gamma^\top\}$ называют *граничной тройкой* для дуальной пары $\{A, A^\top\}$, если отображения $\Gamma, \Gamma^\top$ сюръективны и для всех $f \in \text{dom}((A^\top)^*)$, $g \in \text{dom}(A^*)$ выполняется тождество Грина

$$((A^\top)^* f, g) - (f, A^* g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0^\top g) - (\Gamma_0 f, \Gamma_1^\top g). \quad (1)$$

Граничная тройка для ДП $\{A, A^\top\}$ существует всегда и не единственна ([4], [8]). С каждой тройкой Π_D связаны два расширения оператора A

$$A_j = (A^\top)^* \upharpoonright \ker \Gamma_j, \quad j \in \{0, 1\}. \quad (2)$$

Оператор-функцию $F: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow [\mathcal{H}]$ называют *неванлинновской* (и относят к классу $R[\mathcal{H}]$), если $\text{Im } z \text{ Im } F(z) \geq 0$ и $F^*(z) = F(\bar{z})$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [4]. Пусть $\Pi_D = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma, \Gamma^\top\}$ – граничная тройка для дуальной пары $\{A, A^\top\}$. Голоморфная оператор-функция $M(\cdot): \rho(A_0) \rightarrow [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$, определенная равенством

$$M(z)\Gamma_0 f_z = \Gamma_1 f_z, \quad f_z \in \mathfrak{N}_z(A^\top) = \ker((A^\top)^* - z),$$

называется *функцией Вейля*, соответствующей граничной тройке Π_D .

Пусть, далее, $A \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$ – симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ с равными дефектными числами $n_\pm(A)$. Положим $A^\top := A$ и рассмотрим ДП $\{A, A\}$. Полагая для этой пары в определении 1 $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 =: \mathcal{H}$, $\Gamma_j^\top = \Gamma_j$, $j \in \{0, 1\}$, получим граничную тройку $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для A^* в смысле [1]. В этом случае тождество (1) принимает вид

$$(A^* f, g) - (f, A^* g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g), \quad f, g \in \text{dom}(A^*), \quad (3)$$

а формула (2) задает самосопряженные расширения $A_j = A^*[\ker \Gamma_j]$. При этом, функция Вейля $M(\cdot)$, введенная в [2], принадлежит классу $R[\mathcal{H}]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [4]. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ – граничная тройка для A^* и $M(\cdot)$ – соответствующая функция Вейля. Пусть также $B, K \in [\mathcal{H}]$, $0 \in \rho(K)$ и

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_0^\top \\ \tilde{\Gamma}_1^\top \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}^\top = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_0^\top \\ \tilde{\Gamma}_1^\top \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{\Gamma}_0 = K^{-1}(B\Gamma_0 - \Gamma_1), \quad \tilde{\Gamma}_1 = K^*\Gamma_0; \quad \tilde{\Gamma}_0^\top = K^{-1}(B^*\Gamma_0 - \Gamma_1), \quad \tilde{\Gamma}_1^\top = K^*\Gamma_0.$$

Тогда $\tilde{\Pi}_D = \{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Gamma}^\top\}$ – граничная тройка для ДП $\{A, A\}$ такая, что

$$\tilde{A}_0 (= A^*[\ker \tilde{\Gamma}_0]) = A^*[\ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0)],$$

и функция Вейля для $\tilde{\Pi}_D$ имеет вид

$$\tilde{M}(z) = K^*(B - M(z))^{-1}K, \quad z \in \rho(\tilde{A}_0). \quad (4)$$

3. Основная лемма. Каждая функция $F(\cdot) \in R[\mathcal{H}]$ допускает интегральное представление

$$F(z) = C + Dz + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\Sigma(t), \quad (5)$$

в котором $C = C^*$, $D \in [\mathcal{H}]$, $D \geq 0$ и $\Sigma(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow [\mathcal{H}]$ – неубывающая операторно-значная функция,

$$\Sigma(t-0) = \Sigma(t) \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{d\Sigma(t)}{1+t^2} \in [\mathcal{H}]$$

(см. [9]). Функцию $\Sigma(\cdot)$ называют *спектральной мерой* функции $F(\cdot)$, а C и D – *параметрами*.

Согласно теореме Лебега мера $\Sigma(\cdot)$ допускает разложение

$$\Sigma(t) = \Sigma^{\text{ac}}(t) + \Sigma^{\text{s}}(t), \quad (6)$$

в котором $\Sigma^{\text{ac}}(\cdot)$ и $\Sigma^{\text{s}}(\cdot)$ – абсолютно непрерывная и сингулярная компоненты меры $\Sigma(\cdot)$ соответственно.

ЛЕММА 1. Пусть $F_j(\cdot) \in R[\mathcal{H}]$ и $\Sigma_j(\cdot), C_j, D_j$ – спектральная мера и параметры функции $F_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, соответственно. Пусть также $B_1, B_2 \in [\mathcal{H}]$ и $B_1 \neq B_1^*$, $B_2 \neq B_2^*$ и

$$\Omega_+ := \{z \in \mathbb{C} : 0 \in \rho(B_1 - F_1(z)) \cap \rho(B_2 - F_2(z))\} \cap \mathbb{C}_+ \neq \emptyset. \quad (7)$$

Если существуют $K_1, K_2 \in [\mathcal{H}]$ такие, что $0 \in \rho(K_1) \cap \rho(K_2)$ и

$$K_1^*(B_1 - F_1(z))^{-1}K_1 = K_2^*(B_2 - F_2(z))^{-1}K_2, \quad z \in \Omega_+, \quad (8)$$

то справедливы равенства

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_1^s(t) &= \tilde{\Sigma}_2^s(t), & \tilde{\Sigma}_2^{ac}(t) - \tilde{\Sigma}_1^{ac}(t) &= \frac{1}{\pi} t(\operatorname{Im} \tilde{B}_2 - \operatorname{Im} \tilde{B}_1), \\ \tilde{C}_1 - \operatorname{Re} \tilde{B}_1 &= \tilde{C}_2 - \operatorname{Re} \tilde{B}_2, & \tilde{D}_1 &= \tilde{D}_2, \end{aligned} \quad (9)$$

в которых $K_j^{-*} := (K_j^{-1})^*$, $\tilde{D}_j := K_j^{-1}D_jK_j^{-*}$ и

$$\tilde{\Sigma}_j(\cdot) := K_j^{-1}\Sigma_j(\cdot)K_j^{-*}, \quad \tilde{B}_j := K_j^{-1}B_jK_j^{-*}, \quad \tilde{C}_j := K_j^{-1}C_jK_j^{-*}, \quad j \in \{1, 2\}.$$

4. Достаточные условия унитарной эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $A^{(j)} \in \mathcal{C}(\mathfrak{H}_j)$, $j \in \{1, 2\}$, – симметрические операторы и $\Pi_j = \{\mathcal{H}_j, \Gamma_0^{(j)}, \Gamma_1^{(j)}\}$ – граничная тройка для $(A^{(j)})^*$. Говорят, что тройки Π_1 и Π_2 унитарно эквивалентны, если существует унитарный оператор $U \in [\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]$ такой, что

$$UA^{(1)} = A^{(2)}U \quad \text{и} \quad \Gamma_j^{(2)}U = \Gamma_j^{(1)}, \quad j \in \{0, 1\}.$$

Если тройки Π_1 и Π_2 унитарно эквивалентны и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, то для каждого $B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ справедливы равенства $UA_B^{(1)} = A_B^{(2)}U$, в которых

$$A_B^{(j)} = (A^{(j)})^*[\operatorname{dom}(A_B^{(j)}), \quad \operatorname{dom}(A_B^{(j)}) = \ker(\Gamma_1^{(j)} - B\Gamma_0^{(j)}), \quad j \in \{1, 2\}. \quad (10)$$

В частности, пары $\{A_0^{(1)}, A_1^{(1)}\}$ и $\{A_0^{(2)}, A_1^{(2)}\}$ унитарно эквивалентны.

Напомним, что симметрический оператор A называют *простым*, если он не допускает представления $A = S_1 \oplus S_2$, в котором $S_1 = S_1^* \neq 0$ и $S_2 \subset S_2^*$.

В случае простого A функция Вейля $M(\cdot)$ определяет граничную тройку для A^* однозначно с точностью до унитарной эквивалентности [2], [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $A^{(j)} \in \mathcal{C}(\mathfrak{H}_j)$ – простой симметрический оператор, $\Pi_j = \{\mathcal{H}_j, \Gamma_0^j, \Gamma_1^j\}$ – граничная тройка для $(A^{(j)})^*$ и $M_j(\cdot)$ – соответствующая функция Вейля, $j \in \{1, 2\}$. Пусть $\Sigma_j(\cdot)$ – спектральная мера и $C_j = C_j^*$, $D_j = D_j^* \geq 0$ – параметры $R_{\mathcal{H}}$ -функции $M_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$ (см. (5)). Пусть, далее, $B_j \neq B_j^* \in [\mathcal{H}_j]$, $A_{B_j}^{(j)}$ определены равенствами (10) и

$$\Omega_+ := \rho(A_{B_1}) \cap \rho(A_{B_2}) \cap \mathbb{C}_+ \neq \emptyset.$$

Если $K_j \in [\mathcal{H}, \mathcal{H}_j]$, $0 \in \rho(K_j)$, $j \in \{1, 2\}$, и

$$K_1^*(B_1 - M_1(z))^{-1}K_1 = K_2^*(B_2 - M_2(z))^{-1}K_2, \quad z \in \Omega_+, \quad (11)$$

то справедливы равенства (9).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть в условиях предложения 2 $\operatorname{Im} B_j = K_j J K_j^*$, где $J = J^* = J^{-1}$ и $0 \in \rho(K_j)$, $j \in \{1, 2\}$. Тогда операторы $A_{B_1}^{(1)} \in \operatorname{Ext}_{A^{(1)}}$ и $A_{B_2}^{(2)} \in \operatorname{Ext}_{A^{(2)}}$ унитарно подобны.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. В силу условий теоремы, $\operatorname{Im} \tilde{B}_j = K_j^{-1} \operatorname{Im} B_j K_j^{-*} = J$, $j \in \{1, 2\}$. Поэтому равенства (9) дают $\tilde{\Sigma}_1^{ac}(t) = \tilde{\Sigma}_2^{ac}(t)$ и $\tilde{\Sigma}_1^s(t) = \tilde{\Sigma}_2^s(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Отсюда уже легко вытекает унитарная эквивалентность.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно [3; теорема 7.1] одна из характеристических оператор-функций (почти разрешимого) расширения $A_{B_j}^{(j)} \in \operatorname{Ext}_{A^{(j)}}$ имеет вид

$$W_j(z) = I_{\mathcal{H}} + 2iK_j^*(B_j^* - M_j(z))^{-1}K_jJ, \quad j \in \{1, 2\}. \quad (12)$$

Поэтому равенство (11) эквивалентно равенству $W_1(z) = W_2(z)$, $\bar{z} \in \Omega_+$, и следствие 1 дает другое доказательство теоремы об унитарном подобии расширений в случае совпадения их характеристических функций (см. [9], [3]).

Для формулировки следующего результата наряду с тройками Π_1 и Π_2 мы введем граничные тройки $\hat{\Pi}_j = \{\mathcal{H}, \hat{\Gamma}_0^j, \hat{\Gamma}_1^j\}$, $j \in \{0, 1\}$, для A^* , полагая

$$\hat{\Gamma}_0^j := K_j^{-1}((\operatorname{Re} B_j)\Gamma_0^j - \Gamma_1^j), \quad \hat{\Gamma}_1^j := K_j^* \Gamma_0^j, \quad j \in \{1, 2\}. \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть в условиях предложения 2 каждая из операторных мер Σ_j^{ac} , $j \in \{1, 2\}$, не эквивалентна операторной мере Лебега $I_{\mathcal{H}} dt$. Тогда граничные тройки $\hat{\Pi}_1$ и $\hat{\Pi}_2$ унитарно эквивалентны. В частности, расширения $A_{B_1}^{(1)} \in \operatorname{Ext}_{A^{(1)}}$ и $A_{B_2}^{(2)} \in \operatorname{Ext}_{A^{(2)}}$ унитарно эквивалентны.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть в условиях предложения 2 $\sigma_{\text{ac}}(A_0^{(1)}) \cup \sigma_{\text{ac}}(A_0^{(2)}) \neq \mathbb{R}$. Тогда граничные тройки $\hat{\Pi}_1$ и $\hat{\Pi}_2$ унитарно эквивалентны. В частности, операторы $A_{B_1}^{(1)} \in \operatorname{Ext}_{A^{(1)}}$ и $A_{B_2}^{(2)} \in \operatorname{Ext}_{A^{(2)}}$ унитарно подобны.

Условия следствия 2 выполнены, например, если $\rho(A_{B_1}^{(1)}) \cap \rho(A_{B_2}^{(2)}) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия предложения 2 и

$$\Omega_{\pm} := \rho(A_{B_1}^{(1)}) \cap \rho(A_{B_2}^{(2)}) \cap \mathbb{C}_{\pm} \neq \emptyset.$$

Если равенство (11) выполняется в окрестностях некоторых точек $z_{\pm} \in \Omega_{\pm}$, то граничные тройки $\hat{\Pi}_1$ и $\hat{\Pi}_2$ унитарно эквивалентны. В частности, расширения $A_{B_1}^{(1)} \in \operatorname{Ext}_{A^{(1)}}$ и $A_{B_2}^{(2)} \in \operatorname{Ext}_{A^{(2)}}$ унитарно подобны.

5. Негативные результаты.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A^{(1)} \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$ – простой симметрический оператор, $\Pi_1 = \{\mathcal{H}, \Gamma_0^{(1)}, \Gamma_1^{(1)}\}$ – граничная тройка для $(A^{(1)})^*$, $M_1(\cdot)$ – соответствующая функция Вейля и $(B_1^* \neq) B_1 \in [\mathcal{H}_1]$ – аккумулятивный оператор. Тогда существует (не единственный) простой симметрический оператор $A^{(2)} \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$, граничная тройка $\Pi_2 = \{\mathcal{H}, \Gamma_0^{(2)}, \Gamma_1^{(2)}\}$ для $A^{(2)*}$ и (неединственный) диссипативный оператор $B_2 \in [\mathcal{H}]$ такой, что

$$(B_1 - M_1(z))^{-1} = (B_2 - M_2(z))^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (14)$$

но граничные тройки Π_1 и Π_2 не унитарно эквивалентны. Более того, операторы $A_{B_1}^{(1)}$ и $A_{B_2}^{(2)}$ вида (10) не подобны.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим в $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ симметрический оператор

$$A = -i \frac{d}{dx}, \quad \operatorname{dom}(A) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}_-) \oplus W_0^{1,2}(\mathbb{R}_+) = \{f \in W^{1,2}(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}. \quad (15)$$

Определим граничные тройки $\Pi_j = \{\mathcal{H}, \Gamma_0^{(j)}, \Gamma_1^{(j)}\}$, $j \in \{1, 2\}$, для A^* , полагая

$$\sqrt{2}\Gamma_0^{(1)}f := [f(+0) - f(-0)], \quad \sqrt{2}\Gamma_0^{(1)}f := i[f(+0) + f(-0)], \quad (16)$$

и $\Gamma_0^{(2)} := 3^{-1/2}\Gamma_0^{(1)}$, $\Gamma_1^{(2)} := \sqrt{3}\Gamma_1^{(1)}$. Соответствующие функции Вейля $M_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, имеют вид

$$M_1(z) = \begin{cases} iI_{\mathcal{H}}, & z \in \mathbb{C}_+, \\ -iI_{\mathcal{H}}, & z \in \mathbb{C}_-, \end{cases} \quad M_2(z) = \begin{cases} 3iI_{\mathcal{H}}, & z \in \mathbb{C}_+, \\ -3iI_{\mathcal{H}}, & z \in \mathbb{C}_-. \end{cases} \quad (17)$$

Полагая в (10) $B_1 = -iI_{\mathcal{H}}$ и $B_2 = iI_{\mathcal{H}}$, получаем аккумулятивное и диссипативное расширения A_{B_j} , $j \in \{1, 2\}$, оператора A , которые даже не подобны. Действительно, $\sigma_p(A_{B_1}) = \mathbb{C}_-$, $\sigma(A_{B_1}) = \overline{\mathbb{C}_-}$ и $\sigma(A_{B_2}) = \mathbb{R}$.

В то же время

$$(B_1 - M_1(z))^{-1} = -\frac{i}{2} \cdot I_{\mathcal{H}} = (B_2 - M_2(z))^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (18)$$

Отметим еще, что оператор A_{B_2} подобен самосопряженному оператору $A_0 = -id/dx$, $\text{dom}(A_0) = W^{1,2}(\mathbb{R})$. В этом примере $A_0^{(1)} = A_0^{(2)} =: A_0$ и спектральная мера E_{A_0} оператора A_0 спектрально эквивалентна мере $I_{\mathcal{H}} dt$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наукова Думка, Киев, 1984. [2] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *J. Funct. Anal.*, **95**:1 (1991), 1–95. [3] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *J. Math. Sci.*, **73**:2 (1995), 141–242. [4] M. M. Malamud, V. I. Mogilevskii, *Methods Funct. Anal. Topology*, **8**:4 (2002), 72–100. [5] M. Brown, J. Hinchcliffe, M. Marletta, S. Naboko, I. Wood, *Integral Equations Operator Theory*, **63**:3 (2009), 297–320. [6] Yu. M. Arlinskii, S. Hassi, H. de Snoo, *Operator Theory and Indefinite Inner Product Spaces*, Oper. Theory Adv. Appl., **163**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006, 23–54. [7] Д. З. Аров, М. А. Нудельман, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 3–24. [8] В. Е. Лянце, О. Г. Сторож, *Методы теории неограниченных операторов*, Наукова Думка, Киев, 1983. [9] М. С. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов*, Наука, М., 1969.

М. М. Маламуд

Институт прикладной математики и
механики НАН Украины, г. Донецк
E-mail: mmm@telenet.dn.ua

Поступило

31.12.2010

В. И. Могилевский

Луганский национальный университет им. Тараса Шевченко
E-mail: vim@mail.dsip.net

С. Хасси

University of Vaasa, Финляндия
E-mail: sha@uwasa.fi