Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Боган, Об условиях сопряжения А. А. Самарского и В. Б. Андреева в теории упругих балок, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 5, 662–669

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9027>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:20:04

Об условиях сопряжения А. А. Самарского и В. Б. Андреева в теории упругих балок

Ю. А. Боган

Доказано, что условия сопряжения упругих балок неидеальным шарниром являются предельными при построении асимптотики задачи сопряжения двух упругих тонких тел, если граница между телами заполнена малоподатливым на растяжение материалом.

Библиография: 4 названия.

В теории упругих балок известны условия сопряжения шарниром конечной жесткости (см. [1]). Предположим, что мы имеем две упругие балки, подчиняющиеся гипотезам Бернулли–Эйлера и занимающие на оси x_1 отрезки $(-l, 0)$ и $(0, l)$ соответственно. Тогда условия сопряжения в точке $x_1 = 0$ шарниром с жесткостью $k > 0$ можно записать так:

$$[w] = 0, \quad D \frac{d^2 w}{dx_1^2}(\pm 0) = k \left[\frac{dw}{dx_1} \right](0), \quad \left[D \frac{d^2 w}{dx_1^2} \right](0) = 0, \quad D \left[\frac{d^3 w}{dx_1^3} \right](0) = 0.$$

Здесь $w(x)$ – прогиб, а D – жесткость балки. Другими словами, в точке стыка прогиб и перерезывающая сила непрерывны, а момент слева и справа пропорционален углу поворота. Квадратные скобки обозначают скачок функции. Легко показать (это будет сделано в дальнейшем), что в условиях первой краевой задачи (торцы составной балки защемлены) эта задача сопряжения имеет единственное решение. Хорошо известно, (см., например, [2]), что модель балки Бернулли–Эйлера в некотором смысле является предельной для тонкого упругого тела, если один из размеров устремить к нулю. Данная статья возникла при попытке понять, как возникают приведенные выше условия сопряжения, если тело является тонким и при этом составным. Оказалось, что с механической точки зрения эти условия возникают в двумерной теории упругости в тонкой области, ослабленной поперечной щелью, на берегах которой поставлены условия контакта, связывающие значения нормального (по отношению к щели) напряжения и скачок нормального перемещения. Отметим, что впервые подобного рода условия сопряжения встречаются в статье [3]. Однако в этой статье изучалась ситуация, в которой связывается касательное напряжение и скачок касательного перемещения. Ранее аналогичные условия рассматривались в стационарной теории теплопроводности [4]. С механической точки зрения поставленные ниже условия контакта (для упругого тела) возникают при

рассмотрении тонкой прослойки с малым модулем Юнга на границе раздела. Как показано в настоящей работе, именно эти условия сопряжения возникают в пределе при стремлении вертикального размера области к нулю.

1. Перейдем к точным формулировкам. Рассмотрим двумерную задачу и будем (для упрощения вычислений) считать тело ортотропным. Примем закон Гука в виде

$$\sigma_{11} = d_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + d_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \sigma_{22} = d_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + d_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \sigma_{12} = d_{66} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right).$$

Здесь u_1, u_2 – перемещения, σ_{ij} , $i, j = 1, 2$, – напряжения. Предполагается, что коэффициенты d_{ij} , $i, j = 1, 2, 6$, таковы, что удельная потенциальная энергия деформации является положительно определенной квадратичной формой:

$$d_{11}d_{22} - d_{12}^2 > 0, \quad d_{66} > 0, \quad d_{11} > 0, \quad d_{22} > 0.$$

Будем предполагать, что тело состоит из двух областей и поставим в составной области $Q_h = Q_h^1 \cup Q_h^2$, где

$$Q_h^1 = \left\{ (x_1, x_2); -l \leq x_1 \leq 0, -\frac{h}{2} \leq x_2 \leq \frac{h}{2} \right\},$$

$$Q_h^2 = \left\{ (x_1, x_2); 0 \leq x_1 \leq l, -\frac{h}{2} \leq x_2 \leq \frac{h}{2} \right\},$$

для системы уравнений теории упругости

$$-\sigma_{ij,j} = f_j, \quad j = 1, 2 \quad (1)$$

(запятая внизу обозначает производную по переменной x_j) граничные условия

$$u_1(-l, x_2) = u_1(l, x_2) = 0, \quad u_2(-l, x_2) = u_2(l, x_2) = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{22} \left(x_1, \pm \frac{h}{2} \right) = 0, \quad \sigma_{12} \left(x_1, \pm \frac{h}{2} \right) = 0, \quad (3)$$

и условия сопряжения на прямой $x_1 = 0$:

$$\sigma_{11}|_{x_1=\pm 0} = \frac{k}{h}[u_1], \quad k > 0, \quad [\sigma_{12}]|_{x_1=0} = 0, \quad [u_2]|_{x_1=0} = 0. \quad (4)$$

Отметим, что при $k \rightarrow \infty$ получим идеальный контакт, т.е. непрерывность перемещений и напряжений σ_{11}, σ_{12} при $x_1 = 0$. Докажем предварительно, что краевая задача (1)–(4) имеет единственное решение. Введем симметричную билинейную форму:

$$a^h(u, v) = \int_{Q_h} \sigma_{ij}(u) e_{ij}(v) dx.$$

(по повторяющимся индексам суммирование от 1 до 2). Здесь $e_{ij}(v)$, $i, j = 1, 2$, – деформации. Введем гильбертово пространство $V(Q_h)$, определив его следующим образом:

$$V(Q_h) = \{(v_1, v_2); v_k \in [H^1(Q_h^k)]^2, [v_2](0, x_2) = 0, v_k(-l, x_2) = v_k(l, x_2) = 0, k = 1, 2\}.$$

Здесь $H^1(Q_h^k)$ – стандартное пространство Соболева. Вариационная постановка краевой задачи (1)–(4) состоит в определении функции $u \in V(Q_h)$ из интегрального тождества

$$a^h(u, v) + \frac{k}{h} \int_{-h/2}^{h/2} [u_1][v_1] dx_2 = \int_{Q_h} (f_1 v_1 + f_2 v_2) dx_1 dx_2, \quad f_k \in L^2(Q_h), \quad k = 1, 2. \quad (5)$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Краевая задача (1)–(4) имеет единственное решение, принадлежащее $V(Q_h)$.*

Обозначим через $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ нормы в $L^2(Q_h^1)$ и $L^2(Q_h^2)$ соответственно и положим

$$\|v\|_1^2 = \sum_{i,j} |e_{ij}(v)|_1^2 + \sum_i |v_i|_1^2, \quad \|v\|_2^2 = \sum_{i,j} |e_{ij}(v)|_2^2 + \sum_i |v_i|_2^2, \\ b^h(u, v) = \int_{-h/2}^{h/2} [u_1][v_1] dx_2.$$

Произведение $H^1(Q_h^1) \times H^1(Q_h^2)$ – это гильбертово пространство с нормой произведения

$$\|v\|^2 = \|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_2^2.$$

Введем на $V(Q_h)$ величину

$$N_h(v) = \sum_{i,j} |e_{ij}(v)|_1^2 + \sum_{i,j} |e_{ij}|_2^2 + b_h(v, v).$$

ЛЕММА. *На пространстве $V(Q_h)$ величина $N_h(v)$ эквивалентна стандартной гильбертовой норме.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По непрерывности отображения, сопоставляющего элементу $v_i \in [H^1(Q_h^i)]$, $i = 1, 2$, его след при $x_1 = 0$, получим, что

$$b_h(v, v) \leq 2 \left(\int_{\Gamma} v_1^2(0, x_2) dx_2 + \int_{\Gamma} v_1(-0, x_2)^2 dx_2 \right) \leq C(\|v\|_1^2 + \|v\|_2^2).$$

Здесь $\Gamma = \{(0, x_2); -h/2 \leq x_2 \leq h/2\}$. Это показывает, что существует постоянная C_1 такая, что

$$N_h(v) \leq C_1 \|v\|^2.$$

Для доказательства справедливости неравенства $\|v\|^2 \leq C_2 N_h(v)$, $C > 0$ для любой $v \in V(Q_h)$, используем стандартное рассуждение. Предположим противное. Тогда для любого $n > 0$ можно найти такой элемент $v_n \in V(Q_h)$, что $\|v_n\| = 1$, $N_h^2(v_n) \leq 1/n$. В этих предположениях последовательность v_n ограничена в $V(Q_h)$. Это, в частности, показывает, что деформации $e_{ij}(v_n)$, $i, j = 1, 2$ слабо сходятся к нулю в $L^2(Q_h^1) \times L^2(Q_h^2)$ при n , стремящемся к бесконечности. Так как в Q_h^1 и Q_h^2 справедливо второе неравенство Корна, отсюда можно заключить, что предельная функция v в Q_h^1 и Q_h^2 совпадает с жестким перемещением. Из однородных

граничных условий при $x_1 = \pm l$ следует, что $v = 0$. Так как оператор вложения из $H^1(Q_h^1) \times H^1(Q_h^2)$ в $L^2(Q_h^1) \times L^2(Q_h^2)$ вполне непрерывен, то из равномерно сходящейся последовательности v_n можно извлечь сильно сходящуюся в $L^2(Q_h^1) \times L^2(Q_h^2)$ подпоследовательность. Тогда для этой подпоследовательности имеем $\|v\| = |v|_1 = 1$, что противоречит тому, что $v = 0$.

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно заметить, что из леммы следует коэрцитивность квадратичной формы

$$a^h(u, u) + \frac{k}{h} \int_{-h/2}^{h/2} [u_1]^2 dx_2$$

на $V(Q_h)$, что и позволяет утверждать существование единственного решения.

2. Рассмотрим теперь вопрос о поведении решения задачи (2)–(4) при малом h . Как всегда, при построении асимптотики решения краевой задачи в сингулярно возмущенной области введем растянутую координату $y = x_2/h$, тем самым сняв зависимость области от малого параметра. Тогда область Q^h превратится в область $Q = \{(x_1, y); |x_1| \leq l, |y| \leq 1/2\}$, но искомые функции приобретут зависимость от малого параметра. Положим также

$$u_1^h = u_1(x_1, y), \quad g_2^h(x_1, y) = \frac{u_2(x_1, y)}{h}, \quad g_2(x_1, y) = \frac{v_2(x_1, y)}{h}.$$

Введение функции $g_2^h(x_1, y)$ необходимо, чтобы учесть малость прогиба балки. Тогда интегральное тождество (5) можно переписать так:

$$\begin{aligned} & \int_Q \left\{ \left[d_{11} \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} + d_{12} h^{-2} \frac{\partial g_2^h}{\partial y} \right] \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \left[d_{12} \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} + d_{22} h^{-2} \frac{\partial g_2^h}{\partial y} \right] h^{-2} \frac{\partial g_2}{\partial y} \right. \\ & \quad \left. + d_{66} h^{-2} \left(\frac{\partial u_1^h}{\partial y} + \frac{\partial g_2^h}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) \right\} dx_1 dy \\ & + k \int_{-1/2}^{1/2} [u_1^h][v_1] dy \\ & = \int_Q (f_1 v_1 + f_2 h^{-1} g_2) dx_1 dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем также считать, что $f_2 = h s(x_1, y)$; чтобы не менять обозначений, сохраним за $s(x_1, y)$ обозначение f_2 . Значок h сверху отмечает зависимость решения от малого параметра. Аналогично предыдущему введем пространство $V(Q)$, положив

$$\begin{aligned} V(Q) = \{ & (g_1, g_2), g_1, g_2 \in [H^1(Q_k)]^2, k = 1, 2, [g_2](0, x_2) = 0, \\ & g_k(-l, x_2) = g_k(l, x_2) = 0, k = 1, 2 \}. \end{aligned}$$

Для единообразия обозначений мы положили $v_1 = g_1$. В дальнейшем (для сокращения записи) под $H^1(Q)$ будем понимать $H^1(Q_1) \times H^1(Q_2)$, а под $L^2(Q) = L^2(Q_1) \times L^2(Q_2)$. Здесь

$$Q_1 = \left\{ (x_1, y); -l < x_1 < 0, |y| < \frac{1}{2} \right\}, \quad Q_2 = \left\{ (x_1, y); 0 < x_1 < l, |y| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Задача определения функции $(u_1^h, g_2^h) \in V(Q)$ из интегрального тождества (6) имеет единственное решение при $f_k \in L^2(Q)$, $k = 1, 2$, и при этом справедливы равномерные по h оценки*

$$\|u^h\|_V \leq C, \quad h^{-4} \int_Q \left(\frac{\partial g_2^h}{\partial y} \right)^2 dx_1 dy \leq C, \quad h^{-2} \int_Q \left(\frac{\partial u_1^h}{\partial y} + \frac{\partial g_2^h}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 dy \leq C. \quad (7)$$

Существование единственного решения доказывается аналогично тому, как это было сделано в пункте 1, и мы не будем на этом останавливаться. Докажем справедливость оценок (7). Положим в интегральном тождестве (6) $g_1 = u_1^h$, $g_2 = g_2^h$. Правая часть интегрального тождества (6) – это непрерывный линейный функционал на $V(Q)$; норма на $V(Q)$ эквивалентна стандартной норме в $H^1(Q)$; по компактности вложения $H^1(Q)$ в $L^2(Q)$ правая часть в интегральном тождестве (6) оценивается через норму в $H^1(Q)$; так как $h < 1$, отсюда следует первая оценка в (7), и как следствие, остальные оценки. Из оценок (7) следует, что из последовательности (u_1^h, g_2^h) можно выделить слабо сходящуюся в $V(Q)$ подпоследовательность, такую, что в пределе

$$g_2^0 = g_2^0(x_1), \quad u_1^0 = -y \frac{\partial g_2^0}{\partial x_1} + \psi_1(x_1).$$

При этом $g_2(x_1) \in H^2(-l, l)$, $\psi_1(x_1) \in H^1(-l, l)$. Докажем теперь, что в пределе напряжения σ_{k2}^h , $k = 1, 2$, слабо сходятся к нулю в $L^2(Q)$. Здесь

$$\sigma_{22}^h = d_{11} \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} + d_{12} h^{-2} \frac{\partial g_2^h}{\partial y}, \quad \sigma_{12}^h = d_{66} \left[\frac{\partial u_1^h}{\partial y} + \frac{\partial g_2^h}{\partial x_1} \right].$$

Заметим, что из оценок (7) следует, что функции

$$q_1^h = h^{-2} \frac{\partial g_2^h}{\partial y}, \quad q_2^h = h^{-1} \left(\frac{\partial u_1^h}{\partial y} + \frac{\partial g_2^h}{\partial x_1} \right)$$

слабо в $L^2(Q)$ сходятся соответственно к функциям q_1^0 , q_2^0 . Поэтому при $v_1 = 0$ получим равенство

$$\int_Q \left(\sigma_{22}^h h^{-2} \frac{\partial g_2}{\partial y} + d_{66} h^{-1} q_2^h \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right) dx_1 dy = \int_Q f_2 h^{-1} g_2 dx_1 dy. \quad (8)$$

Умножим (8) на h^2 и перейдем к пределу при $h \rightarrow +0$ и фиксированной g_2 . Тогда получим равенство

$$\int_Q \sigma_{22}^0 \frac{\partial g_2}{\partial y} dx_1 dy = 0,$$

откуда следует, что σ_{22}^0 не зависит от y . Положим в (8) $g_2 = y\varphi(x_1)$, где $\varphi(x_1)$ – гладкая финитная в Q функция. Получим равенство

$$\int_Q \sigma_{22}^0 \varphi(x_1) dx_1 dy = 0,$$

приводящее к равенству $\sigma_{22}^0 = 0$. Аналогично, положим в (6) $g_2 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_Q \left\{ \left(d_{11} \frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} + d_{12} h^{-2} \frac{\partial g_2^h}{\partial y} \right) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + d_{66} h^{-2} \left(\frac{\partial u_1^h}{\partial y} + \frac{\partial g_2^h}{\partial x_1} \right) \frac{\partial v_1}{\partial y} \right\} dx_1 dy \\ & \quad + k \int_{-1/2}^{1/2} [u_1^h][v_1] dy \\ & = \int_Q f_1 v_1 dx_1 dy. \end{aligned} \quad (9)$$

Умножим (9) на h^2 и перейдем к пределу при $h \rightarrow +0$. Тогда получим равенство

$$\int_Q d_{66} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial y} + \frac{\partial g_2^0}{\partial x_1} \right) \frac{\partial g_1}{\partial y} dx_1 dy = 0,$$

из которого следует, что функция

$$d_{66} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial y} + \frac{\partial g_2^0}{\partial x_1} \right) = G(x_1, y)$$

зависит только от x_1 . Положив в предыдущем равенстве $g_1 = y\varphi(x_1)$, где $\varphi(x_1)$ – гладкая финитная функция, получим, что $G(x_1, y) = 0$. Пусть V_{KL} – замкнутое подпространство $V(Q)$, выделяемое условиями

$$\frac{\partial g_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial x_1} = 0,$$

другими словами, требованием равенства нулю деформаций

$$e_{22}(g) = 0, \quad e_{12}(g) = 0, \quad g = (g_1, g_2).$$

На V_{KL} интегральное тождество (6) приобретает вид

$$\int_Q \left(d_{11} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + d_{12} q_1 \right) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dy + k \int_{-1/2}^{1/2} [u_1^0][v_1] dy = \int_Q (f_1 v_1 + f_2 v_2) dx_1 dy. \quad (10)$$

Так как

$$d_{12} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + d_{22} q_1 = 0$$

по доказанному выше, последнее тождество можно записать так:

$$\int_Q D \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dy + k \int_{-1/2}^{1/2} [u_1^0][v_1] dy = \int_Q (f_1 v_1 + f_2 v_2) dx_1 dy. \quad (11)$$

Здесь

$$D = d_{11} - \frac{d_{12}^2}{d_{22}} > 0$$

ввиду положительной определенности потенциальной энергии деформации.

На подпространстве V_{KL}

$$u_1^0 = -y \frac{\partial g_2^0}{\partial x_1} + \psi_1(x_1), \quad v_1 = -y \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \psi_2(x_1).$$

Подставим эти выражения в (11) и проинтегрируем результат по y . Получим интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \frac{D}{12} \int_0^1 \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} dx_1 + D \int_0^1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{k}{12} \left[\frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right] \left[\frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right] + k[\psi_1][\psi_2] \\ &= \int_0^1 \left(-\langle y f_1 \rangle \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \langle f_2 \rangle v_2 \right) dx_1 + \int_0^1 \langle f_1 \rangle \psi_1 dx_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\langle g \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} g(x_1, y) dy, \quad u_2^0 \in H_0^2(-l, l), \quad \psi_1 \in H_0^1(-l, l).$$

Значок 0 сверху обозначает слабый предел функции. Полученный функционал соответствует функционалу, возникающему при изучении задачи растяжения и изгиба составной балки, ослабленной неидеальным шарниром. Положим $w = u_2^0$. Тогда уравнение для прогиба и краевые условия при $x_1 = 0, 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{D}{12} \frac{d^4 w}{dx_1^4} = \langle f_2 \rangle + \frac{d\langle y f_1 \rangle}{dx_1}, \\ & w(0) = w(1) = 0, \quad \frac{dw}{dx_1}(0) = \frac{dw}{dx_1}(1) = 0. \end{aligned}$$

Разумеется, здесь производная $d\langle y f_1 \rangle/dx_1$ понимается в смысле теории распределений. Условия сопряжения в точке $x_1 = 0$ таковы:

$$[w] = 0, \quad D \frac{d^2 w}{dx_1^2}(\pm 0) = k \left[\frac{dw}{dx_1} \right](0), \quad \left[D \frac{d^2 w}{dx_1^2} \right](0) = 0, \quad D \left[\frac{d^3 w}{dx_1^3} \right](0) = 0.$$

Таким образом, в точке $x_1 = 0$ образовался шарнир с конечной жесткостью k . Функция ψ_1 удовлетворяет уравнению

$$-D \frac{d^2 \psi_1}{dx_1^2} = \langle f_1 \rangle$$

и условию сопряжения при $x_1 = 0$

$$D \frac{d\psi_1}{dx_1} \Big|_{x_1=\pm 0} = k[\psi_1],$$

и соответствует задаче растяжения упругого стержня. Сформулируем теперь основной результат работы. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Решение краевой задачи (6) слабо сходится при $h \rightarrow +0$ в $V(Q)$ к решению краевой задачи (12).*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Самарский, В. Б. Андреев, *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, М., 1976.
- [2] С. А. Назаров, *Введение в асимптотические методы теории упругости*, Изд-во ЛГУ, Л., 1983.

- [3] F. Léné, D. Legullion, “Étude de l’influence d’un glissement entre les constituants d’un matériau composite sur ses coefficients de comportement effectifs”, *J. Mécanique*, **20**:3 (1981), 509–536.
- [4] E. Sanches-Palencia, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Phys., **127**, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

Ю. А. Боган

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

E-mail: bogan@hydro.nsc.ru

Поступило

15.11.2010