Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. И. Григорчук, Ветвящиеся группы, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 852–858

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm903>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:18:26

УДК 512.54

ВЕТВЯЩИЕСЯ ГРУППЫ

Р. И. Григорчук

Определен класс ветвящихся групп (как в абстрактной, так и в проконечной категориях). Установлена связь этого класса с классом экстремальных групп. Исследованы свойства ветвящихся групп. Указаны приложения конгруэнц-свойства для теории проконечных ветвящихся групп. Доказана слабая максимальность параболических подгрупп в ветвящихся группах.

Библиография: 18 названий.

В этой заметке мы определяем класс ветвящихся групп (как в абстрактной, так и в проконечной категориях), формулируем основные утверждения о ветвящихся группах и обсуждаем роль этого класса в контексте фундаментальных проблем теории групп. При этом вводится ряд понятий, представляющих интерес с точки зрения теории групп, действующих на деревьях. Более подробное изложение дано в [1].

1. Группы, действующие на корневых деревьях. Пусть $\overline{m} = \{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность натуральных чисел, больших или равных 2, называемая *индексом ветвления*, $T = T_{\overline{m}}$ – сферически однородное корневое дерево, определенное индексом $\overline{m}$ (т. е. корневая вершина имеет индекс ветвления m_0 , каждая из вершин первого уровня имеет индекс ветвления m_1 и т. д.; при этом *уровень* вершины – это расстояние до корневой вершины).

Обозначим через $\text{Aut } T$ группу автоморфизмов дерева T таких, что корневая вершина остается неподвижной, а вершины одного уровня переставляются, сохраняя при этом отношение инцидентности.

Группа $\text{Aut } T$ обладает естественной топологией, превращающей ее в проконечную группу, при этом $\text{Aut } T = \varprojlim_n \text{Aut } T_{[n]}$, где $T_{[n]}$ – поддерево в T , состоящее из вершин до n -го уровня включительно.

Граница дерева T (т. е. множество геодезических путей, соединяющих корневую вершину с бесконечностью) обозначается ∂T . Группа $\text{Aut } T$ действует также и на границе. Как отмечено в [1], при подходящем выборе метрики ρ на границе пара $(\partial T, \rho)$ является универсальной моделью однородного ультраметрического пространства.

Со всякой подгруппой $G \leq \text{Aut } T$ связаны следующие группы:

- $\text{st}_G(u) = \{g \in G : u^g = u\}$ – стабилизатор вершины u ,
- $\text{st}_G(n) = \bigcap_{|u|=n} \text{st}_G(u)$ – стабилизатор n -го уровня ($|u|$ обозначает уровень вершины u),
- $\text{rist}_G(u) = \{g \in G : v^g = v, v \in T \setminus T_u\}$ – жесткий стабилизатор вершины u (T_u обозначает поддерево с корневой вершиной u),

$\text{rist}_G(n) = \langle \text{rist}_G(u) : |u| = n \rangle$ – группа, порожденная жесткими стабилизаторами вершин n -го уровня и называемая *жестким стабилизатором n -го уровня*.

Так как жесткие стабилизаторы вершин одного уровня коммутируют, то $\text{rist}_G(n)$ изоморфен прямому произведению жестких стабилизаторов вершин n -го уровня.

Стабилизаторы всегда имеют конечный индекс в G , в то время как жесткий стабилизатор может быть тривиальным. Требование того, чтобы жесткие стабилизаторы уровней были подгруппами конечного индекса в G (или хотя бы нетривиальными подгруппами), приводит к понятию ветвящейся (соответственно слабо ветвящейся) группы (см. ниже определение 1).

Действие группы G на дерево T называется *сферически транзитивным*, если оно транзитивно на каждом уровне дерева. В этом случае стабилизаторы (жесткие стабилизаторы) вершин одного уровня сопряжены между собой.

Пусть $e \in \partial T$ – элемент границы, обозначим $P = \text{st}_G(e)$ – стабилизатор пути e . Подгруппа P называется *параболической*.

2. Ветвящиеся группы. Здесь мы даем вариант определения ветвящейся группы, отличный от приведенного в [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. а) Группа G называется *ветвящейся*, если существует точное сферически транзитивное действие G на некотором сферически однородном дереве $T_{\overline{m}}$ такое, что $|G : \text{rist}_G(n)| < \infty$, $n = 1, 2, \dots$.

б) Группа G называется *слабо ветвящейся*, если при условиях предыдущего пункта определения $\text{rist}_G(n) \neq 1$, $n = 1, 2, \dots$.

в) Проконечная группа G называется *ветвящейся (слабо ветвящейся)*, если для некоторого дерева $T_{\overline{m}}$ существует вложение G в $\text{Aut } T_{\overline{m}}$ (в категории проконечных групп), при котором выполнено условие пункта а) (пункта б)).

Очевидно, всякая ветвящаяся группа является и слабо ветвящейся и что слабо ветвящаяся группа является бесконечной.

Мы намерены определить регулярно ветвящиеся группы. Дерево $T = T_{\overline{m}}$, для которого последовательность $\overline{m}$ является постоянной со значением $d \geq 2$, называется *d -регулярным* и обозначается T_d . Такое дерево обладает тем свойством, что для любой вершины u поддерево T_u , растущее из этой вершины, изоморфно T . Таким образом, определено вложение

$$\psi: \text{st}_{\text{Aut } T}(1) \rightarrow \text{Aut } T \times \dots \times \text{Aut } T$$

(d сомножителей в произведении), которое сопоставляет элементу $g \in \text{st}_{\text{Aut } T}(1)$ набор $(g_1, \dots, g_d)$, где $g_i \in \text{Aut } T$, $i = 1, \dots, d$, и g_i есть сужение автоморфизма g на i -е поддерево, растущее из вершины первого уровня.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Действие группы G на регулярном дереве T автоморфизмами называется *самоподобным*, если сужение стабилизатора $\text{st}_G(u)$ на поддерево T_u (где u – произвольная вершина) есть группа, совпадающая с G при отождествлении T с T_u .

Условимся под включением $K \supsetneq K \times \dots \times K$ (d сомножителей) понимать включение $\psi(K) \supsetneq K \times \dots \times K$ (при условии, что K – подгруппа из стабилизатора вершины первого уровня).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Группа G называется *регулярно ветвящейся*, если существует точное сферически транзитивное самоподобное действие G на некотором регулярном

дереве T_d и нормальная подгруппа $K \triangleleft G$ конечного индекса, для которой имеет место включение $K \succ K \times \cdots \times K$ (d сомножителей).

В проконечном случае в этом определении надо потребовать, чтобы G была замкнутой подгруппой в $\text{Aut } T_d$, а K была открытой нормальной подгруппой.

Очевидно, что регулярно ветвящаяся группа является ветвящейся, так как для любого n имеют место включения:

$$K \times \cdots \times K \preceq \text{st}_G(n) \preceq G \times \cdots \times G$$

(d^n сомножителей в каждом произведении, смысл второго включения $\preceq$ аналогичен смыслу первого).

Приведем примеры регулярно ветвящихся групп. С этой целью для любого натурального числа $p \geq 2$ определим группу G_p , действующую на дереве T_p .

При $p = 2$ группа G_2 порождена автоморфизмами a, b, c, d , где a переставляет два поддерева, растущие из вершин первого уровня, а автоморфизмы b, c, d принадлежат стабилизатору первого уровня и определяются совместными рекуррентными соотношениями: $\psi(b) = (a, c)$, $\psi(c) = (a, d)$, $\psi(d) = (1, b)$.

При $p \geq 3$ группа G_p порождена двумя автоморфизмами a, t (порядка p) дерева T_p , где a — циклически переставляет поддерева, растущие из вершин первого уровня, а t стабилизирует первый уровень и определяется рекуррентным соотношением $\psi(t) = (a, 1, \dots, 1, t)$.

ТЕОРЕМА 1. а) Для любого $p \geq 2$ группа G_p является регулярно ветвящейся группой, причем $K = \gamma_3(G_p)$ в случае $p = 2$ и $K = G'_p$ в случае $p \geq 3$.

б) Замыкание $\overline{G}_p$ группы G_p в $\text{Aut } T_p$, $p \geq 2$, является регулярно ветвящейся проконечной группой. Если p является простым числом, то $\overline{G}_p$ есть про- p -группа, изоморфная проконечному пополнению $\widehat{G}_p$ группы G_p .

Приведенные примеры являются простейшими примерами ветвящихся групп. Заметим, что группа G_2 изоморфна группе, исследованной в [3].

3. Связь между ветвящимися и экстремальными группами. Мы называем группу *экстремальной*, если она бесконечна, но всякая ее истинная фактор-группа конечна. Другие авторы употребляют для этих групп термины “ ∞ -конечная”, “слегка бесконечная” или “едва бесконечная”, переводя таким образом на русский язык термин “just infinite”, используемый в англоязычных статьях.

Примерами экстремальных групп являются $\mathbb{Z}$, $SL(n, \mathbb{Z})/\text{centre}$, $n \geq 3$, а также группы G_p , построенные выше (это вытекает из сформулированного ниже критерия экстремальности ветвящихся групп).

Значение класса экстремальных групп в значительной степени определяется следующим утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. а) Всякая бесконечная конечно порожденная группа может быть гомеоморфно отображена на экстремальную группу.

б) Всякая бесконечная конечно порожденная проконечная группа, содержащая про- p -группу (p — простое число) конечного индекса может быть отображена на экстремальную группу.

Заметим, что на произвольные конечно порожденные проконечные группы утверждение б) не распространяется.

Из сформулированного предложения следует, что любой вопрос о существовании конечно порожденной группы, обладающей некоторым свойством, сохраняемым при гомоморфизмах, редуцируется к аналогичному вопросу в классе экстремальных групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. а) Группа называется *наследственно экстремальной*, если она финитно аппроксимируема и всякая подгруппа конечного индекса в ней является экстремальной.

б) Проконечная группа *наследственно экстремальна*, если всякая ее подгруппа конечного индекса является экстремальной.

Например, группы $\mathbb{Z}$, $SL(n, \mathbb{Z})/\text{centre}$, $n \geq 3$, являются наследственно экстремальными.

Класс экстремальных групп естественным образом распадается на три непересекающихся подкласса.

ТЕОРЕМА 2. а) Пусть G – экстремальная группа. Тогда либо G является ветвящейся группой, либо G содержит нормальную подгруппу конечного индекса, разложимую в прямое произведение одного или более экземпляров некоторой группы L , причем либо L является наследственно экстремальной группой, либо L – простая группа.

б) Пусть G является проконечной экстремальной группой. Тогда либо G – ветвящаяся группа, либо G содержит открытую нормальную подгруппу, разложимую в произведение одного или более экземпляров некоторой группы L , причем L является наследственно экстремальной группой.

Это утверждение родственно теореме Уилсона, разбивающей класс экстремальных групп на подклассы в зависимости от мощности структурной решетки, связанной с субнормальными подгруппами [4]. Оказывается, что класс групп с субнормальной бесконечной структурной решеткой совпадает с классом ветвящихся групп (см. [1], [5]).

4. Специальные группы. Условимся называть *раскраской* дерева $T = T_{\overline{m}}$ сопоставление каждой вершине u элемента симметрической группы Σ_{m_n} , где $n = |u|$ – уровень вершины u . Легко видеть, что любой автоморфизм $g \in \text{Aut } T$ однозначно определяется некоторой раскраской $P(g)$ и наоборот. Будем называть $P(g)$ *портретом* элемента g , а *носителем* портрета $P(g)$, обозначаемым $\text{supp } P(g)$, назовем множество вершин, раскрашенных неединичным элементом.

Аutomорфизм g называется *корневым*, если $\text{supp } P(g)$ совпадает с корневой вершиной. Автоморфизм g *финитарен*, если $\text{supp } P(g)$ является конечным множеством.

Наконец, назовем g *направленным* автоморфизмом с направляющим путем $e \in \partial T$, если $g \in \text{st}_{\text{Aut } T}(e)$, g не является финитарным и любая вершина из множества $\text{supp } P(g)$ удалена от e на расстояние 1.

Так, например, порождающий элемент a группы G_p , $p \geq 2$, является корневым, а порождающие b , c , d группы G_2 и порождающий t группы G_p , $p > 2$, являются направленными с самым крайним справа в дереве T направляющим путем.

Так как выбор направляющего пути не играет существенной роли, то всегда в дальнейшем будем считать, что это самый крайний правый путь.

Пусть s – направленный автоморфизм. Обозначим через $\pi_n(s)$ подгруппу в Σ_{m_n} , порожденную метками портретов $P(s)$ вершин n -го уровня. Соответственно если $B < \text{Aut } T$ – конечная группа, у которой любой неединичный элемент является направленным автоморфизмом с направляющим путем e , то через $\pi_n(B)$ обозначим подгруппу в Σ_{m_n} , порожденную группами $\pi_n(s)$, $s \in B$.

Пусть теперь A и B – конечные подгруппы в $\text{Aut } T$, причем A действует транзитивно на первом уровне дерева T и состоит из корневых автоморфизмов, а B состоит из направленных автоморфизмов с направляющим путем e (за исключением единичного элемента), и кроме того, для любого $n = 2, 3, \dots$ подгруппа $\pi_n(B) \leq \Sigma_{m_n}$ транзитивна на множестве из m_n элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Специальной* называется любая подгруппа $G \leq \text{Aut } T$, порожденная подгруппами A и B , удовлетворяющая сформулированным выше условиям.

Специальные группы бесконечны. Конструкция специальных групп обладает большими ресурсами. Все известные к настоящему моменту примеры ветвящихся групп, в том числе построенные в [1], [6], [7], [8], редуцируются к специальным. Группы G_p также являются специальными.

Истоки конструкции специальных групп находятся в работах [9], [10], однако в чистом виде эта конструкция впервые была использована в [3] и [6]. В [11] впервые предложено применять указанную конструкцию на деревьях с непостоянным числом ветвления на различных уровнях.

5. Конгруэнц-свойство и критерий экстремальности. Всякая группа G , действующая на дереве $T = T_{\overline{m}}$, обладает естественной фильтрацией $\{\text{st}_G(n)\}_{n=1}^{\infty}$ нормальных подгрупп конечного индекса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Группа G , действующая на дереве, обладает *конгруэнц-свойством*, если всякая подгруппа конечного индекса в G содержит $\text{st}_G(n)$ для некоторого $n \geq 1$.

Это определение относится к классу абстрактных групп. Если G обладает конгруэнц-свойством, то замыкание $\overline{G}$ этой группы изоморфно проконечному пополнению $\hat{G}$. При этом если факторы $G/\text{st}_G(n)$, $n = 1, 2, \dots$, являются конечными p -группами, то $\hat{G}$ – про- p -группа. Более того, если G является ветвящейся группой, то $\hat{G}$ – ветвящаяся про- p -группа.

Для регулярно ветвящихся групп существует простой критерий того, когда выполнено конгруэнц-свойство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть G – регулярно ветвящаяся группа и K – соответствующая подгруппа из определения 3.

Тогда для G имеет место конгруэнц-свойство в том и только том случае, если K содержит $\text{st}_G(m)$ при некотором $m \geq 1$.

Этот критерий применим ко всем известным регулярно ветвящимся группам, например, к G_p , $p \geq 2$, группам, построенным в [6], [7], [8], и во всех упомянутых группах конгруэнц-свойство выполнено.

Существует также простой критерий экстремальности ветвящихся групп. Для группы, действующей на дереве сферически транзитивно, обозначим через L_n группу, изоморфную жесткому стабилизатору вершины n -го уровня.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – ветвящаяся группа. Тогда G является экстремальной в том и только том случае, если $|L_n : L'_n| < \infty$, $n = 1, 2, \dots$.

Этот критерий особенно легко применим в ситуации, когда G действует на регулярном дереве, а последовательность $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ является периодической или даже постоянной, начиная с некоторого места. Это выполнено для многих регулярно ветвящихся

групп, в частности, для групп G_p , $p \geq 2$. Отсюда вытекает, что пополнение $\hat{G}_p$, p – простое число, является экстремальной конечно порожденной регулярно ветвящейся про- p -группой.

Примеры конечно порожденных ветвящихся периодических p -групп, где p – простое число, содержатся в работах [3], [6], [7], [8], [12]. Примеры свободных от кручения ветвящихся групп приведены в [13].

Пополнение ветвящейся периодической группы, обладающей конгруэнц-свойством, является ветвящейся про- p -группой со свойством универсальности по вложению (т.е. всякая про- p -группа со счетной базой открытых множеств вложима в нее [1], [14]).

ТЕОРЕМА 4. *Для любого простого числа p существует конечно порожденная экстремальная ветвящаяся про- p -группа, свободная от кручения.*

Неизвестно, существуют ли примеры групп, удовлетворяющих свойствам, перечисленным в теореме, и не содержащих свободную про- p -группу ранга 2.

6. Максимальные и слабо максимальные подгруппы. Напомним, что подгруппа $H < G$ называется *максимальной*, если всякая подгруппа M такая, что $H \leq M < G$, совпадает с G . Подгруппа $W < G$ бесконечного индекса называется *слабо максимальной*, если любая подгруппа, удовлетворяющая цепочке включений $H \leq W < G$, имеет конечный индекс в G .

Если G – проконечная группа, то в этом определении надо потребовать, чтобы W была замкнутой подгруппой.

Хорошо известно, что всякая конечно порожденная группа обладает максимальной подгруппой. Однако, существуют конечно порожденные бесконечные группы, все максимальные подгруппы которых имеют конечный порядок. В то же время, имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть G – конечно порожденная бесконечная группа. Тогда в G найдется хотя бы одна слабо максимальная подгруппа.*

Для конечно порожденных проконечных групп, содержащих про- p -группу конечного индекса, этот факт отмечен в [15].

Согласно результату Маргулиса и Соифера [16] группы $SL(n, \mathbb{Z})$, $n \geq 2$, обладают максимальными подгруппами бесконечного индекса. Поэтому и наследственно экстремальные группы типа $SL(n, \mathbb{Z})/\text{centre}$, $n \geq 3$, также обладают такими подгруппами.

Вопрос о существовании максимальных подгрупп бесконечного индекса в группах ветвящегося типа (например, в группе G_2) поставлен Хартли и долгое время оставался открытым (этот вопрос также обсуждался в [17]). Недавно отрицательный ответ на него получен в [18]. Наше утверждение состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть G_ω – произвольная бесконечная p -группа ($p \geq 2$ – простое число), построенная в [6], [7]. Тогда в G_ω нет максимальных подгрупп бесконечного индекса.*

В свете этого результата становится очевидным, что при изучении ветвящихся групп важная роль принадлежит слабо максимальным подгруппам.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть G – ветвящаяся группа, определенная своим действием на дереве T_m , $e \in \partial T_m$ – точка границы, $P = P_e = \text{st}_G(e)$ – параболическая подгруппа. Тогда P является слабо максимальной подгруппой.*

Таким образом, получаем континуальное множество слабо максимальных подгрупп, индексированное точками границы дерева. Заметим, что слабая максимальность параболических подгрупп в группах ветвящегося типа впервые отмечена в [13].

Вопрос. Дать описание слабо максимальных подгрупп ветвящихся групп или хотя бы решить указанный вопрос для конкретных примеров таких, как, скажем, группы G_p , $p \geq 2$.

Заметим в заключение, что большая часть сформулированных результатов докладывалась на различных конференциях. Например, теоремы 2 и 3 обсуждались на конференции по теории групп в Базе (Англия) в 1997 г. и в Москве на Международной алгебраической конференции памяти А. Г. Куроша [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Grigorchuk R. I. Just infinite branch groups // New horizons in pro- p -groups. Ed. M. du Sautoy, D. Segal, A. Shalev. Basel: Birkhauser, 2000.
- [2] Григорчук Р. И. Об экстремальных и ветвящихся группах // Тезисы докладов международной алгебраической конференции памяти А. Г. Куроша. Москва, 1998. С. 163–165.
- [3] Григорчук Р. И. К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функцион. анализ и прилож. 1980. Т. 14. № 1. С. 53–54.
- [4] Wilson J. S. Groups with every proper quotient finite // Proc. Camb. Phil. Soc. 1971. V. 69. P. 373–391.
- [5] Wilson J. S. On just infinite abstract and profinite groups // New horizons in pro- p -groups. Ed. M. du Sautoy, D. Segal, A. Shalev. Basel: Birkhauser, 2000.
- [6] Григорчук Р. И. Степени роста конечно порожденных групп и теория инвариантных средних // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 5. С. 939–985.
- [7] Григорчук Р. И. О степенях роста p -групп и групп без кручения // Матем. сб. 1985. Т. 126. № 2. С. 194–214.
- [8] Gupta N., Sidki S. On the Burnside problem for periodic groups // Math. Z. 1983. V. 182. P. 385–388.
- [9] Алешин С. В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Матем. заметки. 1972. Т. 11. № 3. С. 319–328.
- [10] Суцанский В. И. Периодические p -группы подстановок и неограниченная проблема Бернсайда // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 3. С. 557–561.
- [11] Рожков А. В. К теории групп алешинского типа // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 5. С. 572–589.
- [12] Рожков А. В. Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев // Алгебра и логика. 1998. Т. 37. № 2. С. 568–605.
- [13] Bartholdi L. P., Grigorchuk R. I. On the parabolic subgroups and Hecke algebras related to some fractal groups. Preprint of FIM. Zurich: ETH-Zentrum, 1999.
- [14] Grigorchuk R. I., Herfort W. N., Zaleskii P. A. The profinite completion of certain torsion p -groups // Proc. of the International Algebraic Conference in Memory of A. G. Kurosh. Moscow, 1998.
- [15] Shalev A. Subgroups structure, fradal dimension, and Kac–Moody algebras // Groups and Geometries. Siena Conference, 1996. Ed. Lino di Martino. Birkhäuser, 1998. P. 163–176.
- [16] Margulis G. A., Souifer G. A. Maximal subgroups of infinite index in finitely generated linear groups // J. Algebra. 1981. V. 69. № 1. P. 1–23.
- [17] Рожков А. В. Централизаторы элементов в одной группе автоморфизмов деревьев // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 6. С. 82–105.
- [18] Первова Е. Л. Всюду плотные подгруппы групп автоморфизмов деревьев (в печати).