Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Гуда, Гомотопическая инвариантность возмущений D_∞ -дифференциальных модулей, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 3, 374–382

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9031>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 08:53:03

Гомотопическая инвариантность возмущений

D_∞ -дифференциальных модулей

Я. Гуда

В работе введено понятие возмущения D_∞ -дифференциального модуля и показано, что возмущения D_∞ -дифференциального модуля обладают свойством гомотопической инвариантности.

Библиография : 6 названий.

В работах Гугехейма, Ламбе, Сташеффа [1]–[3] было введено понятие возмущения дифференциального модуля и установлено свойство гомотопической инвариантности возмущений дифференциальных модулей. С другой стороны, в работе Лапина [4] было введено понятие D_∞ -дифференциального модуля, которое является гомотопически инвариантным квантовым аналогом понятия дифференциального модуля, и рассмотрена связь между понятиями возмущения дифференциального модуля и D_∞ -дифференциального модуля. Более того, в [4] было показано, что категория спектральных последовательностей над полями эквивалентна категории D_∞ -дифференциальных модулей над полями. При помощи этой эквивалентности категорий в [5] были получены обобщения на E_∞ -алгебры классических результатов Серра [6] о мультипликативной структуре в членах спектральных последовательностей расслоений.

В данной работе вводится понятие возмущения D_∞ -дифференциального модуля и показывается, что возмущения D_∞ -дифференциальных модулей обладают свойством гомотопической инвариантности. Интерес к возмущениям D_∞ -дифференциальных модулей вызван, главным образом, задачей разработки техники управления дифференциалами в спектральных последовательностях. Полученное в данной работе утверждение (теорема 3) о гомотопической инвариантности возмущений D_∞ -дифференциальных модулей над полями является, так сказать, основой для решения указанной выше задачи построения техники управления дифференциалами в спектральных последовательностях над полями.

Пусть K – любое коммутативное кольцо с единицей. Все рассматриваемые ниже модули и отображения модулей являются, если не оговорены дополнительные условия, K -модулями и отображениями K -модулей.

Напомним сначала, что *дифференциальным модулем* (X, d) называется модуль X , рассматриваемый вместе с некоторым фиксированным отображением модулей $d: X \rightarrow X$, которое называется *дифференциалом модуля* X , и для которого выполнено условие $d^2 = dd = 0$. *Отображением* $f: (X, d) \rightarrow (Y, d)$ дифференциальных

модулей называется отображение модулей $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $df = fd$. Гомотопией между отображениями $f, g: (X, d) \rightarrow (Y, d)$ дифференциальных модулей называется отображение модулей $h: X \rightarrow Y$, для которого выполнено равенство $dh + hd = f - g$. При помощи понятия гомотопии между отображениями дифференциальных модулей стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности дифференциальных модулей.

Пусть заданы отображения дифференциальных модулей $\eta: X \hookrightarrow Y: \xi$, удовлетворяющие условию $\eta\xi = 1_Y$, и задана гомотопия $h: X \rightarrow X$ между отображениями дифференциальных модулей $\xi\eta$ и 1_X . Любая указанная выше тройка $(\eta: X \hookrightarrow Y: \xi, h)$ называется *сильной деформационной ретракцией* дифференциальных модулей. При выполнении условий $\eta h = 0$, $h\xi = 0$ и $hh = 0$ сильную деформационную ретракцию $(\eta: X \hookrightarrow Y: \xi, h)$ называют *SDR-ситуацией* дифференциальных модулей.

Примеры SDR-ситуаций дифференциальных модулей можно получить при рассмотрении гомологии заданных над полем дифференциальных модулей. В самом деле, пусть $H(X) = \text{Ker } d / \text{Im } d$ – модуль гомологии произвольного заданного над полем дифференциального модуля (X, d) . Если гомологический модуль $H(X)$ рассмотреть как дифференциальный модуль с нулевым дифференциалом, то при помощи фиксированного разложения в прямую сумму $\text{Ker } d = H(X) \oplus \text{Im } d$ получим SDR-ситуацию $(\eta: X \hookrightarrow H(X): \xi, h)$ дифференциальных модулей. Полученная SDR-ситуация дифференциальных модулей называется *гомологической SDR-ситуацией* дифференциального модуля (X, d) .

Возмущением дифференциального модуля (X, d) называется [3] отображение модулей $t: X \rightarrow X$, для которого пара $(X, d + t)$ является дифференциальным модулем, т.е. для отображения $d + t: X \rightarrow Y$ выполнено условие $(d + t)^2 = 0$. Ясно, что это условие эквивалентно условию $dt + td = -t^2$. Кроме того, легко видеть, что введение для дифференциального модуля (X, d) на модуле X некоторого нового дифференциала $D: X \rightarrow X$ эквивалентно заданию некоторого возмущения $t = D - d: X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d) .

Напомним теперь [4], что D_∞ -дифференциалом модуля X называется семейство отображений модулей $\{d^i: X \rightarrow X \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$, которые для каждого целого числа $k \geq 0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} d^i d^j = 0. \quad (1)$$

D_∞ -дифференциальным модулем или, более кратко, D_∞ -модулем (X, d^i) называется произвольный модуль X , рассматриваемый вместе с некоторым D_∞ -дифференциалом $\{d^i: X \rightarrow X\}$ этого модуля.

Рассмотрим соотношения (1) для малых значений $k \geq 0$. При $k = 0$ соотношение (1) имеет вид $d^0 d^0 = 0$. Это говорит о том, что пара (X, d^0) является дифференциальным модулем. При $k = 1$ соотношение (1) принимает вид $d^1 d^0 + d^0 d^1 = 0$. Другими словами, отображения d^0 и d^1 являются антикоммутирующими. Из этого следует, что композиция $d^1 d^1: X \rightarrow X$ является эндоморфизмом дифференциального модуля (X, d^0) . При $k = 2$ соотношение (1) можно записать в виде $d^0 d^2 + d^2 d^0 = 0 - d^1 d^1$. Это означает, что отображение модулей $d^2: X \rightarrow X$ является гомотопией между нулевым отображением дифференциальных модулей и отображением дифференциальных модулей $d^1 d^1: (X, d^0) \rightarrow (X, d^0)$. Таким образом, отображение модулей $d^1: X \rightarrow X$ является дифференциалом с точностью до гомотопии.

Простыми нетривиальными примерами D_∞ -дифференциальных модулей служат модули, которые снабжены двумя антикоммутирующими дифференциалами.

В самом деле, если задан произвольный модуль X с двумя антикоммутирующими дифференциалами $d', d'' : X \rightarrow X$, то определен D_∞ -модуль (X, d^i) , где $d^0 = d'$, $d^1 = d''$ и $d^i = 0$, $i \geq 2$.

Многочисленные примеры D_∞ -дифференциальных модулей можно получить отпавляясь от конструкции дифференциального модуля с фильтрацией. Пусть над произвольным полем задан дифференциальный модуль (X, d) с возрастающей фильтрацией $\{X^n\}$, $n \geq 0$. Обозначим через Y^n подмодуль модуля X^n , для которого $X^n = Y^n \oplus X^{n-1}$. При помощи условия $d(X^n) \subseteq X^n$, определим отображение $d_n^i : Y^n \rightarrow Y^{n-i}$, $i \geq 0$, как компоненту дифференциала

$$d : Y^n \rightarrow X^n = Y^n \oplus \dots \oplus Y^{n-i} \oplus \dots \oplus Y^0.$$

Легко видеть, что семейство отображений $\{d^i = \bigoplus_{n \geq 0} d_n^i : X \rightarrow X \mid i \geq 0\}$ является D_∞ -дифференциалом модуля X , поскольку условие $d^2 = 0$ в рассматриваемом случае эквивалентно соотношениям (1).

Морфизмом D_∞ -модулей $f : (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ называется семейство отображений модулей $f = \{f^i : X \rightarrow Y \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geq 0$ следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} f^i d^j = \sum_{i+j=k} d^i f^j. \quad (2)$$

Рассмотрим соотношения (2) для начальных значений $k \geq 0$. При $k = 0$ соотношение (2) имеет вид $f^0 d^0 = d^0 f^0$, т.е. определено отображение дифференциальных модулей $f^0 : (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$. При $k = 1$ соотношение (2) записывается в виде $f^0 d^1 - d^1 f^0 = d^0 f^1 - f^1 d^0$. Это означает, что отображение $f^1 : X \rightarrow Y$ служит гомотопией между нулевым отображением и отображением $f^0 d^1 - d^1 f^0 : (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$, которое антикоммутирует с дифференциалами. Другими словами, отображение f^0 относительно d^1 является с точностью до гомотопии отображением дифференциальных модулей.

Композиция морфизмов D_∞ -дифференциальных модулей $f = \{f^i\} : X \rightarrow Y$ и $g = \{g^i\} : Y \rightarrow Z$ определяется формулой

$$(gf)^i = \sum_{n+m=i} g^n f^m : X \rightarrow Z, \quad i \geq 0.$$

Прямые вычисления показывают, что семейство отображений $gf = \{(gf)^i\}$ является морфизмом D_∞ -модулей. Легко также проверяется, что операция композиции морфизмов D_∞ -дифференциальных модулей ассоциативна. Тожественным морфизмом $1_X = \{1_X^i\}$ для D_∞ -модуля (X, d^i) служит семейство отображений $1_X = \{1_X^i : X \rightarrow X\}$, где $1_X^i = 0$, $i > 0$, и 1_X^0 – тождественное отображение модуля X . Таким образом, класс всех D_∞ -модулей и их морфизмов образуют категорию.

Гомотопией между морфизмами d_∞ -модулей $f, g : (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ называется семейство $h = \{h^i : X \rightarrow Y \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$ отображений модулей, которые для каждого целого числа $k \geq 0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} d^i h^j + h^j d^i = f^k - g^k. \quad (3)$$

При $k = 0$ соотношение (3) принимает вид $d^0 h^0 + h^0 d^0 = f^0 - g^0$, т.е. отображение модулей $h^0: X \rightarrow Y$ является гомотопией между отображениями $f^0, g^0: (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$ дифференциальных модулей.

Легко видеть, что отношение между морфизмами D_∞ -модулей, определяемое наличием гомотопии между ними, является отношением эквивалентности. При помощи этого отношения эквивалентности стандартно определяется понятия гомотопической эквивалентности D_∞ -дифференциальных модулей.

Важнейшими частными случаями понятия гомотопической эквивалентности D_∞ -модулей являются понятия сильной деформационной ретракции и SDR-ситуации D_∞ -модулей. Рассмотрим эти понятия более детально, поскольку они потребуются ниже. Пусть заданы произвольные D_∞ -модули (X, d^i) и (Y, d^i) . Кроме того, пусть заданы морфизмы D_∞ -модулей $\{\eta^i: (X, d^i) \rightleftharpoons (Y, d^i): \eta^i\}$ и задана гомотопия $\{h^i: (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)\}$, для которых выполнены следующие условия:

$$\sum_{s+t=i} \eta^s \xi^t = (1_Y)^i, \quad \sum_{s+t=i} d^s h^t + h^s d^t = \sum_{s+t=i} \xi^s \eta^t - (1_X)^i, \quad i \geq 0.$$

Эта ситуация записывается в виде $(\{\eta^i\}: (X, d^i) \rightleftharpoons (Y, d^i): \{\xi^i\}, \{h^i\})$ и называется *сильной деформационной ретракцией* D_∞ -модулей. При выполнении дополнительных условий

$$\sum_{i+j=k} \eta^i h^j = 0, \quad \sum_{i+j=k} h^i \xi^j = 0, \quad \sum_{i+j=k} h^i h^j = 0, \quad k \geq 0,$$

указанная сильная деформационная ретракция называется *SDR-ситуацией* D_∞ -модулей.

Напомним теперь из работы [4] следующую теорему об инвариантности структуры D_∞ -дифференциального модуля при гомотопических эквивалентностях типа сильных деформационных ретракций.

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы произвольные D_∞ -модуль (X, d^i) и дифференциальный модуль (Y, d) . Кроме того, пусть задана любая сильная деформационная ретракция $(\eta: (X, d^0) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$ дифференциальных модулей. Тогда семейство отображений $\{d_*^i: Y \rightarrow Y\}$, определяемых формулами

$$d_*^0 = d, \quad d_*^i = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1} (h d^{i_2}) \dots (h d^{i_k}) \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (4)$$

является D_∞ -дифференциалом модуля Y . Более того, определена сильная деформационная ретракция D_∞ -модулей $(\{\eta_*^i\}: (X, d^i) \rightleftharpoons (Y, d^i): \{\xi_*^i\}, \{h_*^i\})$, где семейства отображений $\{\xi_*^i: Y \rightarrow X\}$, $\{\eta_*^i: X \rightarrow Y\}$ и $\{h_*^i: X \rightarrow X\}$ задаются соответственно следующими формулами:

$$\xi_*^0 = \xi, \quad \xi_*^i = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1} (h d^{i_2}) \dots (h d^{i_k}) \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (5)$$

$$\eta_*^0 = \eta, \quad \eta_*^i = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1}(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k}) \right) h, \quad i \geq 1, \quad (6)$$

$$h_*^0 = h, \quad h_*^i = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1}(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k}) \right) h, \quad i \geq 1. \quad (7)$$

Если заданная сильная деформационная ретракция $(\eta: (X, d^0) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$ является SDR-ситуацией, то $(\{\eta_*^i\}: (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d_*^i) : \{\xi_*^i\}, \{h_*^i\})$ также является SDR-ситуацией.

Вопрос о единственности D_∞ -дифференциала $\{d_*^i: Y \rightarrow Y\}$, определяемого в теореме 1, полностью решает следующее утверждение из [4].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(\{\eta_*^i\}: (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d^i) : \{\xi^i\}, \{h^i\})$ – произвольная сильная деформационная ретракция D_∞ -модулей, и пусть сильная деформационная ретракция D_∞ -модулей $(\{\eta_*^i\}: (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d_*^i) : \{\xi_*^i\}, \{h_*^i\})$ получена по формулам (4)–(7) из сильной деформационной ретракции дифференциальных модулей $(\{\eta^0\}: (X, d^0) \rightrightarrows (Y, d^0) : \{\xi^0\}, \{h^0\})$. Тогда морфизм D_∞ -модулей

$$\eta_* \xi = \{\eta_*^i\} \{\eta^i\} = \{(\eta_* \xi)^i\}: (Y, d^i) \rightarrow (Y, d_*^i),$$

где $(\eta_* \xi)^0 = \eta_*^0 \xi^0 = \eta^0 \xi^0 = 1_Y$, является изоморфизмом D_∞ -модулей, обратным к которому служит изоморфизм D_∞ -модулей $g = \{g^i\}: (Y, d_*^i) \rightarrow (Y, d^i)$, определяемый следующими формулами:

$$g^0 = 1_Y, \quad g^i = \sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} (-1)^k (\eta_* \xi)^{i_1} \dots (\eta_* \xi)^{i_k}, \quad i \geq 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Возмущением D_∞ -дифференциального модуля (X, d^i) назовем семейство отображений модулей $\{t^i: X \rightarrow X \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 1, t^0 = 0\}$, которые для каждого целого числа $k \geq 1$ удовлетворяют следующему отношению:

$$\sum_{i+j=k} d^i t^j + \sum_{i+j=k} t^i d^j = - \sum_{i+j=k} t^i t^j. \quad (8)$$

Из соотношений (8) следует, что задание для D_∞ -модуля (X, d^i) некоторого его возмущения $\{t^i: X \rightarrow X \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$ эквивалентно введению на модуле X нового D_∞ -дифференциала $\{D^i = d^i + t^i \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$.

Рассмотрим соотношения (8) для малых значений $k \geq 1$. При $k = 1$ соотношение (8) принимает вид

$$d^0 t^1 + t^1 d^0 = 0.$$

Это говорит о том, что отображения d^0 и t^1 являются антикоммутирующими, т.е. $d^0 t^1 = -t^1 d^0$. При $k = 2$ соотношение (8) записывается в виде

$$d^0 t^2 + t^2 d^0 = 0 - (d^1 t^1 + t^1 d^1 + (t^1)^2).$$

Таким образом, можно считать, что отображение модулей $t^1: X \rightarrow X$ является с точностью до гомотопии возмущением отображения $d^1: X \rightarrow X$, которое, как было сказано выше, является дифференциалом с точностью до гомотопии.

Простейшие примеры возмущений D_∞ -дифференциальных модулей возникают в ситуации, когда задан произвольный модуль с двумя антикоммутирующими дифференциалами и, кроме того, задано любое дифференциальное возмущение одного из дифференциалов, которое антикоммутирует с другим дифференциалом. В самом деле, как было указано выше, модуль X с двумя антикоммутирующими дифференциалами $d', d'': X \rightarrow X$ определяет D_∞ -дифференциальный модуль (X, d^i) , где $d^0 = d'$, $d^1 = d''$ и $d^i = 0$, $i \geq 2$. Если теперь задано дифференциальное возмущение $t: X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d^1) , т.е. выполнено условие $d^1 t + t d^1 = -t^2$, антикоммутирующее с дифференциалом d^0 , т.е. выполнено условие $d^0 t + t d^0 = 0$, то для D_∞ -дифференциального модуля (X, d^i) определено его возмущение $\{t^i\}$, которое задается формулами $t^0 = 0$, $t^1 = t$ и $t^i = 0$, $i \geq 2$.

Приведем примеры возмущений D_∞ -дифференциальных модулей, которые возникают при рассмотрении возмущений дифференциальных модулей с фильтрациями. Пусть над произвольным полем задан дифференциальный модуль с возрастающей фильтрацией $\{X^n\}$, $d(X^n) \subseteq X^n$, $n \geq 0$, и пусть задано дифференциальное возмущение дифференциального модуля (X, d) , удовлетворяющее условию $t(X^n) \subseteq X^{n-1}$, $n \geq 1$. Так же, как и выше, обозначим через Y^n подмодуль модуля X^n , для которого $X^n = Y^n \oplus X^{n-1}$. При помощи условия $d(X^n) \subseteq X^n$, как было ранее показано, определяется D_∞ -дифференциальный модуль (X, d^i) . Теперь при помощи условия $t(X^n) \subseteq X^{n-1}$ определим отображение $t_n^i: Y^n \rightarrow Y^{n-i}$, $i \geq 1$, как компоненты возмущения

$$t: Y^n \rightarrow X^{n-1} = Y^{n-1} \oplus \dots \oplus Y^{n-i} \oplus \dots \oplus Y^0.$$

Легко видеть, что семейство отображений $\{t^i: X \rightarrow X \mid i \geq 0\}$, где $t^0 = 0$, $t^i = \bigoplus_{n \geq 0} t_n^i$, $i \geq 1$, является возмущением указанного D_∞ -дифференциального модуля (X, d^i) , поскольку условие $dt + td = -t^2$ в рассматриваемом случае эквивалентно соотношениям (8).

Рассмотрим теперь основной в этой работе вопрос о гомотопической инвариантности возмущений D_∞ -дифференциальных модулей. Пусть задана произвольная сильная деформационная ретракция D_∞ -дифференциальных модулей $(\{\eta^i\}: (X, d^i) \hookrightarrow (Y, d^i): \{\xi^i\}, \{h^i\})$ и, кроме того, пусть для D_∞ -дифференциального модуля (X, d^i) задано любое его возмущение $\{t^i: X \rightarrow X\}$. Рассмотрим для D_∞ -дифференциального модуля (Y, d^i) процесс построения его возмущения $\{t_*^i: Y \rightarrow Y\}$. Из определения 1 ясно, что $t_*^0 = 0$. Если задать t_*^1 формулой

$$t_*^1 = \eta^0 t^1 \xi^0,$$

то пользуясь равенством $d^0 t^1 + t^1 d^0 = 0$, получим для t_*^1 требуемое соотношение $d^0 t_*^1 + t_*^1 d^0 = 0$. В самом деле, имеем

$$d^0 t_*^1 + t_*^1 d^0 = d^0 (\eta^0 t^1 \xi^0) + (\eta^0 t^1 \xi^0) d^0 = \eta^0 d^0 t^1 \xi^0 + \eta^0 t^1 d^0 \xi^0 = \eta^0 (d^0 t^1 + t^1 d^0) \xi^0 = 0.$$

Определим теперь t_*^2 , полагая

$$t_*^2 = \eta^0 t^2 \xi^0 + \eta^1 t^1 \xi^0 + \eta^0 t^1 \xi^1 + \eta^0 t^1 h^0 t^1 \xi^0.$$

Проверим при помощи равенств

$$d^0 t^2 + d^1 t^1 + t^1 d^1 + t^2 d^0 = -t^1 t^1, \quad d^0 t^1 + t^1 d^0 = 0$$

выполнение для t_*^1 и t_*^2 требуемого соотношения

$$d^0 t_*^2 + d^1 t_*^1 + t_*^1 d^1 + t_*^2 d^0 = -t_*^1 t_*^1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} d^1 t_*^1 &= d^1 (\eta^0 t^1 \xi^0) = \eta^1 d^0 t^1 \xi^0, & t_*^1 d^1 &= (\eta^0 t^1 \xi^0) d^1 = \eta^0 t^1 d^0 \xi^1, \\ d^0 t_*^2 &= \eta^0 d^0 t^2 \xi^0 + \eta^0 d^1 t^1 \xi^0 + \eta^0 d^0 t^1 \xi^1 + d^0 \eta^0 t^1 h^0 t^1 \xi^0, \\ t_*^2 d^0 &= \eta^0 t^2 d^0 \xi^0 + \eta^1 t^1 d^0 \xi^0 + \eta^0 t^1 d^1 \xi^0 + \eta^0 t^1 h^0 t^1 \xi^0 d^0, \\ t_*^1 t_*^1 &= (\eta^0 t^1 \xi^0)(\eta^0 t^1 \xi^0) = \eta^0 t^1 (d^0 h^0 + h^0 d^0 - 1) t^1 \xi^0 \\ &= \eta^0 t^1 d^0 h^0 t^1 \xi^0 + \eta^0 t^1 h^0 d^0 t^1 \xi^0 - \eta^0 t^1 t^1 \xi^0 \\ &= d^0 \eta^0 t^1 h^0 t^1 \xi^0 - \eta^0 t^1 h^0 t^1 \xi^0 d^0 - \eta^0 t^1 t^1 \xi^0. \end{aligned}$$

Из полученных равенств следует, что соотношение

$$d^0 t_*^2 + d^1 t_*^1 + t_*^1 d^1 + t_*^2 d^0 = -t_*^1 t_*^1$$

выполнено. Если определить t_*^3 формулой

$$\begin{aligned} t_*^3 &= \eta^0 t^3 \xi^0 + \eta^1 t^2 \xi^0 + \eta^2 t^1 \xi^0 + \eta^0 t^2 \xi^1 + \eta^0 t^1 \xi^2 + \eta^1 t^1 \xi^1 \\ &\quad + \eta^0 t^2 h^0 t^1 \xi^0 + \eta^0 t^1 h^0 t^2 \xi^0 + \eta^0 t^1 h^1 t^1 \xi^0 \\ &\quad + \eta^1 t^1 h^0 t^1 \xi^0 + \eta^0 t^1 h^0 t^1 \xi^1 + \eta^0 t^1 h^0 t^1 h^0 t^1 \xi^0, \end{aligned}$$

то аналогично тому, как это было сделано выше, при помощи равенств

$$\begin{aligned} d^0 t^1 + t^1 d^0 &= 0, & d^0 t^2 + d^1 t^1 + t^1 d^1 + t^2 d^0 &= -t^1 t^1, \\ d^0 t^3 + d^1 t^2 + d^2 t^1 + t^2 d^1 + t^1 d^2 + t^3 d^0 &= -(t^1 t^2 + t^2 t^1), \end{aligned}$$

проверяется, что для отображений t_*^1 , t_*^2 и t_*^3 выполнено требуемое соотношение

$$d^0 t_*^3 + d^1 t_*^2 + d^2 t_*^1 + t_*^2 d^1 + t_*^1 d^2 + t_*^3 d^0 = -(t_*^1 t_*^2 + t_*^2 t_*^1).$$

Продолжая рассмотренный выше процесс построения отображений t_*^i , $i \geq 0$, приходим к следующему утверждению, которое описывает поведение возмущений D_∞ -дифференциальных модулей при гомотопических эквивалентностях типа сильных деформационных ретракций.

ТЕОРЕМА 3. Пусть задана произвольная сильная деформационная ретракция D_∞ -дифференциальных модулей $(\{\eta^i\}: (X, d^i) \hookrightarrow (Y, d^i): \{\xi^i\}, \{h^i\})$ и, кроме того, пусть для D_∞ -дифференциального модуля (X, d^i) задано любое его возмущение $\{t^i: X \rightarrow X\}$. Тогда на D_∞ -дифференциальном модуле (Y, d^i) возникает возмущение $\{\tilde{t}^i: Y \rightarrow Y\}$, определяемое формулами

$$t_*^0 = 0, \quad t_*^i = \sum_{\substack{i \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k + \\ + j_1 + \dots + j_{k+1} = i}} (\eta^{j_1} t^{i_1})(h^{j_2} t^{i_2}) \dots (h^{j_k} t^{i_k}) \xi^{j_{k+1}}, \quad i \geq 1, \quad (9)$$

и, более того, возникает сильная деформационная ретракция D_∞ -дифференциальных модулей $(\{\eta^i\}: (X, d^i + t^i) \hookrightarrow (Y, d^i + t_*^i) : \{\xi^i\}, \{h^i\})$, которая задается следующими формулами:

$$\tilde{\xi}^0 = \xi^0, \quad \tilde{\xi}^i = \xi^i + \sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k + \\ + j_1 + \dots + j_{k+1} = i}} (h^{j_1} t^{i_1})(h^{j_2} t^{i_2}) \dots (h^{j_k} t^{i_k}) \xi^{j_{k+1}}, \quad i \geq 1, \quad (10)$$

$$\tilde{\eta}^0 = \eta^0, \quad \tilde{\eta}^i = \eta^i + \sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k + \\ + j_1 + \dots + j_{k+1} = i}} (\eta^{j_1} t^{i_1})(h^{j_2} t^{i_2}) \dots (h^{j_k} t^{i_k}) h^{j_{k+1}}, \quad i \geq 1, \quad (11)$$

$$\tilde{h}^0 = h^0, \quad \tilde{h}^i = h^i + \sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k + \\ + j_1 + \dots + j_{k+1} = i}} (h^{j_1} t^{i_1})(h^{j_2} t^{i_2}) \dots (h^{j_k} t^{i_k}) h^{j_{k+1}}, \quad i \geq 1. \quad (12)$$

Если заданная сильная деформационная ретракция D_∞ -дифференциальных модулей $(\{\eta^i\}: (X, d^i) \hookrightarrow (Y, d^i) : \{\xi^i\}, \{h^i\})$ является SDR-ситуацией D_∞ -дифференциальных модулей, то сильная деформационная ретракция D_∞ -дифференциальных модулей $(\{\tilde{\eta}^i\}: (X, d^i + t^i) \hookrightarrow (Y, d^i + t_*^i) : \{\tilde{\xi}^i\}, \{\tilde{h}^i\})$ получаемая по формулам (9)–(12), также является SDR-ситуацией D_∞ -дифференциальных модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\{\eta_*^i\}: (X, d^i) \hookrightarrow (Y, d_*^i) : \{\xi_*^i\}, \{h_*^i\})$ – сильная деформационная ретракция D_∞ -модулей, полученная по формулам (4)–(7) из сильной деформационной ретракции $(\{\eta^0\}: (X, d^0) \hookrightarrow (Y, d^0) : \{\xi^0\}, \{h^0\})$ дифференциальных модулей. Кроме того, пусть сильная деформационная ретракция D_∞ -модулей

$$(\{\bar{\eta}^i\}: (X, D^i = d^i + t^i) \hookrightarrow (Y, \bar{D}^i = d_*^i + \bar{t}^i) : \{\bar{\xi}^i\}, \{\bar{h}^i\}), \quad (13)$$

где $\bar{t}^i = \bar{D}^i - d_*^i$, также получена по формулам (4)–(7) из сильной деформационной ретракции

$$(\{\eta^0\}: (X, D^0 = d^0 + t^0) \hookrightarrow (Y, \bar{D}^0 = d^0) : \{\xi^0\}, \{h^0\})$$

дифференциальных модулей. При помощи взаимнообратных изоморфизмов D_∞ -модулей $\eta_* \xi = \{(\eta_* \xi)^i\}: (Y, d^i) \hookrightarrow (Y, d_*^i) : \{g^i\} = g$ из теоремы 2 и сильной деформационной ретракции (13) определим сильную деформационную ретракцию D_∞ -модулей

$$(\{\tilde{\eta}^i\}: (X, D^i = d^i + t^i) \hookrightarrow (Y, \tilde{D}^i = d^i + t_*^i) : \{\tilde{\xi}^i\}, \{\tilde{h}^i\}), \quad (14)$$

следующими формулами:

$$\{t_*^i\} = g\{\bar{t}^i\}\eta_* \xi, \quad \tilde{\eta} = \{\tilde{\eta}^i\} = g\bar{\eta}, \quad \tilde{\xi} = \{\tilde{\xi}^i\} = \bar{\xi}\eta_* \xi, \quad \tilde{h} = \{\tilde{h}^i\} = \bar{h}. \quad (15)$$

Прямые, но несколько громоздкие вычисления показывают, что сильная деформационная ретракция D_∞ -модулей (14) и является искомой, т.е. формулы (15) эквивалентны формулам (9)–(12).

Если для любого заданного над полем D_∞ -дифференциального модуля рассмотреть его гомологическую SDR-ситуацию и применить теорему 1 к произвольному возмущению этого D_∞ -дифференциального модуля, то получим следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть D_∞ -дифференциальный модуль (X, d^i) задан над полем u , кроме того, пусть задано любое возмущение $\{t^i: X \rightarrow X\}$ этого D_∞ -дифференциального модуля. Тогда на гомологическом D_∞ -дифференциальном модуле $(H(X), d_*^i)$ возникает возмущение $\{t_*^i: H(X) \rightarrow H(X)\}$, определяемое формулами (9) и, более того, возникает SDR-ситуация D_∞ -дифференциальных модулей

$$(\{\eta^i\}: (X, d^i + t^i) \rightrightarrows (H(X), d_*^i + t_*^i) : \{\tilde{\xi}^i\}, \{\tilde{h}^i\}),$$

которая задается по формулам (10)–(12).

В заключение отметим, что в случае, если D_∞ -дифференциальные модули являются стабильными [4], то утверждение теоремы 3 можно было бы получить при помощи техники возмущений дифференциальных модулей из [1]–[3]. В случае же, когда D_∞ -дифференциальные модули не являются стабильными, техника возмущений из [1]–[3] для доказательства теоремы 3 неприменима.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. K. A. M. Gugenheim, “On the chain-complex of a fibration”, *Illinois J. Math.*, **16** (1972), 398–414.
- [2] V. K. A. M. Gugenheim, L. A. Lambe, “Perturbation theory in differential homologies algebra. I”, *Illinois J. Math.*, **33**:4 (1989), 566–582.
- [3] V. K. A. M. Gugenheim, L. A. Lambe, J. D. Stasheff, “Perturbation theory in differential homological algebra. II”, *Illinois J. Math.*, **35**:3 (1991), 357–373.
- [4] С. В. Лапин, “Дифференциальные возмущения и D_∞ -дифференциальные модули”, *Матем. сб.*, **192**:11 (2001), 55–76.
- [5] С. В. Лапин, “ D_∞ -дифференциальные E_∞ -алгебры и спектральные последовательности расслоений”, *Матем. сб.*, **198**:10 (2007), 3–30.
- [6] J. P. Serre, “Homologie singulière des espaces fibrés. Applications”, *Ann. of Math.* (2), **54**:3 (1951), 425–505.

Я. Гуда

South Valley University, Egypt
E-mail: yasiengouda@yahoo.com

Поступило

15.07.2011