Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, А. К. Абдикалыков, Об унитарно транспонируемых матрицах порядка три, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 563–570

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9034>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:37:55

Об унитарно транспонируемых матрицах порядка три

Х. Д. Икрамов, А. К. Абдикалыков

Мы называем матрицу $A \in M_n(\mathbb{C})$ унитарно транспонируемой, если

$$A^T = Q^* A Q$$

для некоторой унитарной матрицы Q . Всякая (2×2) -матрица унитарно транспонируема, но для больших порядков это уже не так, и общее описание унитарно транспонируемых матриц порядка n в настоящее время неизвестно. Мы даем такое описание для матриц порядка три.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Хорошо известно, что всякая квадратная матрица A подобна своей транспонированной матрице A^T . Доказательство этого утверждения для комплексных матриц дано, например, в [1; раздел 3.2.3], хотя сам факт справедлив для матриц над любым полем.

Комплексные матрицы A и A^T имеют одинаковые собственные значения и одинаковую жорданову структуру для каждой из них, что, собственно, и обеспечивает их подобие. Однако помимо названных характеристик A и A^T имеют ряд других общих свойств, например, одинаковые сингулярные числа, а потому и одинаковые спектральную и фробениусову нормы. Несмотря на это, A и A^T не обязаны быть унитарно подобными матрицами.

Насколько известно авторам, первый пример матрицы A , не являющейся унитарно подобной транспонированной матрице A^T , был указан в [2]. Это вещественная треугольная матрица третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

То обстоятельство, что A и A^T не являются унитарно подобными, проверялось с помощью критерия Шпехта, формулировку которого мы сейчас напомним. Выражение вида

$$W(s, t) = s^{m_1} t^{n_1} s^{m_2} t^{n_2} \dots s^{m_k} t^{n_k},$$

где $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k$ – целые неотрицательные числа, будем называть *словом от (некоммутирующих) переменных s и t* . Число $m_1 + n_1 + \dots + m_k + n_k$ назовем *длиной слова $W(s, t)$* .

ТЕОРЕМА 1 (критерий Шпехта). Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ унитарно подобны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*) \quad (2)$$

для всякого слова $W(s, t)$.

Полагая для матрицы (1) $B = A^T$ и $W(s, t) = sts^2t^2$, получим

$$\operatorname{tr} W(A, B) = 39223, \quad \operatorname{tr} W(B, A) = 39991,$$

откуда и следует невозможность унитарного подобия.

Пусть $M_n(\mathbb{C})$ – множество комплексных матриц порядка n . Назовем $A \in M_n(\mathbb{C})$ унитарно транспонируемой матрицей (или УТ-матрицей), если

$$A^T = Q^* A Q \quad (3)$$

для некоторой унитарной матрицы Q . Это не вполне точное название заменяет правильный, но более громоздкий термин “матрица, транспонируемая унитарным подобием”.

Описание унитарно транспонируемых матриц произвольного порядка n в настоящее время неизвестно. В данной статье мы предлагаем такое описание для $n = 3$. (Что касается матриц порядка два, все они унитарно транспонируемы.)

После изложения предварительных результатов в п. 2 и обсуждения критерия унитарной транспонируемости матриц третьего порядка (п. 3), мы доказываем в п. 4 следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \in M_3(\mathbb{C})$.

1. Если A имеет единственное собственное значение λ , то для унитарной транспонируемости A необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

- а) геометрическая кратность λ равна двум или трем;
- б) если геометрическая кратность λ равна единице, то

$$|(Aq_2, q_1)| = |(Ap_1, p_2)|. \quad (4)$$

Здесь q_1 и p_1 суть соответственно правый и левый собственные векторы, нормированные в евклидовой норме, а q_2 (p_2) есть нормированный правый (левый) корневой вектор высоты 2, ортогональный к q_1 (соответственно к p_1).

2. Если A имеет двойное собственное значение λ и простое собственное значение μ , то для унитарной транспонируемости A необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

- а) собственное значение λ является полупростым;
- б) если геометрическая кратность λ равна единице, то

$$|(q_1, q_2)| = |(p_1, p_2)|. \quad (5)$$

Здесь q_1 и q_2 – нормированные правые собственные векторы, относящиеся к λ и μ , а p_1 и p_2 – соответствующие нормированные левые собственные векторы.

3. Если A имеет только простые собственные значения, то для унитарной транспонированности A необходимо и достаточно, чтобы равенство (5) выполнялось для какой-нибудь пары нормированных собственных векторов q_1 и q_2 , относящихся к различным собственным значениям, и для соответствующих нормированных левых собственных векторов p_1 и p_2 .

В п. 5 даны некоторые комментарии к этому утверждению.

2. Предварительные результаты. Будем обозначать множество всех унитарно транспонировуемых матриц символом $\mathcal{UT}$ (или $\mathcal{UT}_n$, если требуется указание порядка). Символ $\mathcal{US}(A)$ обозначает класс унитарного подобия матрицы A , т.е. множество всех матриц B , которые унитарно подобны A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $A \in \mathcal{UT}$ и $B \in \mathcal{US}(A)$. Тогда $B \in \mathcal{UT}$.

(Таким образом, унитарная транспонированность есть свойство всего класса унитарного подобия.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $A^T = Q^*AQ$ и $B = P^*AP$ для некоторых унитарных матриц P и Q . Отсюда

$$B^T = P^T A^T \bar{P} = P^T (Q^*AQ) \bar{P} = P^T Q^* (PBP^*) Q \bar{P} = (P^* Q \bar{P})^* B (P^* Q \bar{P}) = W^* B W,$$

где $W = P^* Q \bar{P}$ – унитарная матрица.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $A \in \mathcal{UT}$, то и $A^T, \bar{A}, A^* \in \mathcal{UT}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $A \in \mathcal{UT}$, то $\alpha A \in \mathcal{UT}$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $A \in \mathcal{UT}_n$, то $A - \alpha I_n \in \mathcal{UT}_n$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$.

Эти три предложения очевидны.

Хотя общие условия унитарной транспонированности неизвестны, легко указать некоторые классы УТ-матриц. Например, из предложения 1 немедленно вытекает

ТЕОРЕМА 3. Если матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ унитарно подобна некоторой симметричной матрице, то $A \in \mathcal{UT}_n$.

Это наблюдение можно распространить на ряд типов обобщенных симметричных матриц. Для данной статьи важен случай персимметричных матриц. Матрица $S \in M_n(\mathbb{C})$ называется *персимметричной*, если

$$S^T = H S H^{-1}, \quad (6)$$

где H – *перзединичная* матрица, т.е.

$$H = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \ddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Согласно (6) всякая персимметричная матрица унитарно транспонировуема. Снова применяя предложение 1, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Если матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ унитарно подобна некоторой персимметричной матрице, то $A \in \mathcal{UT}_n$.

Сформулируем условие, которому должна удовлетворять всякая УТ-матрица. Оно основывается на следующем общем положении.

ТЕОРЕМА 5. Предположим, что $A \in M_n(\mathbb{C})$ имеет простые собственные значения λ_1, λ_2 и соответствующие нормированные собственные векторы q_1, q_2 . Пусть $B \in \mathcal{US}(A)$ и p_1, p_2 – нормированные собственные векторы матрицы B для λ_1, λ_2 . Тогда

$$|(q_1, q_2)| = |(p_1, p_2)|. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $B = W^*AW$, где W – унитарная матрица, то Wq_1 и Wq_2 являются собственными векторами B соответственно для λ_1 и λ_2 . В силу простоты этих собственных значений Wq_1 и Wq_2 могут отличаться от p_1 и p_2 лишь числовыми множителями модуля 1. Поэтому

$$|(p_1, p_2)| = |(Wq_1, Wq_2)| = |(q_1, q_2)|.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Предположим, что $A \in M_n(\mathbb{C})$ имеет простые собственные значения λ_1, λ_2 и соответствующие нормированные правые собственные векторы q_1, q_2 и левые собственные векторы p_1, p_2 . Если A унитарно транспонируема, то выполняется равенство (7).

3. Критерий унитарной транспонируемости матриц порядка 3. Критерий Шпехта неэффективен, поскольку требует проверки бесконечного числа условий (2). Пирси показал, что в действительности унитарное подобие $(n \times n)$ -матриц A и B обеспечено, если указанные условия выполнены для слов длины не выше $2n^2$ (см. [3]). При $n = 3$ это означает, что нужно проверять слова до длины 18 включительно. К счастью, известно, что для унитарного подобия (3×3) -матриц A и B достаточно (и, разумеется, необходимо), чтобы равенства (3) были верны для девяти слов

$$\begin{aligned} W_1(s, t) &= s, & W_2(s, t) &= s^2, & W_3(s, t) &= s^3, \\ W_4(s, t) &= st, & W_5(s, t) &= s^2t, & W_6(s, t) &= tst, \\ W_7(s, t) &= s^2t^2, & W_8(s, t) &= ts^2ts, & W_9(s, t) &= ts^2t^2s \end{aligned} \quad (8)$$

(см. [1; § 2.2]).

Мы будем исходить из (3×3) -критерия Шпехта, редуцированного к системе (8), хотя и эта система не является минимальной. В самом деле, Сибирский показал, что можно ограничиваться семью словами (см. [4]).

Для произвольной матрицы $A \in M_3(\mathbb{C})$ величины

$$\text{tr } W_i(A, A^*) = \text{tr}(A^i), \quad i = 1, 2, 3,$$

суть степенные суммы ее собственных значений. Поскольку A и $B = A^T$ имеют одни и те же собственные значения, равенства

$$\text{tr } W_i(A, A^*) = \text{tr } W_i(B, B^*) \quad (9)$$

для $i = 1, 2, 3$ выполняются автоматически.

Для $i = 4$ имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} W_4(A, A^*) &= \operatorname{tr}(A^* A), \\ \operatorname{tr} W_4(B, B^*) &= \operatorname{tr}(\bar{A} A^T) = \overline{\operatorname{tr}(A A^*)} = \overline{\operatorname{tr}(A^* A)}.\end{aligned}\quad (10)$$

В последнем переходе использовано хорошо известное равенство

$$\operatorname{tr}(CD) = \operatorname{tr}(DC) \quad (11)$$

для любых $(n \times n)$ -матриц C и D .

Согласно (10) равенство (9) справедливо при $i = 4$, если число $\operatorname{tr}(A^* A)$ вещественно. Это действительно так, поскольку матрица $A^* A$ эрмитова. Аналогичными рассуждениями равенство (9) обосновывается для $i = 6, 7$:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} W_6(A, A^*) &= \operatorname{tr}(A^* A A^* A) = \operatorname{tr}[(A^* A)^2], \\ \operatorname{tr} W_6(B, B^*) &= \operatorname{tr}(\bar{A} A^T \bar{A} A^T) = \overline{\operatorname{tr}(A A^*)^2} = \overline{\operatorname{tr}[(A^* A)^2]} = \operatorname{tr}[(A^* A)^2], \\ \operatorname{tr} W_7(A, A^*) &= \operatorname{tr}[(A^*)^2 A^2], \\ \operatorname{tr} W_7(B, B^*) &= \operatorname{tr}[\bar{A}^2 (A^T)^2] = \overline{\operatorname{tr}[A^2 (A^*)^2]} = \overline{\operatorname{tr}[(A^*)^2 A^2]} = \operatorname{tr}[(A^*)^2 A^2].\end{aligned}$$

В этих выкладках снова применено тождество (11); кроме того, используется эрмитовость матриц $(A^* A)^2$ и $(A^*)^2 A^2$, а также то обстоятельство, что матрицы $A^* A$ и $A A^*$ имеют одинаковые собственные значения. Одинаковы, следовательно, собственные значения матриц $(A^* A)^2$ и $(A A^*)^2$, а потому

$$\operatorname{tr}[(A^* A)^2] = \operatorname{tr}[(A A^*)^2].$$

Для слова $W_5(s, t)$ имеем

$$\operatorname{tr} W_5(A, A^*) = \operatorname{tr}(A^* A^2) = \operatorname{tr}(A A^* A) = \operatorname{tr}(A^T \bar{A} A^T) = \operatorname{tr}[\bar{A} (A^T)^2] = \operatorname{tr} W_5(B, B^*).$$

В этой цепочке равенств второе и предпоследнее равенство используют тождество (11), а среднее равенство фиксирует совпадение следов у взаимно транспонированных матриц $A A^* A$ и $A^T \bar{A} A^T$. Наконец, для $i = 8$ получаем

$$\operatorname{tr} W_8(A, A^*) = \operatorname{tr}(A^* A^2 A^* A) = \operatorname{tr}(A A^* A^2 A^*) = \operatorname{tr}(\bar{A} (A^T)^2 \bar{A} A^T) = \operatorname{tr} W_8(B, B^*).$$

И здесь использованы тождество (11) и равенство следов взаимно транспонированных матриц.

Итак, для матриц A и $B = A^T$ равенства (9) выполнены для $i = 1, 2, \dots, 8$. Это позволяет нам сформулировать следующий критерий унитарной транспонировуемости матрицы $A \in M_3(\mathbb{C})$.

ТЕОРЕМА 6. Матрица $A \in M_3(\mathbb{C})$ унитарно транспонируема в том и только в том случае, если

$$\operatorname{tr} W_9(A, A^*) = \operatorname{tr} W_9(B, B^*), \quad (12)$$

т.е. если

$$\operatorname{tr}[A^* A^2 (A^*)^2 A] = \operatorname{tr}[\bar{A} (A^T)^2 \bar{A}^2 A^T]. \quad (13)$$

4. Доказательство теоремы 2. В силу предложения 1 исходную матрицу A можно заменить ее формой Шура, для определенности верхней формой

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

1. Пусть A имеет единственное собственное значение λ . Если $r_{12} = r_{13} = r_{23} = 0$, то скалярная матрица $A = R = \lambda I_3$, очевидно, унитарно транспонируема. Поэтому в дальнейшем считаем, что $|r_{12}| + |r_{13}| + |r_{23}| \neq 0$. Исходя из предложения 4, можно считать, что $\lambda = 0$. Полагая

$$r_{12} = \alpha, \quad r_{23} = \beta, \quad r_{13} = \gamma, \quad (15)$$

переписываем критерий унитарной транспонируемости (13) в виде

$$\operatorname{tr}[A^* A^2 (A^*)^2 A] - \operatorname{tr}[\bar{A} (A^T)^2 \bar{A}^2 A^T] = |\alpha|^2 |\beta|^2 (|\alpha|^2 - |\beta|^2) = 0.$$

Если $\alpha = 0$, то координатные векторы $e_1 = (1, 0, 0)^T$ и $e_2 = (0, 1, 0)^T$ суть собственные векторы матрицы R и геометрическая кратность λ равна двум. В случае $\beta = 0$ координатные векторы e_2 и e_3 суть левые собственные векторы для R и геометрическая кратность λ снова равна двум.

Пусть теперь

$$|\alpha| = |\beta| \neq 0. \quad (16)$$

В этом случае геометрическая кратность λ равна единице. Координатный вектор e_1 является единственным (с точностью до умножения на ненулевые константы) собственным вектором матрицы R , а вектор e_3 есть единственный (в том же смысле) левый собственный вектор. Корневые векторы высоты два – это векторы вида $(\xi, \eta, 0)^T$ с ненулевой компонентой η . Координатный вектор e_2 – единственный среди таких векторов (снова игнорируя умножение на ненулевые константы), который ортогонален e_1 . Точно так же e_2 можно описать как единственный левый корневой вектор высоты два, ортогональный к левому собственному вектору e_3 . Теперь равенство (16) можно переписать как

$$|(Re_2, e_1)| = |(Re_3, e_2)|.$$

Возвращаясь от формы Шура R к исходной матрице A , получаем (4).

2. Пусть A имеет двойное собственное значение λ и простое собственное значение μ . Используя предложения 3 и 4, можем считать, что $\lambda = 0$ и $\mu = 1$. Среди возможных форм Шура матрицы A выберем матрицу R вида

$$R = \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В обозначениях (15) критерий (13) принимает вид

$$(|\alpha|^2 - |\beta|^2)|\alpha\beta - \gamma|^2 = 0.$$

Если $\alpha\beta - \gamma = 0$, то ранг матрицы R равен единице и, следовательно, $\lambda = 0$ есть полупростое собственное значение.

Пусть теперь

$$|\alpha| = |\beta|. \quad (17)$$

Если при этом $\alpha \neq 0$, то равенство (17) можно интерпретировать в геометрических терминах. Нормированные собственные векторы матрицы R суть

$$\tilde{q}_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \tilde{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + |\alpha|^2}}(\alpha, 1, 0)^T,$$

а ее нормированные левые собственные векторы имеют вид

$$\tilde{p}_1 = (0, 0, 1)^T, \quad \tilde{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + |\beta|^2}}(0, 1, \bar{\beta})^T.$$

Поэтому

$$|(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)|^2 = \frac{|\alpha|^2}{1 + |\alpha|^2} = \frac{|\beta|^2}{1 + |\beta|^2} = |(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)|^2.$$

Возвращаясь к исходной матрице A , получаем из этого равенства соотношение (5).

Пусть $\alpha = \beta = 0$.

Если $\gamma \neq 0$, то $\lambda = 0$ сохраняет геометрическую кратность единица и предыдущие выкладки сохраняют силу.

Если же $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то $\lambda = 0$ есть полупростое собственное значение.

3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – (простые) собственные значения матрицы A . Используя для формы Шура R обозначения (15), записываем критерий унитарной транспонированности (13) как

$$\Delta = |\alpha\beta + \gamma(\lambda_3 - \lambda_2)|^2(|\alpha|^2 + |\lambda_1 - \lambda_2|^2) - |\alpha\beta + \gamma(\lambda_1 - \lambda_2)|^2(|\beta|^2 + |\lambda_3 - \lambda_2|^2) = 0. \quad (18)$$

Проинтерпретируем это равенство. Нормированные собственные векторы матрицы R для собственных значений λ_1 и λ_3 суть

$$\tilde{q}_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \tilde{q}_3 = \varkappa_1(\alpha\beta + \gamma(\lambda_3 - \lambda_2), \beta(\lambda_3 - \lambda_1), (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1))^T,$$

где $\varkappa_1$ – нормирующий множитель.

Нормированные левые собственные векторы имеют вид

$$\tilde{p}_1 = \varkappa_2((\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3), \alpha(\lambda_1 - \lambda_3), \alpha\beta + \gamma(\lambda_1 - \lambda_2))^T, \quad \tilde{p}_3 = (0, 0, 1)^T,$$

здесь $\varkappa_2$ – снова нормирующий множитель.

После несложных выкладок оказывается, что $\Delta = 0$ тогда и только тогда, когда

$$|(\tilde{q}_1, \tilde{q}_3)| = |(\tilde{p}_1, \tilde{p}_3)|. \quad (19)$$

Поскольку в качестве r_{11} и r_{33} могла быть выбрана любая пара из собственных значений λ_1, λ_2 и λ_3 , то равенство (19) должно выполняться для каждой такой пары. Возвращаясь к исходной матрице A , получаем соотношение (5).

5. Заключительные замечания. Если для матрицы с единственным собственным значением A выполнено соотношение (17), то, выполняя при необходимости диагональное унитарное подобие, можем добиться равенства

$$\alpha = \beta. \quad (20)$$

Тем самым, A может быть приведена к персимметричной форме Шура, что согласно теореме 4 доказывает ее унитарную транспонированность. В этом случае не требуется даже прибегать к условиям Шпехта. То же самое можно сказать о ситуации

$$\alpha = 0, \quad \beta \neq 0 \quad (21)$$

или

$$\beta = 0, \quad \alpha \neq 0.$$

Пусть, например, имеет место (21). Тогда унитарным подобием с подходящим комплексным вращением R_{12} в качестве трансформирующей матрицы можно аннулировать элемент $(2, 3)$ матрицы R ; при этом элемент $(1, 2)$ сохраняет нулевое значение. Новая матрица R персимметрична. Итак, всякая унитарно транспонируемая (3×3) -матрица с единственным собственным значением может быть приведена к персимметричной форме Шура.

Этот вывод справедлив и для унитарно транспонируемых матриц с двойным собственным значением, если выполнено соотношение (17), причем обоснование то же, что и выше.

В случае различных собственных значений унитарная транспонированность обеспечивается выполнением равенства (5) для собственных векторов, относящихся к какой-либо паре λ_i, λ_j . Но тогда в силу следствия 1 такие же равенства выполняются для собственных векторов, относящихся к двум другим парам собственных значений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989.
- [2] Х. Д. Икрамов, “Об унитарном подобии взаимно транспонированных матриц”, *Докл. РАН*, **378**:5 (2001), 592–593.
- [3] С. Pearcy, “A complete set of unitary invariants for operators generating finite W^* -algebras of type I”, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), 1405–1416.
- [4] К. С. Сибирский, *Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц*, Штиинца, Кишинев, 1976.

Х. Д. Икрамов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило

01.02.2011

А. К. Абдикалыков

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: adiko2008@gmail.com