Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Лосев, Лиувиллево свойство на произведениях римановых многообразий, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 2, 313–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9035>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:18:32

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Лиувиллево свойство на произведениях римановых многообразий

А. Г. Лосев

1. Введение. Работа посвящена изучению решений стационарного уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях. Традиционно одним из истоков указанной проблематики называют классификационную теорию некомпактных римановых многообразий. Отличительным свойством многообразий параболического типа является выполнение для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данном многообразии является тождественной постоянной. Получению различных условий параболичности в терминах таких характеристик как емкость, рост объема геодезического шара, поведение площадей сечений, изменение кривизны и т.д. посвящено множество работ. Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из [1]. Вопросы существования нетривиальных гармонических и супергармонических функций естественным образом приводят к теоремам типа Лиувилля. Считающаяся классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция является тождественной постоянной. Многообразия, на которых всякая ограниченная гармоническая функция является постоянной, называют L^∞ -лиувиллевыми. Вместе с тем класс полных многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные гармонические функции, достаточно обширен.

В работах ряда математиков решались аналогичные задачи для линейных уравнений более общих, чем уравнение Лапласа–Бельтрами. В частности, рассматривались различные множества решений стационарного уравнения Шрёдингера

$$\Delta u - c(x)u = 0, \quad (1)$$

где $c(x)$ – неотрицательная функция. Так как в случае $c(x) \not\equiv 0$ ненулевая постоянная не является решением уравнения (1), то и теорема Лиувилля для него формулируется несколько иначе.

Будем говорить, что на многообразии M выполнено *c-лиувиллево свойство* для ограниченных решений уравнения (1), если любое такое решение есть тождественный нуль. Такие многообразия называют *c-лиувиллевыми*.

Известно (см. [2]), что выполнение *c-лиувиллева свойства* при $c(x) \in C_0^\infty(M)$ эквивалентно параболичности типа многообразия M . С другой стороны (см. [3]), существование ненулевого ограниченного решения уравнения (1) при $c(x) \equiv \text{const} > 0$, эквивалентно стохастической неполноте рассматриваемого многообразия (многообразие называют *стохастически полным*, если винеровский процесс на нем имеет бесконечное время жизни). Изучению свойств стохастически полных многообразий посвящен ряд работ (см., например, [1]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-97004-р_поволжье_а).

Отметим, что если многообразия M и N являются стохастически полными, то и риманово произведение $M \times N$ также является стохастически полным. Для многообразий параболического типа данное свойство не выполняется, например, $\mathbb{R}^2$ – многообразие параболического типа, а $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ – нет.

Вопросы сохранения лиувиллева свойства на римановых произведениях затрагивались в ряде работ. Например, показано (см. [1], [4]), что многообразие $N \times K$, где K – компактное многообразие, является одновременно стохастически полным и L^∞ -лиувиллевым тогда и только тогда, когда N стохастически полно и L^∞ -лиувиллево. Здесь отметим, что существуют геодезически полные, L^∞ -лиувиллевы, но стохастически неполные многообразия (см., например, [5]).

В [1] была сформулирована следующая задача. Предположим, что на M выполнено c_m -лиувиллево свойство, а на K – c_k -лиувиллево свойство. Найти условия выполнения c -лиувиллева свойства на $M \times K$. Здесь $c(x, y) = f(c_m(x), c_k(y))$, а f – некоторая функция двух переменных.

Настоящая работа посвящена решению одного частного случая указанной проблемы. А именно, всюду ниже будем считать, что K – компакт без края. Последнее подразумевает автоматическое выполнение c_k -лиувиллева свойства.

Положим далее, что функция $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет неравенству

$$f(\xi, \eta) \geq A\xi \quad (2)$$

для некоторой положительной константы A . Здесь $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Пусть также $c_k(y)$ – произвольная неотрицательная на K функция.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – произвольное некомпактное $c_m(x)$ -лиувиллево многообразие, а K – компактное риманово многообразие. Тогда на многообразии $M \times K$ всякое ограниченное решение уравнения

$$\Delta u - f(c_m(x), c_k(y))u = 0 \quad (3)$$

является тождественным нулем.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В основе доказательства лежит утверждение Григорьяна и Надирашвили (см. [6]) о сохранении лиувиллева свойства при изменении потенциала. А именно, если для некоторой положительной константы A выполнено $0 \leq c_2(x) \leq Ac_1(x)$, $c_2 \not\equiv 0$, то из c_2 -лиувиллевости риманова многообразия следует его c_1 -лиувиллевость.

2. Доказательство теоремы. Докажем вначале справедливость утверждения теоремы для случая

$$f(\xi, \eta) = \xi.$$

Пусть $u(x, y)$ – ограниченное решение уравнения

$$\Delta u(x, y) - c_m(x)u(x, y) = 0.$$

Возьмем произвольную точку $(x, y) \in M \times K$, где $x \in M$, $y \in K$. Пусть $\{\omega_i(y)\}$ – ортонормированный базис в $L^2(K)$ из собственных функций оператора $-\Delta_y$, а λ_i – соответствующие собственные числа. Здесь Δ_y – оператор Лапласа–Бельтрами на K . Тогда для любого $x \in M$ имеет место разложение в ряд

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i(x)\omega_i(y),$$

где

$$s_i(x) = \int_K u(x, y)\omega_i(y) dy,$$

и

$$\Delta_y \omega_i(y) + \lambda_i \omega_i(y) = 0.$$

Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$. Учитывая, что

$$\Delta u(x, y) = \Delta_x u(x, y) + \Delta_y u(x, y),$$

где Δ_x – оператор Лапласа–Бельтрами на M , получаем

$$\Delta_x u(x, y) = c_m(x)u(x, y) - \Delta_y u(x, y).$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \Delta_x s_i(x) &= \int_K \Delta_x u(x, y) \omega_i(y) dy \\ &= \int_K c_m(x) u(x, y) \omega_i(y) dy - \int_K \Delta_y u(x, y) \omega_i(y) dy \\ &= c_m(x) \int_K u(x, y) \omega_i(y) dy - \int_K u(x, y) \Delta_y \omega_i(y) dy \\ &= c_m(x) \int_K u(x, y) \omega_i(y) dy + \lambda_i \int_K u(x, y) \omega_i(y) dy \\ &= c_m(x) s_i(x) + \lambda_i s_i(x) = (c_m(x) + \lambda_i) s_i(x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta_x s_i(x) - (c_m(x) + \lambda_i) s_i(x) = 0.$$

Покажем, что из ограниченности функции $u(x, y)$ следует ограниченность коэффициентов $s_i(x)$ для всех номеров i . Из неравенства Коши–Буняковского получаем

$$|s_i(x)| \leq \left(\int_K u^2(x, y) dy \right)^{1/2} \left(\int_K \omega_i^2(y) dy \right)^{1/2} = \left(\int_K u^2(x, y) dy \right)^{1/2} \leq C \sqrt{|K|},$$

где последнее неравенство следует из ограниченности $u(x, y)$. Здесь $|K|$ – объем многообразия K .

Так как на M выполнено c_m -лиувиллево свойство, то, учитывая замечание 1, получаем, что на M выполнено $(c_m(x) + \lambda_i)$ -лиувиллево свойство. Отсюда заключаем, что $s_i(x) \equiv 0$ для всех номеров i . Таким образом, $u(x, y) \equiv 0$, т.е. на $M \times K$ выполнено $c_m(x)$ -лиувиллево свойство.

С другой стороны из неравенства (2) следует

$$0 \leq c_m(x) \leq \frac{1}{A} f(c_m(x), c_k(y)).$$

Учитывая утверждение, приведенное в замечании 1, получаем требуемое.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Grigor'yan, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **36**:2 (1999), 135–249. [2] А. А. Григорьян, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **14**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1989, 66–77. [3] Е. В. Davies, *Bull. London Math. Soc.*, **17**:5 (1985), 417–436. [4] А. Г. Лосев, *Изв. вузов. Матем.*, 1997, № 10, 59–63. [5] А. Г. Лосев, *Сиб. матем. журн.*, **39**:1 (1998), 87–93. [6] А. А. Григорьян, Н. С. Надирашвили, *Изв. вузов. Матем.*, 1987, № 5, 25–33.

А. Г. Лосев

Волгоградский государственный университет

E-mail: alexander.losev@volsu.ru

Поступило

15.08.2011

Исправленный вариант

10.11.2011