Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Ильин, С. В. Репьевский, О разрешимости краевой задачи для эллиптического уравнения, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 2, 216–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9038>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 16:50:59

О разрешимости краевой задачи для эллиптического уравнения

А. М. Ильин, С. В. Репьевский

Рассматривается краевая задача для линейного эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной области. Коэффициент при искомой функции неположителен всюду в области, кроме малой окрестности внутренней точки. Спрашивается, при каких ограничениях на этот коэффициент в данной малой области остаются справедливыми утверждения о существовании и единственности решения первой краевой задачи.

Библиография: 3 названия.

1. Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{L}u + C(x)u = F(x), \quad (1.1)$$

$$u|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad (1.2)$$

где

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (1.3)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, ограниченная область Ω имеет гладкую границу $\partial\Omega$. Квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \xi_i \xi_j$ строго положительно определена всюду при $x \in \bar{\Omega}$. Коэффициенты оператора $\mathcal{L}$, а также $F(x)$ и $C(x)$ – достаточно гладкие в $\bar{\Omega}$ функции.

Хорошо известно, что при $C(x) \leq 0$ задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение, так что нуль не принадлежит спектру оператора $\mathcal{L} + C(x)E$. Условие $C(x) \leq 0$ является существенным, так как при его нарушении могут появиться нетривиальные решения однородного уравнения. Пусть условие $C(x) \leq 0$ нарушается в малой области $\omega_\delta = \{x : |x| < \delta\}$ (всюду ниже предполагается, что начало координат лежит в области Ω). Цель работы состоит в получении достаточных условий на коэффициент $C(x)$, при выполнении которых задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение. При малых значениях радиуса δ допустимы довольно большие положительные значения коэффициента $C(x)$. Будут выяснены максимально возможные

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 09-01-00530, 10-01-96012 р-урал-а), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-6249.2010.1), а также ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (грант № 02.740.11.0612).

по порядку δ значения этого коэффициента при $\delta \rightarrow 0$. А для частного значения оператора $\mathcal{L} = \Delta$ эти оценки будут точными.

2. Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. *Если существует функция $v(x) \in C^2(\Omega, |x| \neq \delta) \cap C(\overline{\Omega})$, $v(x) > 0$, такая, что $(\mathcal{L} + C(x))v < 0$ в точках $|x| \neq \delta$ и выполняется неравенство*

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} < \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0}, \quad \text{где } r = |x|, \quad (2.1)$$

то краевая задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, достаточно показать, что однородная задача имеет только тривиальное решение. Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ – решение задачи (1.1), (1.2) при $F(x) \equiv 0$. Сделаем замену $u(x) = z(x) \cdot v(x)$, где $v(x) > 0$ – функция из условия леммы. Так как $u(x) \in C^2(\Omega)$, то $(\partial u / \partial r)|_{|x|=\delta+0} = (\partial u / \partial r)|_{|x|=\delta-0}$. Поэтому

$$z(x) \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} + v(x) \left. \frac{\partial z}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} = z(x) \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0} + v(x) \left. \frac{\partial z}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0}.$$

Следовательно, для z выполняется равенство

$$\frac{z(x)}{v(x)} \cdot \left(\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0} - \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} \right) = \left. \frac{\partial z}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} - \left. \frac{\partial z}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0}. \quad (2.2)$$

Кроме того, $z|_{\partial\Omega} = 0$.

Для окончания доказательства достаточно показать, что $z \equiv 0$.

Предположим, что z имеет положительный максимум. Он не может достигаться в точках гладкости функции z из принципа максимума. Действительно $\mathcal{L}u + C(x)u = 0$. Поэтому

$$z(x)\mathcal{L}v + 2 \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} + v(x)\mathcal{L}z + C(x)z(x)v(x) = 0.$$

В точке максимума $\nabla z = 0$, следовательно,

$$z(x)(\mathcal{L}v + C(x)v(x)) + v(x)\mathcal{L}z = 0.$$

Но $\mathcal{L}v + C(x)v(x) < 0$, $v > 0$. В точке положительного максимума функции $z(x)$ $\mathcal{L}z \leq 0$ вследствие положительности квадратичной формы $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\xi_i\xi_j$. Так как $z(x) > 0$ в этой точке, то приходим к противоречию.

Теперь рассмотрим точки $|x| = \delta$, для них выполняются соотношения (2.1), (2.2). А значит, $(\partial z / \partial r)|_{|x|=\delta+0} > (\partial z / \partial r)|_{|x|=\delta-0}$, следовательно, положительный максимум функции $z(x)$ не может достигаться и в точках $|x| = \delta$. Приходим к выводу, что положительный максимум функции $z(x)$ в области $\overline{\Omega}$ не достигается.

Аналогично показывается, что и отрицательный минимум функции $z(x)$ не может достигаться в области $\overline{\Omega}$. Таким образом, $z(x)$ не имеет ни положительного максимума, ни отрицательного минимума в области $\overline{\Omega}$, значит, $z \equiv 0$.

ЛЕММА 2. Если существует функция $v(x) \in C^2(\{x \in \Omega, |x| \neq \delta\})$, $v(x) > 0$, такая, что

$$(\mathcal{L} + C(x))v \leq 0 \quad \text{при } |x| \neq \delta, \quad (2.3)$$

и выполняется неравенство

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} < \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0}, \quad \text{где } r = |x|, \quad (2.4)$$

то краевая задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что при достаточно большом $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$(\mathcal{L} + C(x)) \exp(\alpha x_1) = (A_{11}(x)\alpha^2 + B_1(x)\alpha + C(x)) \exp(\alpha x_1) > 0.$$

Поэтому при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для функции $v_1(x) = v(x) - \varepsilon \exp(\alpha x_1)$ справедливы неравенства $(\mathcal{L} + C(x))v_1(x) < 0$, $v_1(x) > 0$ и неравенство

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} < \left. \frac{\partial v_1}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0}, \quad \text{где } r = |x|.$$

Для функции $v_1(x)$ справедливы все условия леммы 1. Тем самым лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть функция $v(x) \in C^2(\Omega, |x| \neq \delta) \cap C(\bar{\Omega})$, $v(x) > 0$,

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} > \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $V(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ такая, что

$$\begin{cases} \|v - V\|_{C(\Omega)} < \varepsilon, \\ \mathcal{L}V > \mathcal{L}v - \varepsilon, \\ v(x) \equiv V(x) \quad \text{при } |x| \geq \delta + \varepsilon. \end{cases} \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего представим функцию $v(x)$ в виде суммы двух гладких функций, используя разложение единицы: $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$, так чтобы $v_k(x) = v(x)\eta_k(|x|)$, $\eta_k(|x|) \geq 0$, $\eta_k(|x|) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$,

$$\begin{aligned} \eta_1(|x|) &\equiv 0 \quad \text{при } ||x| - \delta| < \frac{\varepsilon}{2}, & \eta_1(|x|) &\equiv 1 \quad \text{при } ||x| - \delta| > \varepsilon, \\ \eta_2(|x|) &\equiv 1 \quad \text{при } ||x| - \delta| < \frac{\varepsilon}{2}, & \eta_2(|x|) &\equiv 0 \quad \text{при } ||x| - \delta| > \varepsilon. \end{aligned}$$

Пусть $\omega_h(s) = h^{-1}\omega(s)$ – ядро осреднения, где функция $\omega(s) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\omega(s) > 0$ при $|s| < h$, $\omega(s) \equiv 0$ при $|s| > h$, $\int_{-h}^h \omega(s) ds = 1$.

В окрестности начала координат перейдем к сферическим координатам (r, Θ) , где $r = |x|$, а Θ – координаты на единичной сфере. Определим $V(x)$ как $v_1(x) + v_{2,h}(x)$, где $v_{2,h}(x)$ – это среднее по радиусу от функции $v_2(x)$, т.е.

$$v_{2,h}(x) = \int_{-h}^h \omega_h(s) v_2(r - s, \Theta) ds = \int_{-h}^h \omega_h(r - s) v_2(s, \Theta) ds.$$

Оператор $\mathcal{L}$ в сферических координатах имеет вид

$$\alpha(r, \Theta) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{L}_1 + \frac{1}{r^2} \mathcal{L}_2,$$

где $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ – операторы дифференцирования по угловым координатам, $\alpha(r, \Theta) > 0$. Так как функция $v_2(x)$ непрерывна и имеет кусочно непрерывные производные, то

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k v_{2,h}(x) &= \int_{-h}^h \omega_h(s) \mathcal{L}_k v_2(r-s, \Theta) ds, \quad k = 1, 2, \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_{2,h}(x) &= \int_{-h}^h \omega_h(s) \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_2(r-s, \Theta) ds + \omega_h(r-\delta) \left(\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{|x|=\delta+0} - \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{|x|=\delta-0} \right). \end{aligned}$$

Поэтому при достаточно малых h справедливо неравенство

$$\mathcal{L} v_{2,h}(x) > \mathcal{L} v_2(x) - \varepsilon,$$

и, тем самым, выполняются соотношения (2.5).

3. Условия разрешимости краевой задачи. Вернемся к задаче (1.1), (1.2). Рассмотрим случай $n > 2$.

ТЕОРЕМА 1. *Существует постоянная M_1 , зависящая только от области Ω и коэффициентов оператора $\mathcal{L}$, такая, что при всех достаточно малых δ из условий*

$$C(x) \leq 0 \quad \text{при} \quad |x| \geq \delta, \quad (3.1)$$

$$C(x) \leq M_1 \delta^{-2} \quad \text{при} \quad |x| < \delta \quad (3.2)$$

вытекают существование и единственность решения задачи (1.1), (1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2 достаточно построить положительную функцию $v(x)$, которая удовлетворяла бы условиям (2.3), (2.4). Без ограничения общности будем считать, что

$$A_{ii}(0) = 1, \quad A_{ij}(0) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad B_i(0) = 0.$$

В качестве функции $v(x)$ в области $\Omega \setminus \omega_\delta$ возьмем $v_1(x) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, где $v_1(x)$ – решение уравнения $\mathcal{L} v_1 = 0$, которое равно нулю на $\partial\Omega$ и равно единице при $|x| = \delta$. Очевидно, что такое положительное решение существует. Его асимптотика при $\delta \rightarrow 0$ исследована в [1], [2]:

$$v(x) = \delta^{n-2} |x|^{2-n} (1 + \varepsilon + O(\delta)), \quad \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{|x|=\delta} = (2-n) \delta^{-1} (1 + O(\delta)).$$

Внутри шара $|x| < \delta$ положим

$$v(x) = 1 + \varepsilon + \frac{1}{4} (n-2) (1 - |x|^2 \delta^{-2}).$$

Построенная функция $v(x)$, очевидно, положительна и непрерывна всюду в $\bar{\Omega}$.

При $|x| > \delta$

$$\mathcal{L}v + C(x)v \leq 0,$$

при $|x| < \delta$

$$\mathcal{L}v + C(x)v \leq -\frac{1}{2}(n-2)n\delta^{-2}(1+O(\delta)) + M_1\delta^{-2}(n-1+\varepsilon) < 0$$

при всех достаточно малых δ и ε , если положить $M_1 = n(n-2)/(4(n-1))$.

Кроме того,

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} = (2-n)\delta^{-1}(1+O(\delta)), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0} = -\frac{1}{2}(n-2)\delta^{-1}.$$

Поэтому

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} < \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0}$$

при всех достаточно малых δ , что и завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{L}$ – дифференциальный оператор (1.3). Существует постоянная M_2 , зависящая только от области Ω и коэффициентов оператора $\mathcal{L}$, такая, что при всех достаточно малых δ при некотором коэффициенте $C(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ таком, что

$$C(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad |x| > 2\delta, \quad C(x) < M_2\delta^{-2} \quad \text{при} \quad |x| < 2\delta,$$

существует нетривиальное решение задачи

$$\mathcal{L}u + C(x)u = 0, \quad u|_{x \in \partial\Omega} = 0. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и при доказательстве теоремы 1, в области $\Omega \setminus \omega_\delta$ определим функцию $v(x)$ как решение уравнения $\mathcal{L}v = 0$, которое равно нулю на $\partial\Omega$ и равно единице при $|x| = \delta$. Его асимптотика при $\delta \rightarrow 0$:

$$v(x) = \delta^{n-2}|x|^{2-n}(1+O(\delta)), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta} = (2-n)\delta^{-1}(1+O(\delta)).$$

Внутри шара $|x| < \delta$ положим

$$v(x) = 1 + M_3(1 - |x|^2\delta^{-2}).$$

Построенная функция $v(x)$, очевидно, положительна и непрерывна всюду в $\bar{\Omega}$. При $|x| < \delta$

$$\mathcal{L}v > -2nM_3\delta^{-2}(1+O(\delta))$$

при всех достаточно малых δ .

Кроме того,

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} = (2-n)\delta^{-1}(1+O(\delta)), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0} = -2M_3\delta^{-1}(1+O(\delta)).$$

Поэтому

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} > \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0}$$

при всех достаточно малых δ , если $M_3 < (1/2)(n-2)$.

Согласно лемме 3 существует функция $V(x)$, удовлетворяющая соотношениям (2.5). Если обозначить $C(x) = -(\mathcal{L}V)/V$, то функция $V(x)$ удовлетворяет $\mathcal{L}V + C(x)V = 0$.

При этом, полагая $\varepsilon = \delta$, получим, что $C(x) = 0$ при $|x| > 2\delta$

$$C(x) = -\frac{\mathcal{L}v}{V} < 2nM_3\delta^{-2}(1 + O(\delta)) \quad \text{при } |x| < 2\delta.$$

Справедливость утверждения теоремы следует, если положить $M_2 > 2nM_3$.

4. Частный случай, когда $\mathcal{L} = \Delta$. Рассмотрим далее частный случай уравнения (1.1), т.е. уравнение

$$\Delta u + C(x)u = f(x), \quad (4.1)$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ с условием (1.2) при $n > 1$. Оказывается, в этом случае точные значения констант M_1 и M_2 в теоремах 1 и 2 можно найти и они совпадают.

Через σ_ν будем обозначать наименьший положительный корень функции Бесселя $J_\nu(r)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n > 2$, $\nu = n/2 - 1$. При всех достаточно малых δ из условий

$$C(x) \leq 0 \quad \text{при } |x| \geq \delta, \quad (4.2)$$

$$C(x) < \sigma_{\nu-1}^2 \delta^{-2} \quad \text{при } |x| < \delta \quad (4.3)$$

вытекают существование и единственность решения задачи (4.1), (1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с леммой 1 построим барьерную функцию

$$\begin{aligned} v(x) &= \delta^{n-2}|x|^{2-n} & \text{при } |x| \geq \delta, \\ v(x) &= Z(\alpha\delta^{-1}|x|)(Z(\alpha))^{-1} & \text{при } |x| \leq \delta, \end{aligned} \quad \text{где } Z(r) = r^{-\nu}J_\nu(r),$$

а постоянная α будет выбрана позднее. Очевидно, что такая функция $v(x)$ непрерывна, гладкая при $|x| \neq \delta$,

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} = (2-n)\delta^{-1}, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0} = -\alpha\delta^{-1}J_{\nu+1}(\alpha)(J_\nu(\alpha))^{-1}.$$

При $|x| < \delta$ функция $v(x)$ удовлетворяет уравнению $\Delta u + \alpha^2\delta^{-2}u = 0$. Равенство односторонних производных при $|x| = \delta$ достигается, если выполнено равенство

$$\frac{(n-2)}{\alpha} J_\nu(\alpha) - J_{\nu+1}(\alpha) = 0,$$

или, что то же самое, $J_{\nu-1}(\alpha) = 0$. Поэтому, если выбрать $\alpha < \sigma_{\nu-1}$, то будет выполнено неравенство

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} < \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0}.$$

Кроме того,

$$\Delta v + C(x)v \leq 0 \quad \text{при } |x| \geq \delta,$$

а при $|x| < \delta$ для α , достаточно близких к $\sigma_{\nu-1}$, справедливо неравенство

$$\Delta v + C(x)v = -\alpha^2 \delta^{-2} v + C(x)v \leq 0.$$

Утверждение теоремы вытекает, таким образом, из леммы 2.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $n > 2$, $\nu = n/2 - 1$. Найдется такая область Ω и такой коэффициент $C(x)$, что

$$\begin{aligned} C(x) &\leq 0 & \text{при } |x| \geq \delta, \\ C(x) &< M, \quad M > \sigma_{\nu-1}^2 \delta^{-2}, & \text{при } |x| < \delta, \end{aligned}$$

при которых у задачи (4.1), (1.2) существует нетривиальное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ω – это шар радиуса R . Так же, как и при доказательстве теоремы 3, в области Ω определим функцию

$$\begin{aligned} v(x) &= (|x|^{2-n} - R^{2-n})(\delta^{2-n} - R^{2-n})^{-1} \quad \text{при } |x| \geq \delta, \\ v(x) &= Z(\alpha \delta^{-1} |x|)(Z(\alpha))^{-1} \quad \text{при } |x| \leq \delta, \quad \text{где } Z(r) = r^{-\nu} J_{\nu}(r), \end{aligned}$$

но выберем постоянную $\alpha > \sigma_{\nu-1}$.

Тогда будет выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} &= (2-n)\delta^{-1}(1 - R^{2-n}\delta^{n-2})^{-1} \\ &> (2-n)\delta^{-1} > -\alpha \delta^{-1} J_{\nu+1}(\alpha)(J_{\nu}(\alpha))^{-1} = \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0}. \end{aligned}$$

Кроме того, $v(x) \in C^2(\Omega, |x| \neq \delta) \cap C(\bar{\Omega})$, $v(x) > 0$ при $|x| \neq R$ и $v|_{x \in \partial\Omega} = 0$.

Тогда согласно лемме 3 существует функция $V(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющая условиям (2.5). Если обозначить $C(x) = -(\Delta V)/V$, то функция $V(x)$ удовлетворяет уравнению $\Delta V + C(x)V = 0$.

При этом $C(x) = 0$ при $|x| > \delta$,

$$C(x) = \frac{-\Delta V}{V} < \frac{-\Delta v}{v} = \frac{\alpha^2 \delta^{-2} v}{v} = \alpha^2 \delta^{-2}.$$

Таким образом, построены коэффициент $C(x)$ и нетривиальное решение однородной задачи, что и завершает доказательство теоремы.

В одномерном и двумерном случаях точные оценки коэффициента $C(x)$ в малой окрестности начала координат зависят от размеров области Ω . Одномерный случай был рассмотрен в [3]. Ниже рассмотрим двумерный случай.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $n = 2$, область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ расположена внутри круга радиуса R с центром в начале координат, а σ – наименьший положительный корень уравнения

$$\sigma J_1(\sigma)(J_0(\sigma))^{-1} = \left(\ln \frac{R}{\delta} \right)^{-1}. \quad (4.4)$$

При всех достаточно малых δ из условий

$$C(x) \leq 0 \quad \text{при } |x| \geq \delta, \quad (4.5)$$

$$C(x) < \sigma^2 \delta^{-2} \quad \text{при } |x| < \delta \quad (4.6)$$

вытекают существование и единственность решения задачи (4.1), (1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим барьерную функцию

$$\begin{aligned} v(x) &= \ln \frac{R}{|x|} \left(\ln \frac{R}{\delta} \right)^{-1} & \text{при } |x| \geq \delta, \\ v(x) &= J_0(\alpha \delta^{-1} |x|) (J_0(\alpha))^{-1} & \text{при } |x| \leq \delta, \end{aligned}$$

где постоянная α будет выбрана позднее. Очевидно, что такая функция $v(x)$ непрерывна, гладкая при $|x| \neq \delta$ и

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{|x|=\delta+0} = - \left(\ln \frac{R}{\delta} \right)^{-1} \delta^{-1}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{|x|=\delta-0} = -\alpha \delta^{-1} J_1(\alpha) (J_0(\alpha))^{-1}.$$

При $|x| < \delta$ функция $v(x)$ удовлетворяет уравнению $\Delta u + \alpha^2 \delta^{-2} u = 0$. Равенство односторонних производных при $|x| = \delta$ достигается, если выполнено равенство

$$\alpha J_1(\alpha) (J_0(\alpha))^{-1} = \left(\ln \frac{R}{\delta} \right)^{-1}.$$

Поскольку первый положительный корень этого уравнения был обозначен σ , то если выбрать $\alpha < \sigma$, то будет выполнено неравенство

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{|x|=\delta+0} < \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{|x|=\delta-0}.$$

Кроме того,

$$\Delta v + C(x)v \leq 0 \quad \text{при } |x| \geq \delta,$$

а при $|x| < \delta$ для α , достаточно близких к σ , справедливо неравенство

$$\Delta v + C(x)v = -\alpha^2 \delta^{-2} v + C(x)v \leq 0.$$

Утверждение теоремы вытекает, таким образом, из леммы 2.

ТЕОРЕМА 6. Для любой постоянной M такой, что $M > \sigma^2 \delta^{-2}$ при $|x| < \delta$, где σ – наименьший положительный корень уравнения (4.4), найдется область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и такой коэффициент $C(x)$, что

$$\begin{aligned} C(x) &\leq 0 & \text{при } |x| \geq \delta, \\ C(x) &< M, \quad M > \sigma^2 \delta^{-2} & \text{при } |x| < \delta, \end{aligned}$$

при которых у задачи (4.1), (1.2) существует нетривиальное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ω – это шар радиуса R , а $C(x) \equiv 0$ при $|x| > \delta$. Так же, как и при доказательстве теоремы 5, в области Ω определим функцию

$$\begin{aligned} v(x) &= \ln \frac{R}{|x|} \left(\ln \frac{R}{\delta} \right)^{-1} && \text{при } |x| \geq \delta, \\ v(x) &= J_0(\alpha \delta^{-1}|x|)(J_0(\alpha))^{-1} && \text{при } |x| \leq \delta, \end{aligned}$$

но выберем постоянную $\alpha > \sigma$.

Тогда будет выполнено неравенство

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta+0} > \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{|x|=\delta-0}.$$

Кроме того, $v(x) \in C^2(\Omega, |x| \neq \delta) \cap C(\bar{\Omega})$, $v(x) > 0$ при $|x| \neq R$ и $v|_{x \in \partial\Omega} = 0$.

Тогда согласно лемме 3 существует функция $V(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющая условиям (2.5). Если обозначить $C(x) = -(\Delta V)/V$, то функция $V(x)$ удовлетворяет уравнению $\Delta V + C(x)V = 0$.

При этом $C(x) = 0$ при $|x| > \delta$,

$$C(x) = \frac{-\Delta V}{V} < \frac{-\Delta v}{v} = \alpha^2 \delta^{-2} \quad \text{при } |x| \leq \delta.$$

Таким образом, построены коэффициент $C(x)$ и нетривиальное решение однородной задачи, что и завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989.
- [2] А. М. Ильин, “Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 2. Область с малым отверстием”, *Матем. сб.*, **103:2** (1977), 265–284.
- [3] Д. О. Дегтярёв, С. В. Репьевский, “Фредгольмовость краевой задачи для дифференциального уравнения специального вида”, *Вестн. Челябинск. гос. ун-та. Сер. Матем. Мех.*, **23:12** (2010), 5–11.

А. М. Ильин

Челябинский государственный университет

E-mail: iam@csu.ru

Поступило

07.12.2010

С. В. Репьевский

Челябинский государственный университет

E-mail: repyevsky@gmail.com