Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Гришин, С. В. Макаренко, Об одной теореме Юлмухаметова, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 859–862

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm904>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 13:29:28

УДК 514.174+517.574

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЮЛМУХАМЕТОВА

А. Ф. Гришин, С. В. Макаренко

Дается новый вариант и измененное доказательство теоремы Р. С. Юлмухаметова о разбиении меры.

Библиография: 1 название.

Одной из важных теорем в теории функций является находящая многочисленные применения теорема [1] о приближении субгармонической функции логарифмом модуля целой функции. В частности, она утверждает, что субгармоническую функцию конечного порядка можно приблизить логарифмом модуля целой функции с точностью до $M \ln |z|$ вне множества кругов с конечной суммой радиусов. Основой для доказательства, как отмечает Р. С. Юлмухаметов, является теорема о разбиении мер. Мы приводим здесь вариант теоремы Юлмухаметова о разбиении мер.

ТЕОРЕМА 1. Пусть μ – финитная мера в $\mathbb{R}^2$, $\mu(\mathbb{R}^2) = n \in \mathbb{N}$, и пусть мера не нагружает прямые, параллельные координатным осям. Тогда существуют две последовательности прямоугольников P_k, Q_k , $k = 1, \dots, n$, обладающие свойствами:

- 1) стороны прямоугольников параллельны координатным осям;
- 2) $P_k \subset Q_k$;
- 3) $P_{k_1} \cap P_{k_2} = \emptyset$, если $k_1 \neq k_2$;
- 4) $\mu(P_k) = 1$;
- 5) если a_k и b_k – стороны прямоугольника Q_k , то $1/3 \leq b_k/a_k \leq 3$;
- 6) любая точка плоскости покрывается не более чем тремя Q_k .

В нашей статье прямоугольник $P = \{(x, y) : \alpha \leq x < \beta, \gamma \leq y < \delta\}$, а его стороны $a = \beta - \alpha$, $b = \delta - \gamma$. В дальнейшем это не будет отмечаться.

Наше доказательство есть упрощенный вариант доказательства Юлмухаметова, к тому же в 6) у нас стоит число 3, а в соответствующей теореме Юлмухаметова стоит 4. Однако, в то время как доказательство Юлмухаметова распространяется на высшие размерности, наше доказательство в существенном двумерно. Отметим к тому же, что в доказательстве теоремы о приближении величина констант в 5) и 6) не имеет существенного значения. От них зависит только величина M в теореме о приближении. Наше исследование оправдывается тем, что доказываемая теорема есть интересный результат из комбинаторной геометрии плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Обозначим через Y_u класс прямоугольников P в плоскости с кратностью (т.е. каждой точке плоскости присваивается некоторая кратность $t = 1, 2, \dots$), обладающих свойствами:

- 1) стороны прямоугольников параллельны координатным осям;
- 2) в прямоугольнике P определена мера μ , причем $\mu(P) \in \mathbb{N}$ (при вычислении $\mu(P)$ кратность точек не учитывается), мера μ не нагружает прямых, параллельных координатным осям;
- 3) если a и b – стороны прямоугольника P , то $1/3 \leq b/a \leq 3$.

Прямоугольник называется *вертикальным*, если $a \leq b$, и *горизонтальным*, если $b \leq a$. *Элементарными* прямоугольниками класса Y_u называются прямоугольники следующего вида:

- 1) прямоугольник из класса Y_u , каждой точке которого приписана кратность 1;
- 2) прямоугольник $P \in Y_u$ горизонтальный и имеет форму, как на рис. 1, причем либо $\mu(F_1) = 0$ и точкам F_1 приписана кратность 2, а точкам F_2 – кратность 1, либо $\mu(F_2) = 0$ и точкам F_2 приписана кратность 2, а точкам F_1 – кратность 1;
- 3) аналогичный вертикальный прямоугольник.

Рис. 1

Элементарные операции над прямоугольниками состоят в разбиении прямоугольника на части, определении меры на каждой из частей, изменении кратности некоторых точек и отбрасывании некоторой части нулевой меры. Сейчас мы точно опишем все элементарные операции.

1) *Замена прямоугольника на меньший.* Пусть $P \in Y_u$, $P_1 \subset P$, $1/3 \leq b_1/a_1 \leq 3$, $\mu(P) = \mu(P_1)$. Операция состоит в замене P на P_1 , причем кратность точек не меняется, а мера μ_1 есть ограничение μ на прямоугольник P_1 , т.е. мы просто отбрасываем некоторую часть P нулевой меры μ .

2) *Разбиение горизонтального прямоугольника.* Пусть $P = ABCD$ – горизонтальный прямоугольник из класса Y_u , $\mu(P) \geq 2$, A_2D_2 – средняя линия прямоугольника P . Предположим вначале, что выполняется хотя бы одно из неравенств $\mu(AA_2D_2D) < 1$, $\mu(A_2BCD_2) < 1$. Пусть, например, $\mu(AA_2D_2D) < 1$. Тогда выбираем A_3 таким образом, чтобы $\mu(AA_3D_3D) = 1$. Определяем $P_1 = AA_3D_3D$. Если $A_3BCD_3 \in Y_u$, то $P_2 = A_3BCD_3$, в противном случае $P_2 = A'_3BCD'_3$, где A'_3 выбирается так, что $A'_3B = \frac{1}{3}AD$. Меру μ_1 определяем как ограничение μ на P_1 , а μ_2 – как ограничение μ на A_3BCD_3 . Кратности точек множества $P_1 \cap P_2$ увеличиваются на единицу, кратности остальных точек не меняются. Элементарная операция состоит в разбиении P

на P_1 и P_2 . Пусть $\mu(AA_2D_2D)$ — натуральное число. В этом случае $P_1 = AA_2D_2D$, $P_2 = A_2BCD_2$, μ_1 есть ограничение μ на P_1 , μ_2 — на P_2 . Кратности точек не изменяются. Элементарная операция состоит в разбиении P на P_1 и P_2 . Пусть теперь $\mu(AA_2D_2D) > 1$, $\mu(A_2BCD_2) > 1$, причем $\mu(AA_2D_2D)$ не есть целое число. В этом случае определяем точки A_1 и A_3 из условий: $\mu(A_1A_2D_2D_1) = \{\mu(AA_2D_2D)\}$, $\mu(A_2A_3D_3D_2) = \{\mu(A_2BCD_2)\}$, где $\{x\}$ означает дробную часть числа x . Таким образом, $\mu(A_1A_3D_3D_1) = 1$. Предположим вначале, что выполняется хотя бы одно из неравенств $A_1A_2 < \frac{1}{6}AD$, $A_2A_3 < \frac{1}{6}AD$. Пусть, например, $A_2A_3 < \frac{1}{6}AD$. В этом случае полагаем $P_1 = AA_3D_3D$, $P_2 = A_3BCD_3$, μ_1 есть ограничение μ на P_1 , μ_2 — на P_2 . Кратности точек не меняются. Операция состоит в разбиении P на P_1 и P_2 . Пусть теперь выполняются неравенства $A_1A_2 \geq \frac{1}{6}AD$, $A_2A_3 \geq \frac{1}{6}AD$. Если $AA_1D_1D \in Yu$, то $P_1 = AA_1D_1D$, в противном случае $P_1 = AA'_1D'_1D$, где A'_1 выбирается так, что $AA'_1 = \frac{1}{3}AD$. Далее определяем $P_2 = A_1A_3D_3D_1$. Если $A_3BCD_3 \in Yu$, то $P_3 = A_3BCD_3$, в противном случае $P_3 = A'_3BCD'_3$, где $A'_3B = \frac{1}{3}AD$. Меры μ_1, μ_2, μ_3 определяем как ограничение меры μ на прямоугольники AA_1D_1D , $A_1A_3D_3D_1$, A_3BCD_3 . Для точек множеств $P_1 \cap P_2$, $P_2 \cap P_3$ кратность увеличивается на единицу, для остальных точек кратность не меняется. Элементарная операция в этом случае состоит в разбиении прямоугольника P на три части P_1, P_2, P_3 . Таким образом, мы определили элементарную операцию для любого горизонтального прямоугольника $P \in Yu$ такого, что $\mu(P_2) \geq 2$.

Рис. 2

3) Аналогично определяется операция разбиения вертикального прямоугольника.

Очевидно, что прямоугольники, получающиеся в результате элементарных операций, принадлежат классу Yu . Очевидно также, что за конечное число шагов мы можем прийти к системе P_k, μ_k , где μ_k — ограничение меры μ на некоторую часть P_k такое, что $P_k \in Yu$, $\mu_k(P_k) = 1$, и существуют прямоугольники $\tilde{P}_k \subset P_k$ такие, что $\tilde{P}_{k_1} \cap \tilde{P}_{k_2} = \emptyset$, если $k_1 \neq k_2$, $\mu_k(P_k) = \mu_k(\tilde{P}_k)$. Теорема теперь будет следовать из следующего утверждения.

Пусть P — элементарный прямоугольник класса Yu . Тогда за конечное число шагов мы можем прийти к системе P_k, μ_k с указанными свойствами, так что никакая точка плоскости не получит кратность большую чем 3. Доказательство утверждения будем вести индукцией по числу $n = \mu(P)$. Утверждение очевидно, если $n = 1$. Предположим, что утверждение справедливо для всех элементарных прямоугольников с $n \leq t$. Пусть теперь P — элементарный прямоугольник с $n = t + 1$. Покажем, что для этого прямоугольника утверждение также справедливо. Это прямо следует из определения элемен-