Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Б. Мухатов, Подалгебры и идеалы Хопфа некоторых полупростых алгебр Хопфа, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 6, 904–911

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9040>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:15:10

Подалгебры и идеалы Хопфа некоторых полупростых алгебр Хопфа

Р. Б. Мухатов

В статье описаны все идеалы Хопфа и найдены некоторые серии подалгебр Хопфа в полупростых алгебрах Хопфа, имеющих только одно неоднмерное неприводимое представление, при ограничении на количество групповых элементов в дуальной алгебре Хопфа. Кроме того, описаны факторалгебры Хопфа этих полупростых алгебр Хопфа.

Библиография: 4 названия.

1. Описание исследуемых алгебр Хопфа. Исследуются конечномерные полупростые алгебры Хопфа H над алгебраически замкнутым полем k такие, что $\text{char } k$ и $\dim H$ взаимно просты, причем H как алгебра имеет только одно неприводимое представление размерности $n > 1$. Обозначим через G группу групповых элементов дуальной алгебры Хопфа H^* . Тогда алгебра H имеет полупростое разложение

$$H = \bigoplus_{g \in G} k e_g \oplus \text{Mat}(n, k) E, \quad (1)$$

где $\{e_g, g \in G, E\}$ – система центральных ортогональных идемпотентов в H . В работе [1] показано, что в случае, когда $|G| = n^2$, алгебра H принадлежит одной из двух серий.

ТЕОРЕМА 1 [1; теорема 5.1]. Пусть H – алгебра вида (1), $G = G(H^*)$ и $|G| = n^2$. Рассмотрим матрицы U и V из $\text{GL}(n, k)$ такие, что $V = (1/n)U^{-1}$ и

$$\text{либо } U = E, \quad V = \frac{1}{n} E, \quad \text{либо } U = S, \quad V = -\frac{1}{n} S,$$

где

$$S = \begin{pmatrix} T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда в обоих случаях коумножение Δ , коединица ε и антипод S задаются следующим образом:

$$\Delta(e_g) = \sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g} + \Delta_g, \quad \Delta_g \in \text{Mat}(n, k) \otimes \text{Mat}(n, k);$$

$$\Delta(x) = \sum_{g \in G} [(g \rightharpoonup x) \otimes e_g + e_g \otimes (x \leftharpoonup g)], \quad x \in \text{Mat}(n, k);$$

$$\varepsilon(e_g) = \delta_{g,1}, \quad \varepsilon(x) = 0, \quad x \in \text{Mat}(n, k);$$

$$S(e_g) = e_{g^{-1}}, \quad g \in G, \quad S(y) = nU^t y V = U^t y U^{-1}, \quad y \in \text{Mat}(n, k),$$

где

$$\Delta_g = \sum_{i,j,p,q} (E_{ij} \leftharpoonup g^{-1}) \otimes u_{ip} v_{qj} E_{pq} = \sum_{i,j,p,q} E_{ij} \otimes u_{ip} v_{qj} (g^{-1} \rightharpoonup E_{pq}).$$

Более того, существует неприводимое проективное представление

$$g \mapsto A_g = (a_{ij}(g)) \in \text{GL}(n, k)$$

группы G размерности n такое, что

$$g \rightharpoonup x = A_g x A_{g^{-1}} \quad \text{и} \quad g \leftharpoonup x = B_g x B_{g^{-1}}$$

для всех $g \in G$, где $B_g = U^t A_g U^{-1}$.

В этой теореме и всюду в дальнейшем через E_{ij} обозначаем матричные единицы соответствующей размерности.

В работе [2] показывается, что дуальная алгебра H^* представляется в виде прямой суммы подпространств:

$$H^* = kG \oplus \text{Mat}(n, k),$$

где kG – групповая алгебра группы G . В случае, когда $|G| = n^2$, можно в явном виде выписать выражения для умножения $*$, единицы u^* , коумножения Δ^* , коединицы ε^* и антипода S^* в H^* .

ТЕОРЕМА 2 [2]. Дуальная к алгебре (1) алгебра Хопфа H^* как линейное пространство представляется в виде

$$H^* = kG \oplus M, \quad \text{где} \quad M = \text{Mat}(n, k).$$

Пусть $|G| = n^2$. Тогда умножение $*$, единица u^* , коумножение Δ^* , коединица ε^* и антипод S^* в H^* описываются следующим образом:

$$1) \quad g * h = gh, \quad g * X = g \rightharpoonup X, \quad X * g = X \leftharpoonup g,$$

$$X * Y = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \langle Y \leftharpoonup g^{-1}, X \rangle g = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{tr}(B_{g^{-1}} Y B_g U^t X U^{-1}) g$$

для всех $g, h \in G$, $X, Y \in M$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – невырожденная билинейная форма на M ,

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot S(B)) = \text{tr}(A \cdot U^t B U^{-1});$$

- 2) $u^*(1)$ – единичный элемент $e \in G$;
- 3) $\Delta^*(g) = g \otimes g$, $g \in G$, $\Delta^*(E_{ij}) = \sum_k E_{ik} \otimes E_{kj}$, $E_{ij} \in M$;
- 4) $\varepsilon^*(g) = 1$, $g \in G$, $\varepsilon^*(E_{ij}) = \delta_{ij}$, $E_{ij} \in M$;
- 5) $S^*(g) = g^{-1}$, $g \in G$, $S^*(X) = U^t X U^{-1}$, $X \in M$, где U – (косо)симметрическая матрица из теоремы 1.

В частности, разложение $H^* = kG \oplus \text{Mat}(n, k)$ задает на H^* структуру супералгебры.

Кроме того, согласно статьям [3] и [4] все алгебры Хопфа из теоремы 1 можно описать с точностью до изоморфизма при помощи абелевых групп симметрического типа и их неприводимых проективных представлений.

ТЕОРЕМА 3 [4]. Пусть H – алгебра Хопфа вида (1), $G = G(H^*)$ и $|G| = n^2$. Тогда в обозначениях из теоремы 1 матрица U , группа G и проективное представление A_g удовлетворяют следующим условиям:

- 1) группа G представляется в виде

$$G = K_1 \times \dots \times K_m, \quad K_i = \langle a_i \rangle_{n_i} \times \langle b_i \rangle_{n_i}, \quad n_i = p_i^{\alpha_i}, \quad (2)$$

где p_i – простые числа, $\alpha_i \in \mathbb{N}$;

- 2) матрицы A_g реализуют точное неприводимое проективное представление $\psi = \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_m$ группы G , где для всех $i = 1, \dots, m$ неприводимое проективное представление ψ_i группы K_i задается следующими соотношениями на образующих группы K_i :

$$\psi_i(a_i) = \sum_{p=1}^{n_i} E_{p+1,p}, \quad \psi_i(b_i) = \sum_{p=1}^{n_i} E_{p,p} \eta_i^{p-1}, \quad (3)$$

где η_i – первообразный корень из единицы степени n_i , а под индексом $n_i + 1$ следует понимать индекс 1;

- 3) если n нечетно, то $U = E$; если n четно, то либо $U = E$, либо $U = S$.

Обратно, по данной группе G , ее неприводимому проективному представлению A_g и матрице U из условий 1)–3) корректно определяются алгебры Хопфа при помощи отображений из теоремы 1.

Далее в статье рассматривается только случай, когда $|G| = n^2$.

2. Идеалы Хопфа в H . Из полупростого разложения (1) следует, что любой идеал Хопфа в алгебре H является прямой суммой нескольких прямых слагаемых из этого разложения.

ЛЕММА 1. Пусть J – ненулевой идеал Хопфа алгебры H вида (1). Тогда матричное слагаемое из разложения (1) $\text{Mat}(n, k)$ лежит в J .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что ненулевой идеал J равен прямой сумме одномерных компонент $J = \sum_{g \in G_0} k e_g$, где G_0 – некоторое подмножество в группе G . Тогда $e_g \in J$ для некоторого $g \in G_0$. Из определения идеала Хопфа следует, что $\Delta(e_g) \in J \otimes H + H \otimes J$.

Из теоремы 1, с одной стороны, вытекает, что $\Delta_h \neq 0$ для любого $h \in G$. С другой стороны, из формулы для $\Delta(e_g)$ получаем, что $\Delta_g = 0$, так как $\Delta_g \in \text{Mat}(n, k) \otimes \text{Mat}(n, k)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теперь опишем все идеалы Хопфа в алгебре H .

ТЕОРЕМА 4. *Подпространства вида*

$$J = \bigoplus_{g \in G \setminus N} ke_g \oplus \text{Mat}(n, k),$$

где N – произвольная подгруппа группы G , и только они являются ненулевыми идеалами Хопфа алгебры H вида (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного идеала Хопфа J построим множество

$$N = \{g \in G \mid e_g \notin J\}.$$

Тогда $1 \in N$, так как $\varepsilon(e_1) = 1$. Идеал J выдерживает действие антипода S , поэтому для любого $g \in N$ имеем $g^{-1} \in N$. Кроме того, если $g, h \in N$, то $gh \in N$.

Действительно, если $e_{gh} \in J$, то $\Delta(e_{gh})$ содержит слагаемое $e_g \otimes e_h$. Значит, либо $e_g \in J$, либо $e_h \in J$. Поэтому N является подгруппой в G .

Возьмем произвольную подгруппу N . Тогда подпространство

$$J = \bigoplus_{g \in G \setminus N} ke_g \oplus \text{Mat}(n, k)$$

будет идеалом Хопфа, так как для любого $g \in G \setminus N$ имеем

$$\Delta(e_g) = \sum_{h \in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g} + \Delta_g,$$

и для всех $h \in G$ получаем, что либо $h \in G \setminus N$, либо $h^{-1}g \in G \setminus N$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Факторалгебрами алгебры Хопфа H вида (1) являются алгебры, дуальные к групповым алгебрам, соответствующим всевозможным подгруппам N группы G , и только они.*

$$H/J = \bigoplus_{g \in N} ke_g \cong (kN)^*.$$

3. Подалгебры Хопфа в H . Задача описания всех подалгебр Хопфа в H несколько сложнее. В силу соображений дуальности эта задача эквивалентна задаче описания всех идеалов Хопфа J в дуальной алгебре H^* . А именно каждому идеалу Хопфа J в H^* соответствует ровно одна подалгебра Хопфа $J^\perp$, ортогональная к J по отношению к естественной билинейной форме. В настоящей работе найдены некоторые серии идеалов Хопфа J в H^* .

Докажем сначала две общие теоремы.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть H – алгебра Хопфа, H_1 – ее подалгебра Хопфа, H_2 – подпространство в H , такое, что $H = H_1 + H_2$. Предположим, что порядок антипода S алгебры H равен 2. Пусть J_1 – идеал Хопфа в H_1 , $J_2 = J_1 * H_2$, $J = J_1 + J_2$. Здесь $*$ обозначает умножение в алгебре H . Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) J – идеал Хопфа в H ;
- 2) $J_1 * H = H * J_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $J = J_1 * H$, поскольку $J_1 * H_1 \subseteq J_1$, $J_1 * H_2 = J_2$ и $J_1 \subseteq J_1 * H$, $J_2 \subseteq J_1 * H$.

Пусть

$$J = J_1 * H = H * J_1.$$

Тогда подпространство J выдерживает умножение на все элементы алгебры H :

$$J * H = J_1 * H * H \subseteq J_1 * H = J.$$

Аналогично, $H * J \subseteq J$.

Далее, пусть $x_1 \in J_1$, $x_2 \in J_2$. По условию, $\varepsilon(x_1) = 0$. Элемент $x_2 = \sum_i z_i * y_i$ для некоторых $z_i \in J_1$, $y_i \in H_2$. Поэтому $\varepsilon(x_2) = \sum_i \varepsilon(z_i) \varepsilon(y_i) = 0$. Кроме того, подпространство J выдерживает действие антипода. По условию,

$$S(x_1) \in J_1 \quad \text{и} \quad S(x_2) = \sum_i S(z_i * y_i) = \sum_i S(y_i) * S(z_i) \in J.$$

Второе включение выполнено, поскольку антипод алгебры Хопфа является ее анти-автоморфизмом. И наконец, для J выполнено условие на коумножение, а именно,

$$\begin{aligned} \Delta(x_1) &\in J_1 \otimes H_1 + H_1 \otimes J_1, \\ \Delta(x_2) &= \sum_i \Delta(z_i * y_i) = \sum_i \sum_j z_{i(1)} * y_{i(1)} \otimes z_{i(2)} * y_{i(2)} \\ &\in (J_1 * H) \otimes (H_1 * H) + (H_1 * H) \otimes (J_1 * H) \subseteq J \otimes H + H \otimes J. \end{aligned}$$

Таким образом, J является идеалом Хопфа в H .

Обратно, пусть $J = J_1 * H$ – идеал Хопфа в H . Тогда, поскольку $S^2 = \text{id}$, имеем

$$J_1 * H = S(J_1 * H) = S(H) * S(J_1) = H * J_1,$$

что и требовалось.

Уточним эту теорему в частном случае.

ТЕОРЕМА 6. Пусть H – алгебра Хопфа, H_1 – ее подалгебра Хопфа, H_2 – подпространство в H такое, что $H = H_1 \oplus H_2$. Предположим, что порядок антипода S алгебры H равен 2. Пусть J_1 – идеал Хопфа в H_1 , $J_2 = J_1 * H_2$, $J = J_1 + J_2$. Кроме того, пусть

$$J_1 * H_2 \subseteq H_2, \quad H_2 * J_1 \subseteq H_2 \quad \text{и} \quad S(H_2) = H_2.$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) J – идеал Хопфа в H ;
- 2) $J_1 * H = H * J_1$;
- 3) $J_1 * H_2 = H_2 * J_1$;
- 4) $S(H_2 * J_1) = H_2 * J_1$;
- 5) $S(J_1 * H_2) = J_1 * H_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) $\Leftrightarrow$ 3). Заметим, что

$$J_1 * (H_1 \oplus H_2) = J_1 \oplus (J_1 * H_2).$$

В правой части этого равенства сумма прямая, поскольку $J_1 * H_1 \subseteq H_1$ и $J_1 * H_2 \subseteq H_2$. Аналогично,

$$(H_1 \oplus H_2) * J_1 = J_1 \oplus (H_2 * J_1).$$

Поэтому равенство 2) имеет место тогда и только тогда, когда имеет место равенство 3).

3) $\Leftrightarrow$ 4). Заметим, что

$$S(H_2 * J_1) = S(J_1) * S(H_2) = J_1 * H_2,$$

откуда вытекает требуемое. Теорема доказана.

Теперь вернемся к частному случаю, когда алгебра H имеет разложение (1), и рассмотрим дуальную к ней алгебру H^* , которая удовлетворяет условиям теоремы 6, где $H_1 = kG$, $H_2 = \text{Mat}(n, k)$ и J_1 – любой идеал Хопфа в kG . Опишем одну серию идеалов Хопфа в kG .

ЛЕММА 2. *Для любой нормальной подгруппы N группы G подпространство*

$$\tilde{J}_N = \langle g - h \mid g^{-1}h \in N \rangle$$

является идеалом Хопфа в kG .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подпространство $\tilde{J}_N$ выдерживает умножение на любой элемент алгебры, поскольку если $g^{-1}h \in N$, то для любого $f \in G$ получаем

$$(gf)^{-1}hf = f^{-1}g^{-1}hf \in N \quad \text{и} \quad (fg)^{-1}fh = g^{-1}f^{-1}fh = g^{-1}h \in N.$$

Кроме того, подпространство $\tilde{J}_N$ выдерживает действие антипода, $\varepsilon(\tilde{J}_N) = 0$ и

$$\Delta(g - h) = g \otimes g - h \otimes h = (g - h) \otimes g + h \otimes (g - h).$$

Лемма доказана.

Комбинируя теорему 6 с леммой 2 и учитывая, что группа G в рассматриваемом случае абелева, получаем серию идеалов Хопфа в алгебре H^* .

ТЕОРЕМА 7. *Пусть $H^* = kG \oplus \text{Mat}(n, k)$ – алгебра Хопфа из теоремы 2, N – произвольная подгруппа группы G с образующими $g_1, \dots, g_t$, $\tilde{J}_N = \langle g - h \mid g^{-1}h \in N \rangle$ – соответствующий идеал Хопфа в kG , $J_N = \tilde{J}_N * H^*$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) J_N – идеал Хопфа в H^* ;
- 2) $\tilde{J}_N * H^* = H^* * \tilde{J}_N$;
- 3) $\tilde{J}_N * \text{Mat}(n, k) = \text{Mat}(n, k) * \tilde{J}_N$;
- 4) $S(\text{Mat}(n, k) * \tilde{J}_N) = \text{Mat}(n, k) * \tilde{J}_N$;
- 5) $S(\tilde{J}_N * \text{Mat}(n, k)) = \tilde{J}_N * \text{Mat}(n, k)$;
- 6) для любого $l = 1, \dots, t$ $S((1 - g_l) * E_{ij}) \in \tilde{J}_N * \text{Mat}(n, k)$.

Если J_{N_1}, J_{N_2} – идеалы Хопфа в H^* , построенные по подгруппам N_1, N_2 в группе G , то для $N = N_1 N_2$ подпространство J_N также является идеалом Хопфа в H^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые пять утверждений эквивалентны в силу теоремы 6. Для доказательства эквивалентности 5) $\Leftrightarrow$ 6) заметим, что подпространство $\tilde{J}_N * \text{Mat}(n, k)$ порождается элементами

$$(1 - g_l) * E_{ij}, \quad l = 1, \dots, t, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

поскольку

$$(g - h) * E_{ij} = (1 - g^{-1}h) * g * E_{ij}$$

и если

$$(1 - g) * \text{Mat}(n, k), \quad (1 - h) * \text{Mat}(n, k) \subseteq \tilde{J}_N * \text{Mat}(n, k),$$

то

$$(1 - gh) * E_{ij} = (1 - g) * h * E_{ij} + (1 - h) * E_{ij} \in \tilde{J}_N * \text{Mat}(n, k).$$

Последнее утверждение верно в силу того, что подгруппа N порождается объединением систем образующих для подгрупп N_1 и N_2 . Теорема доказана.

Таким образом, теорема 7 предоставляет метод нахождения некоторых серий идеалов Хопфа в H^* , построенных по подгруппам группы G . Заметим, что идеалами вида J_N не исчерпываются все идеалы Хопфа в алгебре H^* , так как максимальный идеал Хопфа $\text{Ker}(\varepsilon)$ содержит элемент $1 - E_{11}$, в то время как ни один из идеалов J_N его не содержит.

4. Примеры. В этой части всюду $U = E$, то есть антипод является оператором транспонирования.

ПРИМЕР 1. Пусть группа G имеет разложение (2), $N = \langle a_l \rangle$ – ее подгруппа. Тогда в соответствии с формулами (3)

$$\psi_l(a_l) = \sum_{p=1}^{n_l} E_{p+1,p}, \quad \psi_l^{-1}(a_l) = \sum_{p=1}^{n_l} E_{p,p+1}.$$

Далее,

$$a_l * E_{ij} = \psi(a_l) E_{ij} \psi^{-1}(a_l) = E_{\sigma_l(i), \sigma_l(j)},$$

где σ_l – произведение n/n_l циклических подстановок длины n_l . Поэтому $(1 - a_l) * E_{ij} = E_{ij} - E_{\sigma_l(i), \sigma_l(j)}$, и

$$S((1 - a_l) * E_{ij}) = (1 - a_l) * E_{ji}.$$

По теореме 7 подпространство J_N является идеалом Хопфа в H^* .

ПРИМЕР 2. Пусть теперь $N = \langle b_l \rangle$. Тогда в соответствии с формулами (3)

$$\psi_l(b_l) = \sum_{p=1}^{n_l} E_{p,p} \eta_i^{p-1}, \quad \psi_l^{-1}(b_l) = \sum_{p=1}^{n_l} E_{p,p} \eta_l^{1-p},$$

где η_l – некоторый первообразный корень из единицы степени n_i . Далее,

$$a_l * E_{ij} = \psi(b_l) E_{ij} \psi^{-1}(b_l) = \eta_{ij}(l) E_{ij},$$

где $\eta_{ij}(l)$ – некоторые степени первообразного корня η_l , удовлетворяющие условию $\eta_{ij}(l) = \eta_{ji}^{-1}(l)$. Поэтому $(1 - b_l) * E_{ij} = E_{ij} - \eta_{ij}(l)E_{ij}$, и

$$S((1 - b_l) * E_{ij}) \in \tilde{J}_N * \text{Mat}(n, k).$$

По теореме 7 подпространство J_N является идеалом Хопфа в H^* .

ПРИМЕР 3. Взяв по теореме 7 произвольное прямое произведение подгрупп из примеров 1 и 2

$$N = \bigtimes_{i=1}^s \langle a_{q_i} \rangle \times \bigtimes_{j=1}^t \langle b_{r_j} \rangle,$$

получим, что подпространство J_N является идеалом Хопфа в H^* .

ПРИМЕР 4. Пусть $G = \langle a \rangle_3 \times \langle b \rangle_3$. Покажем, что для подгруппы $N = \langle ab \rangle_3$ подпространство J_N не будет идеалом Хопфа в H^* . Согласно формулам (3)

$$\psi(a) = E_{21} + E_{32} + E_{13}, \quad \psi(b) = E_{11} + \eta E_{22} + \eta^2 E_{33},$$

где η – первообразный корень из единицы степени 3. Значит,

$$(1 - ab) * E_{ij} = E_{ij} - \eta^{i-j} E_{\sigma(i), \sigma(j)},$$

где $\sigma = (1\ 2\ 3)$, и

$$S((1 - ab) * E_{21}) = E_{12} - \eta E_{23} \notin \tilde{J}_N * \text{Mat}(n, k),$$

так как $(1 - ab) * E_{12} = E_{12} - \eta^{-1} E_{23}$, что и требовалось.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Артамонов, “О полупростых конечномерных алгебрах Хопфа”, *Матем. сб.*, **198:9** (2007), 3–28.
- [2] V. A. Artamonov, I. A. Chubarov, “Dual algebras of some semisimple finite-dimensional Hopf algebras”, *Modules and Comodules*, Trends Math., Birkhäuser-Verlag, Basel, 2008, 65–85.
- [3] V. A. Artamonov, I. A. Chubarov, “Properties of some semisimple Hopf algebras”, *Algebras, Representations and Applications*, Contemp. Math., **483**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, 23–36.
- [4] Р. Б. Мухатов, “О полупростых конечномерных алгебрах Хопфа”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2011, № 1, 60–63.

Р. Б. Мухатов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ruslan.mukhatov@gmail.com

Поступило

03.10.2010

Исправленный вариант

24.08.2011