Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Хаджи, Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 908–919

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9041>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:29:45

Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе

И. А. Хаджи

Для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} - b^2 u = f(x)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β, b – заданные положительные числа, изучена задача с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \\ u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad u_y(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Установлен критерий единственности решения, которое построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей задачи на собственные значения. Доказана устойчивость решения.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Рассмотрим уравнение смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} - b^2 u = f(x) \quad (1.1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где α, β, b – заданные положительные числа, и следующую краевую задачу.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. Найти в области D функции $u(x, y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \quad (1.2)$$

$$f(x) \in C(0, 1) \cap L[0, 1], \quad (1.3)$$

$$Lu(x, y) \equiv f(x), \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-, \quad (1.4)$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \quad (1.5)$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.6)$$

$$u_y(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.7)$$

где φ, ψ и g – заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\psi(0) = \psi(1) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad D_+ = D \cap \{y > 0\}, \quad D_- = D \cap \{y < 0\}.$$

Обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучены многими авторами [1]–[5]. В работах [6]–[9] начато изучение обратных краевых задач для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа. Обратная задача (1.2)–(1.7) при $b = 0$ изучена в работе [10]. В работах [9], [10] применялся метод сведения обратной задачи к прямой. Здесь в отличие от этих работ предлагается другой подход, что позволило получить теорему существования при более слабых условиях относительно граничных функций. В данной работе при всех $b > 0$ установлены необходимые и достаточные условия единственности решения обратной задачи (1.2)–(1.7) и решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Доказана устойчивость решения по граничным данным по нормам пространств W_2^n и $C(\overline{D}_\pm)$.

Отметим также, что в работах, посвященных уравнениям смешанного типа [11], единственность решения краевых задач доказывается методом экстремума или методом интегральных тождеств. Здесь применяется другой подход, основанный на свойстве полноты построенной системы собственных функций. Ранее такой подход применялся в работах [12], [13] при изучении смешанной задачи для гиперболических уравнений второго порядка.

2. Единственность решения обратной задачи. Пусть $u(x, y)$ и $f(x)$ – решение задачи (1.2)–(1.7). Рассмотрим функции

$$u_k(y) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \sin \pi k x \, dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

На основании (2.1) введем функции

$$u_{k,\varepsilon}(y) = \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y) \sin \pi k x \, dx, \quad (2.2)$$

где ε – достаточно малое число. Дифференцируя равенство (2.2) по y под знаком интеграла два раза при $y > 0$ и $y < 0$, учитывая уравнение (1.1), получим

$$\begin{aligned} u''_{k,\varepsilon}(y) &= \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{yy}(x, y) \sin \pi k x \, dx \\ &= \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (f(x) - u_{xx}(x, y) + b^2 u(x, y)) \sin \pi k x \, dx, \quad y > 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} u''_{k,\varepsilon}(y) &= \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{yy}(x, y) \sin \pi k x \, dx \\ &= \sqrt{2} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (u_{xx}(x, y) - f(x) - b^2 u(x, y)) \sin \pi k x \, dx, \quad y < 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В интегралах из правых частей равенств (2.3) и (2.4), интегрируя по частям два раза и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ с учетом граничных условий (1.5), получим

$$u''_k(y) - \lambda_k^2 u_k(y) = f_k, \quad y > 0, \quad (2.5)$$

$$u''_k(y) + \lambda_k^2 u_k(y) = -f_k, \quad y < 0, \quad \lambda_k^2 = b^2 + (\pi k)^2, \quad (2.6)$$

$$u_k(\beta) = \varphi_k, \quad u_k(-\alpha) = \psi_k, \quad u'_k(-\alpha) = g_k, \quad (2.7)$$

где

$$f_k = \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \sin \pi k x dx, \quad (2.8)$$

$$\varphi_k = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi(x) \sin \pi k x dx, \quad \psi_k = \sqrt{2} \int_0^1 \psi(x) \sin \pi k x dx, \quad (2.9)$$

$$g_k = \sqrt{2} \int_0^1 g(x) \sin \pi k x dx. \quad (2.10)$$

Дифференциальные уравнения (2.5) и (2.6) имеют общие решения

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y} - \frac{f_k}{\lambda_k^2}, & y > 0, \\ c_k \cos \lambda_k y + d_k \sin \lambda_k y - \frac{f_k}{\lambda_k^2}, & y < 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

где a_k, b_k, c_k, d_k – произвольные постоянные.

Поскольку решение $u(x, y)$ удовлетворяет условию (1.2), то для функций (2.11) выполнены условия сопряжения:

$$u_k(0-0) = u_k(0+0), \quad u'_k(0-0) = u'_k(0+0). \quad (2.12)$$

Условия (2.12) выполняются только тогда, когда $c_k = a_k + b_k$ и $d_k = a_k - b_k$. С учетом последних равенств функции (2.11) принимают вид

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y} - \frac{f_k}{\lambda_k^2}, & y > 0, \\ a_k (\cos \lambda_k y + \sin \lambda_k y) + b_k (\cos \lambda_k y - \sin \lambda_k y) - \frac{f_k}{\lambda_k^2}, & y < 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Теперь, подставляя функции (2.13) в условия (2.7), получим систему относительно неизвестных a_k, b_k и f_k :

$$\begin{cases} a_k e^{\lambda_k \beta} + b_k e^{-\lambda_k \beta} - \frac{f_k}{\lambda_k^2} = \varphi_k, \\ (\cos \lambda_k \alpha - \sin \lambda_k \alpha) a_k + (\cos \lambda_k \alpha + \sin \lambda_k \alpha) b_k - \frac{f_k}{\lambda_k^2} = \psi_k, \\ (\cos \lambda_k \alpha + \sin \lambda_k \alpha) a_k - (\cos \lambda_k \alpha - \sin \lambda_k \alpha) b_k = \frac{g_k}{\lambda_k}. \end{cases} \quad (2.14)$$

Определитель системы (2.14) равен

$$\frac{2}{\lambda_k^2} (\sin \lambda_k \alpha \operatorname{sh} \lambda_k \beta - \cos \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k \beta + 1).$$

Если величина

$$\delta_{\alpha\beta}(k) = \sin \lambda_k \alpha \operatorname{sh} \lambda_k \beta - \cos \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k \beta + 1 \neq 0 \quad (2.15)$$

при всех $k \in \mathbb{N}$, то данная система имеет единственное решение:

$$a_k = \frac{(\varphi_k - \psi_k)(\sin \lambda_k \alpha - \cos \lambda_k \alpha) + (g_k/\lambda_k)(\sin \lambda_k \alpha + \cos \lambda_k \alpha - e^{-\lambda_k \beta})}{2\delta_{\alpha\beta}(k)}, \quad (2.16)$$

$$b_k = \frac{(\psi_k - \varphi_k)(\sin \lambda_k \alpha + \cos \lambda_k \alpha) + (g_k/\lambda_k)(\sin \lambda_k \alpha - \cos \lambda_k \alpha + e^{\lambda_k \beta})}{2\delta_{\alpha\beta}(k)}, \quad (2.17)$$

$$f_k = \lambda_k^2 \frac{-\varphi_k - \psi_k(\delta_{\alpha\beta}(k) - 1) + (g_k/\lambda_k)(\cos \lambda_k \alpha \operatorname{sh} \lambda_k \beta + \sin \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k \beta)}{\delta_{\alpha\beta}(k)}. \quad (2.18)$$

С учетом (2.16)–(2.18) и (2.13) найдем окончательный вид функции

$$u_k(y) = \begin{cases} \varphi_k + \psi_k \frac{\cos \lambda_k \alpha (\operatorname{ch} \lambda_k y - \operatorname{ch} \lambda_k \beta) - \sin \lambda_k \alpha (\operatorname{sh} \lambda_k y - \operatorname{sh} \lambda_k \beta)}{\delta_{\alpha\beta}(k)} + \frac{g_k}{\lambda_k} \frac{\cos \lambda_k \alpha (\operatorname{sh} \lambda_k y - \operatorname{sh} \lambda_k \beta) - \sin \lambda_k \alpha (\operatorname{ch} \lambda_k y - \operatorname{ch} \lambda_k \beta)}{\delta_{\alpha\beta}(k)}, & y > 0, \\ -\varphi_k \frac{\cos \lambda_k (\alpha + y) - 1}{\delta_{\alpha\beta}(k)} + \psi_k \frac{\cos \lambda_k (\alpha + y) + \delta_{\alpha\beta}(k) - 1}{\delta_{\alpha\beta}(k)} + \frac{g_k}{\lambda_k} \frac{\sin \lambda_k (\alpha + y) + \operatorname{sh} \lambda_k \beta (\cos \lambda_k y - \cos \lambda_k \alpha) - \operatorname{ch} \lambda_k \beta (\sin \lambda_k y + \sin \lambda_k \alpha)}{\delta_{\alpha\beta}(k)}, & y < 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Теперь, исходя из формул (2.18) и (2.19), нетрудно доказать единственность решения задачи (1.2)–(1.7). Пусть $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$ и при всех k выполнено условие (2.15). Тогда все $\varphi_k = \psi_k = g_k \equiv 0$ и из формул (2.18) и (2.19) $u_k(y) \equiv 0$ на $[-\alpha, \beta]$ и $f_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Из (2.1) и (2.8) имеем

$$\sqrt{2} \int_0^1 u(x, y) \sin \pi k x \, dx = 0, \quad \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \sin \pi k x \, dx = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы синусов $\{\sqrt{2} \sin \pi k x\}$ в пространстве $L_2[0, 1]$ следует, что $u(x, y) = 0$ и $f(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$ при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку $u(x, y) \in C(\bar{D})$ и $f(x) \in C(0, 1)$, то $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{D}$ и $f(x) \equiv 0$ на $(0, 1)$.

Пусть при некоторых α, β и $k = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие (2.15), т.е. $\delta_{\alpha\beta}(p) = 0$. Тогда однородная задача (1.2)–(1.7) (где $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$) при произвольном $f_p \neq 0$ имеет ненулевое решение

$$u_p(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{f_p}{\lambda_p^2} (\cos \lambda_p \alpha \operatorname{ch} \lambda_p y - \sin \lambda_p \alpha \operatorname{sh} \lambda_p y - 1) \right) \sin \lambda_p x, & y > 0, \\ \left(\frac{f_p}{\lambda_p^2} (\cos \lambda_p (\alpha + y) - 1) \right) \sin \lambda_p x, & y < 0, \end{cases}$$

$$f_p(x) = f_p \sin \lambda_p x.$$

Естественно возникает вопрос об обращении в нуль выражения $\delta_{\alpha\beta}(k)$. Представим $\delta_{\alpha\beta}(k)$ в следующем виде:

$$\delta_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{\operatorname{ch} 2\lambda_k \beta} \sin(\lambda_k \alpha - \gamma_k) + 1, \quad (2.20)$$

где

$$\gamma_k = \arcsin \frac{\operatorname{ch} \lambda_k \beta}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\lambda_k \beta}} \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad \text{при} \quad k \rightarrow +\infty.$$

Из представления (2.20) видно, что выражение $\delta_{\alpha\beta}(k) = 0$ только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{\gamma_k}{\lambda_k} - \frac{(-1)^n}{\lambda_k} \arcsin \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\lambda_k \beta}} + \frac{\pi n}{\lambda_k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Если существует решение $u(x, y)$ и $f(x)$ задачи (1.2)–(1.7), то оно единственно только тогда, когда выполнено условие (2.15) при всех $k \in \mathbb{N}$.*

3. Обоснование существования решения. Поскольку $\delta_{\alpha\beta}(k)$ является знаменателем дробей (2.16)–(2.18), то для обоснования существования решения задачи (1.2)–(1.7) необходимо показать существование чисел b , α и β таких, что при достаточно больших k выражение $\delta_{\alpha\beta}(k)$ отделено от нуля.

ЛЕММА 1. *Если выполнено одно из следующих условий:*

- 1) $\alpha = p - \text{натуральное}$;
- 2) $\alpha = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $(q, 4) = 1$,

то существует постоянная $C_0 > 0$, вообще говоря, зависящая от α , такая, что при больших k и любых $\beta > 0$ справедлива оценка

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| \geq C_0 e^{\pi k \beta} > 0. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При больших k

$$0 < \lambda_k - \pi k = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + (\pi k)^2} + \pi k} < \frac{b^2}{2\pi k}. \quad (3.2)$$

Пусть $\tilde{\delta}_{\alpha\beta}(k) = \delta_{\alpha\beta}(k)|_{b=0}$, и рассмотрим следующую разность:

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta}(k) - \tilde{\delta}_{\alpha\beta}(k) &= \frac{1}{2}(e^{\lambda_k \beta} - e^{\pi k \beta})(\sin \lambda_k \alpha - \cos \lambda_k \alpha) \\ &\quad + \frac{1}{2}e^{\pi k \beta}(\sin \lambda_k \alpha - \cos \lambda_k \alpha + \cos \pi k \alpha - \sin \pi k \alpha) \\ &\quad - \frac{1}{2}e^{-\lambda_k \beta}(\sin \lambda_k \alpha + \cos \lambda_k \alpha) + \frac{1}{2}e^{-\pi k \beta}(\sin \pi k \alpha + \cos \pi k \alpha). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом оценок $0 \leq e^x - 1 \leq 2x$ при $0 \leq x < 1$, $|\sin x| \leq |x|$ и (3.2) имеем

$$\begin{aligned} |\delta_{\alpha\beta}(k) - \tilde{\delta}_{\alpha\beta}(k)| &\leq \frac{e^{\lambda_k \beta} - e^{\pi k \beta}}{2} |\sin \lambda_k \alpha - \cos \lambda_k \alpha| \\ &\quad + \frac{1}{2}e^{\pi k \beta} (|\sin \lambda_k \alpha - \sin \pi k \alpha| + |\cos \lambda_k \alpha - \cos \pi k \alpha|) + O(e^{-\pi k \beta}) \\ &\leq \frac{e^{\pi k \beta}}{\sqrt{2}} \left((e^{(\lambda_k - \pi k)\beta} - 1) + 2\sqrt{2} \left| \sin \frac{(\lambda_k - \pi k)\alpha}{2} \right| \right) + O(e^{-\pi k \beta}) \\ &\leq \frac{e^{\pi k \beta}}{\sqrt{2}} ((\lambda_k - \pi k)2\beta + \sqrt{2}(\lambda_k - \pi k)\alpha) + O(e^{-\pi k \beta}) \\ &\leq e^{\pi k \beta} (\lambda_k - \pi k)(\alpha + \sqrt{2}\beta) + O(e^{-\pi k \beta}) \leq \tilde{C} \frac{e^{\pi k \beta}}{k}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Теперь в силу (3.3) нам достаточно показать справедливость оценки (3.1) для

$$\tilde{\delta}_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{\operatorname{ch} 2\pi k\beta} \sin(\pi k\alpha - \tilde{\gamma}_k) + 1, \quad (3.4)$$

где $\tilde{\gamma}_k = \gamma_k$ при $b = 0$. Пусть $\alpha = p \in \mathbb{N}$. Тогда из (3.4) имеем

$$|\tilde{\delta}_{\alpha\beta}(k)| \geq \operatorname{ch} \pi k\beta - 1 = e^{\pi k\beta} \left(\frac{1 + e^{-2\pi k\beta}}{2} - e^{-\pi k\beta} \right) > e^{\pi k\beta} \left(\frac{1}{2} - e^{-\pi k\beta} \right) > C_1 e^{\pi k\beta}$$

при $k > k_0 > (1/(\pi\beta)) \ln(2/(1 - 2C_1))$, $0 < C_1 < 1/2$, и произвольном $\beta > 0$.

Пусть теперь $\alpha = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $(q, 4) = 1$. В этом случае разделим kp на q с остатком: $kp = sq + r$, $s, r \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq r < q$. Тогда выражение (3.4) примет вид

$$\tilde{\delta}_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{\operatorname{ch} 2\pi k\beta} (-1)^s \sin\left(\frac{\pi r}{q} - \gamma_k\right) + 1. \quad (3.5)$$

Если $r = 0$, то данный случай сводится к уже рассмотренному выше $\alpha = p \in \mathbb{N}$.

Пусть $0 < r < q$, и ясно, что $1 \leq r \leq q - 1$, $q \geq 2$. Тогда из (3.5) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{\alpha\beta}(k) &= \left| \sqrt{\operatorname{ch} 2\pi k\beta} (-1)^s \sin\left(\frac{\pi r}{q} - \frac{\pi}{4} + \varepsilon_k\right) + 1 \right| \\ &\geq \frac{e^{\pi k\beta}}{\sqrt{2}} \left| \sin\left(\frac{\pi r}{q} - \frac{\pi}{4} + \varepsilon_k\right) \right| - \sqrt{2} e^{-\pi k\beta}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Поскольку $(q, 4) = 1$, то из (3.6) следует справедливость оценки (3.1) для $\tilde{\delta}_{\alpha\beta}(k)$.

ЛЕММА 2. Пусть выполнена оценка (3.1). Тогда при больших k справедливы оценки

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq \frac{C_1}{\lambda_k e^{\pi k\beta}} (\lambda_k (|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|), \\ |b_k| &\leq \frac{C_2}{\lambda_k} (\lambda_k (|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|), \\ |f_k| &\leq C_3 \lambda_k (\lambda_k (|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|), \end{aligned}$$

где C_i – здесь и далее положительные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из формул (2.16)–(2.18) и оценки (2.15), получим

$$\begin{aligned} |a_k| &= \left| \frac{(\varphi_k - \psi_k)(\sin \lambda_k \alpha - \cos \lambda_k \alpha) + (g_k/\lambda_k)(\sin \lambda_k \alpha + \cos \lambda_k \alpha - e^{-\lambda_k \beta})}{2\delta_{\alpha\beta}(k)} \right| \\ &\leq \frac{2\lambda_k (|\varphi_k| + |\psi_k|) + 3|g_k|}{2C_0 \lambda_k e^{\pi k\beta}} \leq \frac{C_1}{\lambda_k e^{\pi k\beta}} (\lambda_k (|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|), \\ |b_k| &= \left| \frac{(\psi_k - \varphi_k)(\sin \lambda_k \alpha + \cos \lambda_k \alpha) + (g_k/\lambda_k)(\sin \lambda_k \alpha - \cos \lambda_k \alpha + e^{\lambda_k \beta})}{2\delta_{\alpha\beta}(k)} \right| \\ &\leq \frac{2\lambda_k (|\varphi_k| + |\psi_k|) + 3|g_k|}{2C_0 \lambda_k} \leq \frac{C_2}{\lambda_k} (\lambda_k (|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|), \end{aligned}$$

$$|f_k| = \left| \lambda_k^2 \frac{-\varphi_k - \psi_k(\delta_{\alpha\beta}(k) - 1) + (g_k/\lambda_k)(\cos \lambda_k \alpha \operatorname{sh} \lambda_k \beta + \sin \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k \beta)}{\delta_{\alpha\beta}(k)} \right|$$

$$\leq \frac{\lambda_k^2(|\varphi_k| + C_0|\psi_k|) + \lambda_k|g_k|}{C_0} \leq C_3\lambda_k(\lambda_k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|).$$

ЛЕММА 3. Пусть имеет место оценка (3.1). Тогда при больших k справедливы оценки

$$|u_k(y)| = \begin{cases} C_4 \left(|\varphi_k| + |\psi_k| + \frac{1}{k}|g_k| \right), & y \geq 0, \\ C_7 \left(|\varphi_k| + |\psi_k| + \frac{1}{k}|g_k| \right), & y \leq 0, \end{cases}$$

$$|u'_k(y)| = \begin{cases} C_5(k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|), & y \geq 0, \\ C_8(k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|), & y \leq 0, \end{cases}$$

$$|u''_k(y)| = \begin{cases} C_6k(k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|), & y > 0, \\ C_9k(k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|), & y < 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании формулы (2.13) и леммы 2 при больших k для любого $y \in [0, \beta]$ имеем

$$|u_k(y)| \leq |a_k|e^{\lambda_k y} + |b_k| + \frac{|f_k|}{\lambda_k^2} \leq (C_1 + C_2 + C_3)(|\varphi_k| + |\psi_k|) + (C_1 + C_2 + C_3)\frac{1}{\lambda_k}|g_k|$$

$$\leq C_4 \left(|\varphi_k| + |\psi_k| + \frac{1}{k}|g_k| \right), \quad (3.7)$$

$$|u'_k(y)| \leq \lambda_k(|a_k|e^{\lambda_k y} + |b_k|) \leq (C_1 + C_2)\lambda_k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + (C_1 + C_2)|g_k|$$

$$\leq C_5(k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|), \quad (3.8)$$

$$|u''_k(y)| \leq \lambda_k^2(|a_k|e^{\lambda_k y} + |b_k|) \leq (C_1 + C_2)\lambda_k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|) + (C_1 + C_2)\lambda_k|g_k|$$

$$\leq C_6k(k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|). \quad (3.9)$$

Аналогично, исходя из формулы (2.13) при $y \in [-\alpha, 0]$ и больших k , получим

$$|u_k(y)| \leq 2(|a_k| + |b_k|) + \frac{|f_k|}{\lambda_k^2}$$

$$\leq (2C_1 + 2C_2 + C_3)(|\varphi_k| + |\psi_k|) + (2C_1 + 2C_2 + C_3)\frac{1}{\lambda_k}|g_k|$$

$$\leq C_7 \left(|\varphi_k| + |\psi_k| + \frac{1}{k}|g_k| \right), \quad (3.10)$$

$$|u'_k(y)| \leq 2\lambda_k(|a_k|e^{\lambda_k y} + |b_k|) \leq 2(C_1 + C_2)\lambda_k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + 2(C_1 + C_2)|g_k|$$

$$\leq C_8(k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|), \quad (3.11)$$

$$|u''_k(y)| \leq 2\lambda_k^2(|a_k|e^{\lambda_k y} + |b_k|) \leq 2(C_1 + C_2)\lambda_k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|) + 2(C_1 + C_2)\lambda_k|g_k|$$

$$\leq C_9k(k(|\varphi_k| + |\psi_k|) + |g_k|). \quad (3.12)$$

Из установленных оценок (3.7)–(3.12) вытекает справедливость леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть $\varphi(x) \in C^3[0, 1]$ и

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0,$$

$$\psi(x) \in C^3[0, 1] \text{ и}$$

$$\psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0,$$

$$g(x) \in C^2[0, 1] \text{ и}$$

$$g(0) = g(1) = 0.$$

Тогда справедливы следующие представления:

$$\varphi_k = -\frac{1}{\pi^3} \frac{\varphi_k^{(3)}}{k^3}, \quad \psi_k = -\frac{1}{\pi^3} \frac{\psi_k^{(3)}}{k^3}, \quad g_k = -\frac{1}{\pi^2} \frac{g_k^{(2)}}{k^2}, \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(3)} &= \sqrt{2} \int_0^1 \varphi'''(x) \cos \pi k x \, dx, & \psi_k^{(3)} &= \sqrt{2} \int_0^1 \psi'''(x) \cos \pi k x \, dx, \\ g_k^{(2)} &= \sqrt{2} \int_0^1 g''(x) \sin \pi k x \, dx, \\ \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(3)}|^2 &\leq \int_0^1 [\varphi'''(x)]^2 \, dx, & \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(3)}|^2 &\leq \int_0^1 [\psi'''(x)]^2 \, dx, \\ \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^{(2)}|^2 &\leq \int_0^1 [g''(x)]^2 \, dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям три раза в интегралах формул (2.9) и два раза в интеграле формулы (2.10), с учетом условий леммы получим представления (3.13). Справедливость оценок (3.14) следует из неравенства Бесселя по тригонометрической системе.

Если выполнены условия (2.15) и (3.1), то на основании частных решений (2.18) и (2.19) решение задачи (1.2)–(1.7) можно представить в виде суммы ряда Фурье:

$$u(x, y) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \sin \lambda_k x, \quad (3.15)$$

$$f(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \lambda_k x, \quad (3.16)$$

где функции $u_k(y)$ определены по формулам (2.19), а функции f_k – по формуле (2.18).

Формально из ряда (3.15) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_x = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(y) \cos \lambda_k x, \quad (3.17)$$

$$u_y = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(y) \sin \lambda_k x, \quad (3.18)$$

$$u_{xx} = -\sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 u_k(y) \sin \lambda_k x, \quad (3.19)$$

$$u_{yy} = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} u_k''(y) \sin \lambda_k x. \quad (3.20)$$

Ряды (3.15), (3.17)–(3.20) при любом $(x, y) \in \overline{D}$ мажорируются числовым рядом

$$C_{10} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|\varphi_k^{(3)}| + |\psi_k^{(3)}| + |g_k^{(2)}|). \quad (3.21)$$

Тогда в силу сходимости ряда (3.21) на основании признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{D}$ ряды (3.15), (3.17), (3.18), а ряды (3.19), (3.20) сходятся на соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Подставляя ряды (3.19), (3.20) и (3.16) в уравнение (1.1), убеждаемся в том, что функции $u(x, y)$ и $f(x)$, определенные рядами (3.15) и (3.16), удовлетворяют уравнению (1.1) на множестве $D_+ \cup D_-$.

Итак, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4 и выполнены условия (2.15), (3.1). Тогда существует единственное решение задачи (1.2)–(1.7), где функции $u(x, y)$ и $f(x)$ определяются соответственно рядами (3.15) и (3.16), коэффициенты которых находятся по формулам (2.13), (2.16)–(2.18).

4. Устойчивость решения. Пусть

$$\begin{aligned} \|u(x, y)\|_{L_2(0,1)} &= \|u(x, y)\|_{L_2} = \left(\int_0^1 |u(x, y)|^2 dx \right)^{1/2}, \\ \|u(x, y)\|_{C(\overline{D}_{\pm})} &= \max_{\overline{D}_{\pm}} |u(x, y)|, \\ \|f(x)\|_{W_2^n} &= \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n |f^{(k)}(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения задачи (1.2)–(1.7) имеют место оценки

$$\|u(x, y)\|_{L_2} \leq C_{11}(\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2} + \|g\|_{L_2}), \quad y > 0, \quad (4.1)$$

$$\|u(x, y)\|_{L_2} \leq C_{12}(\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2} + \|g\|_{L_2}), \quad y < 0, \quad (4.2)$$

$$\|f(x)\|_{L_2} \leq C_{13}(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^2} + \|g\|_{W_2^1}), \quad (4.3)$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\overline{D}_+)} \leq C_{14}(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1} + \|g\|_{W_2^0}), \quad y \geq 0, \quad (4.4)$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\overline{D}_-)} \leq C_{15}(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1} + \|g\|_{W_2^0}), \quad y \leq 0, \quad (4.5)$$

$$\|f(x)\|_{C[0,1]} \leq C_{16}(\|\varphi\|_{W_2^3} + \|\psi\|_{W_2^3} + \|g\|_{W_2^2}), \quad (4.6)$$

где постоянные C_i не зависят от $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку система $\{\sqrt{2} \sin k\pi x\}$ ортонормирована в $L_2[0, 1]$, то из (3.15), (2.19) и леммы 3 имеем при $y > 0$

$$\begin{aligned} \|u(x, y)\|_{L_2}^2 &\leq 2C_4^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(|\varphi_k| + |\psi_k| + \frac{1}{k} |g_k| \right)^2 \leq 6C_4^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(|\varphi_k|^2 + |\psi_k|^2 + \left| \frac{1}{k} g_k \right|^2 \right) \\ &\leq 6C_4^2 (\|\varphi\|_{L_2}^2 + \|\psi\|_{L_2}^2 + \|g\|_{L_2}^2) \leq C_{11}^2 (\|\varphi\|_{L_2}^2 + \|\psi\|_{L_2}^2 + \|g\|_{L_2}^2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Аналогично на основании формул (3.15), (2.19) и леммы 3 при $y < 0$ получим

$$\|u(x, y)\|_{L_2}^2 \leq C_{12}^2 (\|\varphi\|_{L_2}^2 + \|\psi\|_{L_2}^2 + \|g\|_{L_2}^2). \quad (4.8)$$

Из неравенств (4.7) и (4.8) вытекает справедливость оценок (4.1) и (4.2).

Используя формулу (2.18) и лемму 2, имеем

$$\|f(x)\|_{L_2}^2 \leq 2C_3^2 \sum_{k=1}^{+\infty} [|\lambda_k g_k| + |\lambda_k^2 \varphi_k| + |\lambda_k^2 \psi_k|]^2 \leq 6C_3^2 \sum_{k=1}^{+\infty} [|\lambda_k g_k|^2 + |\lambda_k^2 \varphi_k|^2 + |\lambda_k^2 \psi_k|^2]. \quad (4.9)$$

В силу условий леммы 4 коэффициенты φ_k , ψ_k и g_k можно представить в виде

$$\varphi_k = -\frac{\varphi_k^{(2)}}{\lambda_k^2}, \quad \psi_k = -\frac{\psi_k^{(2)}}{\lambda_k^2}, \quad g_k = \frac{g_k^{(1)}}{\lambda_k},$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(2)} &= \sqrt{2} \int_0^1 \varphi''(x) \sin(\pi k x) dx, \\ \psi_k^{(2)} &= \sqrt{2} \int_0^1 \psi''(x) \sin(\pi k x) dx, \quad g_k^{(1)} = \sqrt{2} \int_0^1 g'(x) \cos(\pi k x) dx. \end{aligned}$$

Тогда из оценки (4.9) имеем

$$\|f(x)\|_{L_2}^2 \leq 6C_3^2 [\|\varphi''\|_{L_2}^2 + \|\psi''\|_{L_2}^2 + \|g'\|_{L_2}^2] \leq C_{13}^2 (\|\varphi\|_{W_2^2}^2 + \|\psi\|_{W_2^2}^2 + \|g\|_{W_2^1}^2). \quad (4.10)$$

Из неравенства (4.10) вытекает справедливость оценки (4.3).

Пусть (x, y) – произвольная точка из $\overline{D}_+$. Тогда, используя формулы (3.15), (2.19), на основании леммы 3 при $y \geq 0$ будем иметь

$$|u(x, y)| \leq \sqrt{2} C_4 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(|\varphi_k| + |\psi_k| + \frac{1}{k} |g_k| \right). \quad (4.11)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{\varphi_k^{(1)}}{\lambda_k}, \quad \psi_k = \frac{\psi_k^{(1)}}{\lambda_k}, \\ \varphi_k^{(1)} &= \sqrt{2} \int_0^1 \varphi'(x) \cos(\pi k x) dx, \quad \psi_k^{(1)} = \sqrt{2} \int_0^1 \psi'(x) \cos(\pi k x) dx, \end{aligned}$$

то из (4.11) получим

$$\begin{aligned}
 |u(x, y)| &\leq \frac{\sqrt{2}C_4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} (|\varphi_k^{(1)}| + |\psi_k^{(1)}|) + \sqrt{2}C_4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} |g_k| \\
 &\leq \frac{\sqrt{2}C_4}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k^{(1)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_k^{(1)}|^2 \right)^{1/2} \right] \\
 &\quad + \sqrt{2}C_4 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} g_k^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \frac{C_4}{\sqrt{3}} (\|\varphi'\|_{L_2} + \|\psi'\|_{L_2}) + \frac{C_4\pi}{\sqrt{3}} \|g\|_{L_2} \leq C_{14} (\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1} + \|g\|_{W_2^0}).
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

При получении оценки (4.12) было использовано неравенство Коши–Буняковского и равенство $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$.

Аналогично из формул (3.15), (2.19) и леммы 3 при $(x, y) \in \overline{D}_-$ получим

$$|u(x, y)| \leq C_{15} (\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1} + \|g\|_{W_2^0}). \tag{4.13}$$

Оценки (4.4) и (4.5) непосредственно следуют из полученных неравенств (4.12) и (4.13).

На основании формулы (2.18) в силу леммы 3 и 4 получим

$$\begin{aligned}
 |f(x)| &\leq \frac{\sqrt{2}C_3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|\varphi_k^{(3)}| + |\psi_k^{(3)}| + |g_k^{(2)}|) \\
 &\leq \frac{\sqrt{2}C_3}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(3)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(3)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k^{(2)}|^2 \right)^{1/2} \right] \\
 &\leq \frac{C_3}{\sqrt{3}} (\|\varphi'''\|_{L_2} + \|\psi'''\|_{L_2} + \|g''\|_{L_2}) \leq C_{16} (\|\varphi\|_{W_2^3} + \|\psi\|_{W_2^3} + \|g\|_{W_2^2}).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Из неравенства (4.14) следует справедливость оценки (4.6).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Тихонов, “Об устойчивости обратных задач”, *ДАН*, **39:5** (1943), 195–198.
- [2] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. Т. Шипатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Наука, М., 1980.
- [3] В. Г. Романов, *Некоторые обратные задачи для уравнения гиперболического типа*, Наука, Новосибирск, 1972.
- [4] В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танан, *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*, Наука, М., 1978.
- [5] А. М. Денисов, *Введение в теорию обратных задач*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1994.
- [6] К. Б. Сабитов, “Критерий единственности решения краевой задачи для уравнения смешанно-составного типа”, *Труды международной научной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы”*, посвященной юбилею академика В. А. Ильина, Т. 2, Гилем, Уфа, 2008, 154–161.

- [7] К. Б. Сабитов, “Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка”, *Докл. РАН*, **427**:5 (2009), 593–596.
- [8] К. Б. Сабитов, Э. М. Сафин, “Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области”, *Изв. вузов. Матем.*, 2010, № 4, 55–62.
- [9] К. Б. Сабитов, Э. М. Сафин, “Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа”, *Матем. заметки*, **87**:6 (2010), 907–918.
- [10] К. Б. Сабитов, И. А. Хаджи, “Краевая задача для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с неизвестной правой частью”, *Изв. вузов. Матем.*, 2011, № 5, 44–52.
- [11] М. М. Смирнов, *Уравнения смешанного типа*, Наука, М., 1970.
- [12] В. А. Ильин, “Единственность и принадлежность W_2^1 классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения”, *Матем. заметки*, **17**:1 (1975), 91–101.
- [13] В. А. Ильин, “Теорема о единственности и принадлежности классу W_2^1 классического решения смешанной задачи для несамосопряженного гиперболического уравнения в произвольном цилиндре”, *Дифференц. уравнения*, **11**:1 (1975), 60–65.

И. А. Хаджи

Стерлитамакская государственная педагогическая академия

E-mail: Khadzhi_Irina@mail.ru

Поступило

22.05.2010

Исправленный вариант

06.04.2011