Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру?, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 1, 59–67

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9042>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:26:14

Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру?

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

Рассматривается задача об оптимальном восстановлении функции и ее производных на прямой по преобразованию Фурье самой функции, известному приближенно на множестве конечной меры. Найден оптимальный метод восстановления и оптимальное множество, на котором надо измерять преобразование Фурье с данной погрешностью.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Вопрос, первоначально стимулирующий написание данной работы, звучал так: “Как наилучшим образом восстановить сигнал, имея возможность измерить фиксированное число его гармоник с фиксированной погрешностью?”

На этот вопрос мы отвечаем в следующей ситуации. Пусть про функцию $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$ (соболевский класс функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, у которых $(n-1)$ -я производная локально абсолютно непрерывна и $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1$) известно ее преобразование Фурье на некотором измеримом множестве M_σ меры не больше 2σ с точностью до $\delta > 0$ в метрике $L_p(M_\sigma)$, $1 \leq p \leq \infty$. Мы ставим задачу об оптимальном восстановлении функции из $W_2^n(\mathbb{R})$ и ее k -й производной ($k \leq n-1$) в метрике $L_2(\mathbb{R})$ по данной информации. Суть полученного ответа состоит в том, что преобразование Фурье лучше всего измерять на множестве, которое есть симметричный относительно нуля отрезок длины $2\sigma_0$, где $\sigma_0 = \min(\sigma, \hat{\sigma})$, а $\hat{\sigma}$ некоторое положительное число (зависящее от n, k, p и δ). При этом за пределами отрезка $[-\sigma_0, \sigma_0]$ информация о преобразовании Фурье оказывается лишней. Оставшуюся (полезную) информацию следует определенным образом “сгладить”, взять от нее обратное преобразование Фурье и k раз продифференцировать (если $k \geq 1$). Данная процедура вполне соответствует тому, что происходит на практике (высокие частоты отбрасывают, а оставшиеся, в силу естественных погрешностей измерения, тем или иным способом фильтруют).

2. Постановка задачи и формулировка результата. Пусть n – натуральное, $W_2^n(\mathbb{R})$ – соболевский класс функций на $\mathbb{R}$, определенный выше, $\sigma > 0$, $\mathcal{M}_\sigma$ – совокупность измеримых подмножеств прямой, меры которых не больше 2σ . Допустим, что про функцию $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$ известно ее преобразование Фурье $Fx(\cdot)$ на

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-01-00188, № 10-01-90002).

некотором множестве $M_\sigma \in \mathcal{M}_\sigma$ с точностью до $\delta > 0$ в метрике $L_p(M_\sigma)$, $1 \leq p \leq \infty$, т.е. известна функция $y(\cdot) \in L_p(M_\sigma)$ такая, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(M_\sigma)} \leq \delta$. Под задачей оптимального восстановления функции из класса $W_2^n(\mathbb{R})$ или ее k -й производной ($0 \leq k \leq n-1$) в метрике $L_2(\mathbb{R})$ по данной информации понимается нахождение величины

$$E(k, \sigma, p, \delta) = \inf_{M_\sigma} \inf_m \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}), y(\cdot) \in L_p(M_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(M_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где первая нижняя грань берется по всем множествам $M_\sigma \in \mathcal{M}_\sigma$, а вторая – по всем отображениям (методам восстановления) $m: L_p(M_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$, называемой *погрешностью оптимального восстановления* и нахождение тех $\widehat{M}_\sigma$ и $\widehat{m}$, называемых *оптимальным множеством* и *оптимальным методом*, на которых нижние грани достигаются.

Постановка вопроса о нахождении погрешности оптимального восстановления и оптимального метода на классе элементов идеологически восходит к работе Колмогорова о поперечниках функциональных классов [1]. Формулировка задачи оптимального восстановления (но в значительно более простой ситуации, чем приведенная здесь) принадлежит Смоляку [2]. Представление о дальнейшем развитии проблематики, связанной с задачами оптимального восстановления, можно получить из работ [3]–[7]. Сформулированная выше задача для случая, когда $\mathcal{M}_\sigma$ состоит из одного отрезка $[-\sigma, \sigma]$, а $p = 2$ и ∞ , рассмотрена в [8]. Там же доказано, что в этой ситуации, если $1 \leq p < 2$, то верхняя грань в определении $E(k, \sigma, p, \delta)$ равна бесконечности, так что этот случай не представляет интереса – любой метод оптимален. Случай, когда $\mathcal{M}_\sigma$ состоит из всех отрезков длины 2σ , а $p = 2$, исследован в [9]. В данной работе рассматривается общая ситуация, когда $2 < p < \infty$. Крайние случаи $p = 2$ и ∞ могут быть получены предельным переходом, но мы на этом не останавливаемся.

Пусть $2 < p < \infty$. Положим

$$\widehat{\sigma} = \left(\frac{\sqrt{2\pi}(n-k)^{1-1/p}}{\delta \sqrt{k+1/2-1/p} B^{1/2-1/p}} \right)^{1/(n+1/2-1/p)},$$

где

$$B = B\left(\frac{k+1/2-1/p}{(n-k)(1-2/p)}, 2\frac{1-1/p}{1-2/p}\right) \quad (2.1)$$

– B -функция Эйлера.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k, n целые, $0 \leq k \leq n-1$, $\sigma > 0$, $\delta > 0$, $2 < p < \infty$ и $\sigma_0 = \min(\sigma, \widehat{\sigma})$. Тогда

$$E(k, \sigma, p, \delta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{B}{n-k}\right)^{1-2/p} \sigma^{2k+1-2/p} + \frac{1}{\sigma^{2(n-k)}}}, & \sigma \leq \widehat{\sigma}, \\ \sqrt{\frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}} \widehat{\sigma}^{-(n-k)}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Оптимальное множество – отрезок $[-\sigma_0, \sigma_0]$. Оптимальный метод имеет вид

$$\widehat{m}(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \sigma_0} (i\xi)^k \left(1 - \left(\frac{\xi}{\sigma_0}\right)^{2(n-k)}\right) y(\xi) e^{i\xi t} d\xi.$$

Как видно из формулировки теоремы, знание преобразования Фурье за пределами отрезка $[-\widehat{\sigma}, \widehat{\sigma}]$ оказывается лишним – погрешность оптимального восстановления не уменьшается. Полезная же информация (та, которая на отрезке $[-\sigma_0, \sigma_0]$) подвергается сглаживанию.

3. Доказательство теоремы. Ниже мы будем иметь дело с экстремальными задачами, у которых нет решения, поэтому начнем с доказательства одного утверждения, касающегося нахождения значения задачи в такой ситуации. Пусть X – произвольное непустое множество, $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, N$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$, и A – непустое подмножество X . Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \rightarrow \max, \quad f_i(x) \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad x \in A, \quad (3.1)$$

закрывающуюся в нахождении тех допустимых (т.е. удовлетворяющих ограничениям задачи) элементов, на которых f_0 достигает максимума. Верхняя грань $f_0(x)$ по всем допустимым x называется *значением задачи* (3.1).

Свяжем с задачей (3.1) следующую функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{i=1}^N \lambda_i f_i(x),$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ – набор множителей Лагранжа.

ЛЕММА 1. Пусть существуют набор $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_N)$ неотрицательных множителей Лагранжа, число $\widehat{\mathcal{L}}$ и последовательность допустимых элементов $\{x_m\}$ в (3.1) такие, что

- (a) $\mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) \geq \widehat{\mathcal{L}}$ для всех $x \in A$,
- (b) $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}(x_m, \widehat{\lambda}) = \widehat{\mathcal{L}}$,
- (c) $\lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{\lambda}_i (f_i(x_m) - \alpha_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$

Тогда $\sum_{i=1}^N \widehat{\lambda}_i \alpha_i - \widehat{\mathcal{L}}$ – значение задачи (3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Обозначим через S значение задачи (3.1). Для любого допустимого элемента x в (3.1) в силу неотрицательности $\widehat{\lambda}_i$, $i = 1, \dots, N$, и условия (a) имеем

$$-f_0(x) \geq -f_0(x) + \sum_{i=1}^N \widehat{\lambda}_i (f_i(x) - \alpha_i) = \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) - \sum_{i=1}^N \widehat{\lambda}_i \alpha_i \geq \widehat{\mathcal{L}} - \sum_{i=1}^N \widehat{\lambda}_i \alpha_i,$$

т.е. $S \leq \sum_{i=1}^N \widehat{\lambda}_i \alpha_i - \widehat{\mathcal{L}}$. С другой стороны, в силу условий (b) и (c) получаем, что

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}(x_m, \widehat{\lambda}) = - \lim_{m \rightarrow \infty} f_0(x_m) + \sum_{i=1}^N \lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{\lambda}_i f_i(x_m) \\ &= - \lim_{m \rightarrow \infty} f_0(x_m) + \sum_{i=1}^N \lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{\lambda}_i (f_i(x_m) - \alpha_i) + \sum_{i=1}^N \widehat{\lambda}_i \alpha_i \geq -S + \sum_{i=1}^N \widehat{\lambda}_i \alpha_i \end{aligned}$$

и, значит, $S \geq \sum_{i=1}^N \widehat{\lambda}_i \alpha_i - \widehat{\mathcal{L}}$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1. Оценка снизу величины $E(k, \sigma, p, \delta)$. Фиксируем $M_\sigma \in \mathcal{M}_\sigma$ и обозначим для данного M_σ через $E(k, M_\sigma, p, \delta)$ величину, стоящую под первой нижней гранью в определении $E(k, \sigma, p, \delta)$. Покажем, что $E(k, M_\sigma, p, \delta)$ не меньше значения задачи

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_p(M_\sigma)} \leq \delta, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1. \quad (3.2)$$

Действительно, пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в (3.2) (т.е. $x(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи). Тогда, очевидно, функция $-x(\cdot)$ также допустима и мы имеем для любого $m: L_p(M_\sigma) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} 2\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} &\leq \|x^{(k)}(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|-x^{(k)}(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &\leq 2 \sup_{x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}), \|Fx(\cdot)\|_{L_p(M_\sigma)} \leq \delta} \|x^{(k)}(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}), y(\cdot) \in L_p(M_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(M_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (3.2), а справа к нижней грани по всем методам m , получаем требуемое.

В образах Фурье, обозначая $u(\cdot) = (2\pi)^{-1/2} |Fx(\cdot)|$, квадрат значения задачи (3.2) согласно теореме Планшереля равен значению такой задачи

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} u^2(\xi) d\xi \rightarrow \max, \quad \int_{M_\sigma} u^p(\xi) d\xi \leq \frac{\delta^p}{(2\pi)^{p/2}}, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} u^2(\xi) d\xi \leq 1, \quad u(\cdot) \geq 0. \quad (3.3)$$

Положим

$$\widehat{a} = \sup\{a \geq 0 : \text{mes}\{M_\sigma \cap [-a, a]\} = 2a\}.$$

Ясно, что ноль принадлежит множеству в фигурных скобках. Покажем, что если $\widehat{a} = 0$, то значение задачи (3.3) (а значит, и (3.2)) равно бесконечности. Действительно, в этом случае $\text{mes}\{M_\sigma \cap [-\varepsilon, \varepsilon]\} < 2\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и, значит, $\text{mes}\Omega_\varepsilon = \{(\mathbb{R} \setminus M_\sigma) \cap [-\varepsilon, \varepsilon]\} > 0$. Положим

$$u_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \tau^{2n} d\tau \right)^{-1/2}, & \xi \in \Omega_\varepsilon \\ 0, & \xi \notin \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Эта функция допустима в задаче (3.3) и

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} u_{\varepsilon}^2(\xi) d\xi = \frac{\int_{\Omega_{\varepsilon}} \xi^{2k} d\xi}{\int_{\Omega_{\varepsilon}} \tau^{2n} d\tau} = \frac{\int_{\Omega_{\varepsilon}} \xi^{2n} \xi^{-2(n-k)} d\xi}{\int_{\Omega_{\varepsilon}} \tau^{2n} d\tau} \geq \varepsilon^{-2(n-k)},$$

откуда в силу произвольности ε следует, что значение максимизируемого функционала в (3.3) может быть сделано сколь угодно большим.

Пусть теперь $\hat{a} > 0$. Найдем значение задачи (3.3) в этой ситуации, опираясь на доказанную выше лемму. Задача (3.3) имеет вид задачи (3.1) (X – совокупность всех измеримых функций $u(\cdot)$ на $\mathbb{R}$, A – подмножество неотрицательных функций). Функцию Лагранжа (3.3) запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = & \int_{M_{\sigma}} (-\xi^{2k} u^2(\xi) + \lambda_1 u^p(\xi) + \lambda_2 \xi^{2n} u^2(\xi)) d\xi \\ & + \int_{\mathbb{R} \setminus M_{\sigma}} (-\xi^{2k} + \lambda_2 \xi^{2n}) u^2(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Положим $a_0 = \min(\hat{\sigma}, \hat{a})$, $\hat{\lambda}_2 = a_0^{-2(n-k)}$. Тогда для любого $\lambda_1 > 0$ при $\xi \in [-a_0, a_0]$ функция $u \mapsto f(u) = -\xi^{2k} u^2 + \lambda_1 u^p + a_0^{-2(n-k)} \xi^{2n} u^2$ на $[0, \infty)$ достигает абсолютного минимума в точке

$$\tilde{u}(\xi) = \left(\frac{2}{\lambda_1 p} \right)^{1/(p-2)} \xi^{2k/(p-2)} \left(1 - \left(\frac{\xi}{a_0} \right)^{2(n-k)} \right)^{1/(p-2)},$$

а при $|\xi| > a_0$ – в нуле.

Выберем теперь λ_1 , которое обозначим $\hat{\lambda}_1$, из условия

$$\int_{-a_0}^{a_0} \tilde{u}^p(\xi) d\xi = \left(\frac{2}{\hat{\lambda}_1 p} \right)^{p/(p-2)} \int_{-a_0}^{a_0} \xi^{2pk/(p-2)} \left(1 - \left(\frac{\xi}{a_0} \right)^{2(n-k)} \right)^{p/(p-2)} d\xi = \frac{\delta^p}{(2\pi)^{p/2}}. \quad (3.5)$$

Делая в интеграле замену $\eta = (\xi/a_0)^{2(n-k)}$, после несложных вычислений получаем, что

$$\hat{\lambda}_1 = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\delta} \right)^{p-2} \frac{2B^{1-2/p}}{p(n-k)^{1-2/p}} a_0^{2(k+1/2-1/p)},$$

где B определено равенством (2.1). Очевидно, что $\hat{\lambda}_1 > 0$.

Поскольку $\text{mes}\{M_{\sigma} \cap [-\hat{a}, \hat{a}]\} = 2\hat{a}$ и за пределами отрезка $[-a_0, a_0]$ функция f неотрицательна, то для всех $u(\cdot) \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{M_{\sigma}} f(u(\xi)) d\xi & \geq \int_{M_{\sigma} \cap [-\hat{a}, \hat{a}]} f(u(\xi)) d\xi = \int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} f(u(\xi)) d\xi \\ & \geq \int_{-a_0}^{a_0} f(u(\xi)) d\xi \geq \int_{-a_0}^{a_0} f(\tilde{u}(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Далее, так как $\mathbb{R} \setminus M_{\sigma} \subset \mathbb{R} \setminus [-\hat{a}, \hat{a}]$ с точностью до множества нулевой меры, а функция $\xi \mapsto -\xi^{2k} + a_0^{-2(n-k)} \xi^{2n}$ положительна при $|\xi| > a_0$, то для всех $u(\cdot)$

$$\int_{\mathbb{R} \setminus M_{\sigma}} (-\xi^{2k} + a_0^{-2(n-k)} \xi^{2n}) u^2(\xi) d\xi \geq 0.$$

Из этих соотношений вытекает, что для всех $u(\cdot) \geq 0$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}(u(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) \geq \int_{-a_0}^{a_0} f(\tilde{u}(\xi)) d\xi. \quad (3.6)$$

Рассмотрим отдельно два случая, когда $\hat{a} < \hat{\sigma}$ и когда $\hat{a} \geq \hat{\sigma}$.

Пусть $\hat{a} < \hat{\sigma}$. Тогда $a_0 = \hat{a}$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\Omega_m = (\mathbb{R} \setminus M_\sigma) \cap \left(\left(-\hat{a} - \frac{1}{m}, \hat{a} \right) \cup \left(\hat{a}, \hat{a} + \frac{1}{m} \right) \right).$$

Из определения $\hat{a}$ вытекает, что $\text{mes } \Omega_m > 0$ при всех m . Положим

$$u_m(\xi) = \begin{cases} \tilde{u}(\xi), & \xi \in [-\hat{a}, \hat{a}], \\ \gamma_m, & \xi \in \Omega_m, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и γ_m выберем так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} u_m^2(\xi) d\xi = \int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} \xi^{2n} \tilde{u}^2(\xi) d\xi + \gamma_m^2 \int_{\Omega_m} \xi^{2n} d\xi = 1. \quad (3.7)$$

Покажем, что это возможно. Действительно, производя, как и выше, замену $\eta = (\xi/\hat{a})^{2(n-k)}$ в выражении для $\tilde{u}(\cdot)$ и пользуясь известными свойствами B -функции, приходим к соотношению

$$\int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} \xi^{2n} \tilde{u}^2(\xi) d\xi = \frac{\delta^2(k + 1/2 - 1/p) B^{1-2/p}}{2\pi(n-k)^{2-2/p}} \hat{a}^{2n+1-2/p}.$$

Из определения $\hat{\sigma}$ следует, что величина справа при $\hat{a} = \hat{\sigma}$ равна единице, а так как $\hat{a} < \hat{\sigma}$, то эта величина меньше единицы. Обозначая ее через C , получаем из (3.7), что

$$\gamma_m = (1 - C)^{1/2} \left(\int_{\Omega_m} \xi^{2n} d\xi \right)^{-1/2}.$$

Проверим теперь, что

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}(u_m(\cdot), \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} (-\xi^{2k} + \hat{a}^{2(n-k)} \xi^{2n}) u_m^2(\xi) d\xi + \int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} f(\tilde{u}(\xi)) d\xi \\ &= \int_{-\hat{a}}^{\hat{a}} f(\tilde{u}(\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Действительно, используя определения $u_m(\cdot)$ и γ_m , получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_m} (-\xi^{2k} + \hat{a}^{2(n-k)} \xi^{2n}) u_m^2(\xi) d\xi &= \gamma_m^2 \int_{\Omega_m} (-\xi^{2k} + \hat{a}^{-2(n-k)} \xi^{2n}) d\xi \\ &\leq \left(\hat{a}^{-2(n-k)} - \left(\hat{a} + \frac{1}{m} \right)^{-2(n-k)} \right) \gamma_m^2 \int_{\Omega_m} \xi^{2n} d\xi \\ &= (1 - C) \left(\hat{a}^{-2(n-k)} - \left(\hat{a} + \frac{1}{m} \right)^{-2(n-k)} \right) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что и доказывает (3.8).

Теперь мы можем найти значение задачи (3.3) согласно лемме (условия которой (a), (b) и (c) следуют соответственно из (3.6), (3.8), (3.5) и (3.7)) в случае, когда $\hat{a} < \hat{\sigma}$. Это значение равно

$$\frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{B}{n-k} \right)^{1-2/p} \hat{a}^{2k+1-2/p} + \frac{1}{\hat{a}^{2(n-k)}}. \quad (3.9)$$

Перейдем к случаю $\hat{a} \geq \hat{\sigma}$. Тогда $a_0 = \hat{\sigma}$. Пусть $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ определяются как и раньше (но с $a_0 = \hat{\sigma}$). Последовательность $\{u_m(\cdot)\}$ выберем постоянной, а именно,

$$u_m(\xi) = \begin{cases} \tilde{u}(\xi), & \xi \in [-\hat{\sigma}, \hat{\sigma}], \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из определения $\hat{\sigma}$ следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} u_m^2(\xi) d\xi = \int_{-\hat{\sigma}}^{\hat{\sigma}} \xi^{2n} \tilde{u}^2(\xi) d\xi = 1.$$

Применяя лемму, остальные условия которой очевидным образом проверяются, получаем, что значение задачи (3.3) в данной ситуации равно

$$\frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p} \hat{\sigma}^{-2(n-k)}.$$

Пусть $\sigma < \hat{\sigma}$. Тогда, очевидно, $\hat{a} \leq \sigma < \hat{\sigma}$. Выражение (3.9), как функция $\hat{a}$, убывает на $(0, \hat{\sigma}]$ и поэтому значение задачи (3.2) не меньше, чем

$$\sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{B}{n-k} \right)^{1-2/p} \sigma^{2k+1-2/p} + \frac{1}{\sigma^{2(n-k)}}}. \quad (3.10)$$

Тогда согласно доказанному выше, величина $E(k, M_\sigma, p, \delta)$ не меньше числа (3.10), не зависящего от структуры множества M_σ . Следовательно, при $\sigma < \hat{\sigma}$

$$E(k, \sigma, p, \delta) \geq \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{B}{n-k} \right)^{1-2/p} \sigma^{2k+1-2/p} + \frac{1}{\sigma^{2(n-k)}}}.$$

Пусть $\sigma \geq \hat{\sigma}$. Если $\hat{a} < \hat{\sigma}$, то по доказанному значение задачи (3.2) заведомо не меньше значения выражения (3.10) в точке $\sigma = \hat{\sigma}$, которое, как несложно проверить, равно

$$\sqrt{\frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}} \hat{\sigma}^{-(n-k)}. \quad (3.11)$$

Если же $\hat{a} \geq \hat{\sigma}$, то было доказано, что значение задачи (3.2) равно величине (3.11). Тем самым, при $\sigma \geq \hat{\sigma}$

$$E(k, \sigma, p, \delta) \geq \sqrt{\frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}} \hat{\sigma}^{-(n-k)}.$$

2. Доказательство оптимальности множества $\Delta_{\sigma_0} = [-\sigma_0, \sigma_0]$ и метода $\hat{m}$. Оптимальность Δ_{σ_0} и $\hat{m}$ означает, что значение задачи (величина верхней грани в определении $E(k, \sigma, p, \delta)$)

$$\|x^{(k)}(\cdot) - \hat{m}(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_{\sigma_0})} \leq \delta, \quad (3.12)$$

$$\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1, \quad y(\cdot) \in L_p(\Delta_{\sigma_0})$$

совпадает с $E(k, \sigma, p, \delta)$.

Обозначая $z(\cdot) = Fx(\cdot) - y(\cdot)$ и, для краткости записи, $\gamma(\xi) = (\xi/\sigma_0)^{2(n-k)}$, получим по теореме Планшереля, что квадрат значения задачи (3.12) равен значению такой задачи

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_{\sigma_0}} \xi^{2k} |(1 - \gamma(\xi))z(\xi) + \gamma(\xi)Fx(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus \Delta_{\sigma_0}} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max,$$

$$\int_{\Delta_{\sigma_0}} |z(\xi)|^p d\xi \leq \delta^p, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1. \quad (3.13)$$

Полагая $u(\xi) = (2\pi)^{-1/2}|z(\xi)|$ и $v(\xi) = (2\pi)^{-1/2}|Fx(\xi)|$, сопоставим (3.13) задачу

$$\int_{\Delta_{\sigma_0}} \xi^{2k} ((1 - \gamma(\xi))u(\xi) + \gamma(\xi)v(\xi))^2 d\xi + \int_{\mathbb{R} \setminus \Delta_{\sigma_0}} \xi^{2k} v^2(\xi) d\xi \rightarrow \max,$$

$$\int_{\Delta_{\sigma_0}} u^p(\xi) d\xi \leq \frac{\delta^p}{(2\pi)^{p/2}}, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} v^2(\xi) d\xi \leq 1, \quad u(\xi) \geq 0, \quad v(\xi) \geq 0, \quad (3.14)$$

значение которой, очевидно, не меньше значения задачи (3.13). Для нахождения значения задачи (3.14) снова воспользуемся леммой. Функция Лагранжа данной задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(u(\cdot), v(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_{\Delta_{\sigma_0}} (-\xi^{2k} ((1 - \gamma(\xi))u(\xi) + \gamma(\xi)v(\xi))^2$$

$$+ \lambda_1 u^p(\xi) + \lambda_2 \xi^{2n} v^2(\xi)) d\xi + \int_{\mathbb{R} \setminus \Delta_{\sigma_0}} (-\xi^{2k} + \lambda_2 \xi^{2n}) v^2(\xi) d\xi.$$

Пусть $\xi \in \Delta_{\sigma_0}$. Положим $\hat{\lambda}_2 = \sigma_0^{-2(n-k)}$ и для фиксированного $\lambda_1 > 0$ рассмотрим функцию

$$(u, v) \mapsto g(u, v) = -\xi^{2k} ((1 - \gamma(\xi))u + \gamma(\xi)v)^2 + \lambda_1 u^p + \sigma^{-2(n-k)} \xi^{2n} v^2$$

на $[0, \infty) \times [0, \infty)$. Легко проверить, что для каждого $u \geq 0$ функция $v \mapsto g(u, v)$ достигает абсолютного минимума на $[0, \infty)$ в точке $v = u$ и, значит, $g(u, v) \geq g(u, u)$ для всех $u \geq 0$ и $v \geq 0$. Но $g(u, u) = f(u)$, где функция f определена выше и минимум f достигается в точке $\tilde{u}(\xi)$ при $a_0 = \sigma_0$.

Определив теперь последовательность $\{u_m(\cdot)\}$ тем же способом, что и ранее, и взяв $v_m(\cdot) = u_m(\cdot)$, из леммы, совершенно аналогично предыдущему, получим, что значение задачи (3.14) равно

$$\frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{B}{n-k} \right)^{1-2/p} \sigma_0^{2k+1-2/p} + \frac{1}{\sigma_0^{2(n-k)}}.$$

Следовательно,

$$E(k, \sigma, p, \delta) \geq \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{B}{n-k} \right)^{1-2/p} \sigma_0^{2k+1-2/p} + \frac{1}{\sigma_0^{2(n-k)}}},$$

что доказывает оптимальность отрезка Δ_{σ_0} и оптимальность метода $\hat{m}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Kolmogoroff, “Über die beste Annäherung von Functionen einer gegebenen Functionenklasse”, *Ann. of Math.* (2), **37**:1 (1936), 107–110.
- [2] С. А. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1965.
- [3] С. А. Micchelli, T. J. Rivlin, “A survey of optimal recovery”, *Optimal Estimation in Approximation Theory*, Plenum Press, New York, 1977, 1–54.
- [4] J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A General Theory of Optimal Algorithms*, ACM Monogr. Ser., Academic Press, New York, 1980.
- [5] С. А. Micchelli, T. J. Rivlin, “Lectures on optimal recovery”, *Numerical analysis, Lancaster 1984*, Lecture Notes in Math., **1129**, Springer-Verlag, Berlin, 1985, 21–93.
- [6] В. В. Арестов, “Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи”, *Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций*, Тр. МИАН СССР, **189**, Наука, М., 1989, 3–20.
- [7] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Матем. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93.
- [8] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 51–64.
- [9] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “О наилучшем выборе информации в задаче восстановления функции по спектру”, *Математический форум. Т. 1. Исследования по математическому анализу*, ВНЦ РАН, Владикавказ, 2008, 142–150.

Г. Г. Магарил-Ильяев

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича
РАН, г. Москва

E-mail: magaril@mirea.ru

Поступило

17.11.2010

К. Ю. Осипенко

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича
РАН, г. Москва

E-mail: kosipenko@yahoo.com