Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Галандарзаде, Р. Малакути Рад, С. Ширинкам, Об
аннуляторах полиномиальных почти-колец, *Матем. за-
метки*, 2011, том 89, выпуск 3, 342–349

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9044>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:20:00

Об аннуляторах полиномиальных почти-колец

Ш. Галандарзаде, П. Малакути Рад, С. Ширинкам

Пусть R — кольцо и $R_0[x]$ — полиномиальное почти-кольцо над R . Исследуются отношения между множествами аннуляторов в R и $R_0[x]$.

Библиография: 7 названий.

1. Введение и предварительные сведения. В этой статье все кольца предполагаются ассоциативными; под почти-кольцами всегда подразумеваются левые почти-кольца. Символами R и N обозначаются кольцо и почти-кольцо соответственно. Напомним, что кольцо или почти-кольцо называется *редуцированным*, если оно не содержит ненулевых нильпотентных элементов. В работе [1] было доказано, что кольцо R редуцировано тогда и только тогда, когда $R_0[x]$ является редуцированным кольцом. Кольцо R называется *квазибэровским* (*бэровским*), если R содержит единицу, и правый аннулятор всякого правого ненулевого идеала (непустого подмножества) кольца R порождается (как правый идеал R) идемпотентом. Легко видеть, что бэровость и квазибэровость симметричны слева и справа для любого кольца. Кольцо R симметрично, если из равенства $abc = 0$ вытекает равенство $acb = 0$ для любых $a, b, c \in R$. Кольцо R полукоммутативно, если для любых $a, b \in R$ из $ab = 0$ следует $aRb = 0$. Легко видеть, что редуцированные кольца являются полукоммутативными.

Естественная бинарная операция подстановки многочленов, которая обозначается символом “ $\circ$ ”, играет важную роль в теории многочленов. Для многочленов $(x)f, (x)g \in R[x]$, где $(x)f = \sum_{i=0}^m f_i x^i$, условимся писать $(x)g \circ (x)f = \sum_{i=0}^m f_i ((x)g)^i$. Операция “ $\circ$ ” дистрибутивна слева, но не дистрибутивна справа относительно сложения. Таким образом, $(R[x], +, \circ)$ является левым почти-кольцом, но не является кольцом. В дальнейшем, если не указано иначе, через $R[x]$ мы обозначаем почти-кольцо многочленов $(R[x], +, \circ)$, а через $R_0[x]$ — почти-подкольцо почти кольца $R[x]$, состоящее из многочленов с нулевым свободным членом.

Авторы работы [1] ввели несколько условий бэровского типа на аннуляторы почти-колец, эквивалентных условиям Бэра для почти-колец, являющихся кольцами с единицей. В работе [2] те же авторы ввели следующие условия бэровского типа на аннуляторы в классе почти-колец (для непустого подмножества U почти-кольца N мы полагаем $r_N(U) = \{a \in N \mid Ua = 0\}$ и $l_N(U) = \{a \in N \mid aU = 0\}$; мы иногда опускаем индексы, когда они ясны из контекста):

- (1) $N \in qB_{r,1}$, если правый аннулятор $r(I)$ любого идеала $I \subseteq N$ совпадает с eN для некоторого идемпотента $e \in N$;

- (2) $N \in qB_{r2}$, если правый аннулятор $r(I)$ любого идеала $I \subseteq N$ совпадает с $r(e)$ для некоторого идемпотента $e \in N$;
- (3) $N \in qB_{l1}$, если левый аннулятор $l(I)$ любого идеала $I \subseteq N$ совпадает с eN для некоторого идемпотента $e \in N$;
- (4) $N \in qB_{l2}$, если левый аннулятор $l(I)$ любого идеала $I \subseteq N$ совпадает с $l(e)$ для некоторого идемпотента $e \in N$.

Мы покажем, что симметричные квазибэровские кольца редуцированы и построим пример не квазибэровского редуцированного кольца.

2. Основные результаты. Для кольца R положим

$$r\text{Ann}_R(2^R) = \{r_R(U) \mid U \subseteq R\}, \quad l\text{Ann}_R(2^R) = \{l_R(U) \mid U \subseteq R\}.$$

Если U – подмножество кольца R , то $r_R(U)[x] = l_{R_0[x]}(U[x])$. Таким образом, имеем отображение $\psi: r\text{Ann}_R(2^R) \rightarrow l\text{Ann}_{R_0[x]}(2^{R_0[x]})$, определенное правилом

$$\psi(I) = I[x] = \left\{ (x)f = \sum_{i=1}^m f_i x^i \mid f_i \in I \trianglelefteq R \right\}$$

для каждого $I \in r\text{Ann}_R(2^R)$. Мы обозначаем множество коэффициентов многочлена $(x)f \in R_0[x]$ через C_f ; для $V \subset R_0[x]$ мы полагаем $C_V = \bigcup_{f \in V} C_f$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Кольцо R называется *почти армендеризовским*, если для любых многочленов $(x)f = \sum_{i=1}^m f_i x^i$ и $(x)g = \sum_{j=1}^n g_j x^j$ из равенства $(x)g \circ (x)f = 0$ вытекает, что $f_i g_j = 0$ для всех $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$.

Как известно (см. лемму 3.4 в [1]), всякое редуцированное кольцо является почти армендеризовским; следующий пример показывает, что существует почти армендеризовское кольцо без левой единицы, которое не является редуцированным кольцом.

ПРИМЕР 2.2. Пусть

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & 0 \\ \mathbb{Z}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

– подкольцо полного кольца матриц размера 2×2 над полем целых чисел по модулю 2. Кольцо R содержит четыре элемента:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $0, e_1, e_2$ – идемпотентные, а q – нильпотентный элемент кольца R . Заметим, что e_2 – правая единица кольца R . Имеем также $e_1 q = e_2 q = 0$ и $e_2 e_1 = e_2$. Предположим, что $(x)f = \sum_{i=0}^m f_i x^i$ и $(x)g = \sum_{j=0}^n g_j x^j \in R[x]$ – многочлены, для которых $(x)f \circ (x)g = 0$. Обозначим через $[p/m]$ функцию потолка для частного целых чисел p и m . Заметим, что

$$(x)f \circ (x)g = (g_0 + g_1 f_0 + \dots + g_n f_0^n) + \sum_{p=1}^{nm} \left(\sum_{j=[p/m]}^n g_j c_p^{(j)} \right) x^p,$$

где

$$c_p^{(j)} = \sum_{u_1 + \dots + u_j = p} f_{u_1} f_{u_2} \dots f_{u_j}, \quad p \in \{1, 2, \dots, nm\}.$$

Положим

$$E(p) := \sum_{j=[p/m]}^n g_j c_p^{(j)}.$$

Имеем $E(nt) = g_n f_m^n = 0$, откуда вытекает равенство $f_m = q$. Пусть $(x)h = (x)f - qx^m$. Рутинными вычислениями получаем $(x)h \circ (x)g = 0$; это означает, что $E(n(m-1)) = g_n f_{m-1}^n = 0$. Следовательно, $q = f_{m-1}$. Продолжая эти рассуждения, мы приходим к заключению, что $f_i = q$ для $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, а значит, $g_j f_i = g_j q = 0$ для $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$. Таким образом, R является почти армендеризовским кольцом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Если R – почти армендеризовское кольцо, то отображение $\psi: r\text{Ann}_R(2^R) \rightarrow l\text{Ann}_{R_0[x]}(2^{R_0[x]})$, определенное правилом $\psi(r_R(U)) = r_R(U)[x]$ для $U \subseteq R$, биективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S \subseteq R_0[x]$. Рутинная проверка показывает, что

$$l_{R_0[x]}(S) = \{(x)g \mid (x)g \circ S = 0\} = \bigcap_{f \in S} l((x)f) = \bigcap_{f \in S} r(C_f)[x] = r(C_S)[x];$$

это означает, что отображение ψ биективно.

ЛЕММА 2.4. *Если R – почти армендеризовское кольцо с левой единицей, то R является редуцированным кольцом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in R$ и $a^2 = 0$. Рассмотрим многочлены $(x)f = \mu x^2$, где μ – левая единица кольца R , и $g(x) = ax$. Имеем $(x)g \circ (x)f = 0$. Из почти армендеризовости кольца R вытекает, что $a = \mu a = 0$. Значит, R – редуцированное кольцо.

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть R – кольцо. Рассмотрим следующие условия:*

- (1) *отображение $\varphi: r\text{Ann}_R(2^R) \rightarrow r\text{Ann}_{R_0[x]}(2^{R_0[x]})$, действующее по правилу $r_R(U) \rightarrow l_R(U)[x]$ для $U \subseteq R$, биективно;*
- (2) *R является почти армендеризовским кольцом.*

Для любого кольца R (1) $\Rightarrow$ (2). Более того, для кольца R с левой единицей условия (1) и (2) равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Для многочленов $(x)f = \sum_{i=1}^n f_i x^i$ и $(x)g = \sum_{j=1}^m g_j x^j$ из равенства $(x)f \circ (x)g = 0$ вытекает включение $(x)g \in r_{R_0[x]}((x)f)$. Поскольку отображение φ сюръективно, имеем $r_{R_0[x]}((x)f) = l(U)[x]$ для некоторого $U \subseteq R$. Поэтому $(x)g \in l(U)[x]$. Значит, $g_j x \in l(U)[x] = r_{R_0[x]}((x)f)$ для всех j ; таким образом, $(\sum_{i=1}^n f_i x^i) \circ g_j x = 0$ и, следовательно, $g_j f_i = 0$ для всех i и j .

(2) $\Rightarrow$ (1). Согласно лемме 2.4 и предложению 3.1 из [1] почти-кольцо $R_0[x]$ является редуцированным кольцом. Следовательно, $r\text{Ann}_{R_0[x]}(2^{R_0[x]}) = l\text{Ann}_{R_0[x]}(2^{R_0[x]})$, и отображение φ биективно по предложению 2.3.

Доказанная теорема утверждает, что если R является кольцом с левой единицей, то условия (1) и (2) равносильны. Следующий пример показывает, что предположение о существовании левой единицы в R существенно.

ПРИМЕР 2.6. Пусть

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & 0 \\ \mathbb{Z}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

– подкольцо полного кольца матриц размера 2×2 над полем целых чисел по модулю 2. Согласно рассуждениям из примера 2.2 R является почти армендеризовским кольцом.

Пусть

$$S_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z}_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $r(S_1) = r(S_2) = \{0, q\}$, $l(S_1) = 0$ и $l(S_2) = R$. Значит, $\varphi: r\text{Ann}_R(2^R) \rightarrow r\text{Ann}_{R_0[x]}(2^{R_0[x]})$, действующее по правилу $r_R(U) \rightarrow L_R(U)[x]$ для $U \subseteq R$, не корректно определено.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. *Редуцированное кольцо R является бэровским тогда и только тогда, когда $R_0[x] \in B_{r1} \cup B_{r2} \cup B_{l1} \cup B_{l2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R_0[x] \in B_{r1} \cup B_{r2} \cup B_{l1}$. По леммам 2.2 и 2.3(3) из [1] имеем $R_0[x] \in B_{l2}$. Согласно предложению 3.7(2) из [1] $R \in B_{r2}$. Применяя предложения 1.4(1) и 3.1 из [1], заключаем, что R – кольцо с единицей. По теореме 2.5 кольцо R является бэровским. Обратное утверждение также вытекает из теоремы 2.5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Кольцо R называется *квази-почти армендеризовским*, если для любой пары многочленов $(x)f = \sum_{i=1}^m f_i x^i$ и $(x)g = \sum_{j=1}^n g_j x^j$ из равенства $(x)g \circ R_0[x] \circ (x)f = 0$ вытекает, что $f_i R g_j = 0$ для всех $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$.

Говорят, что кольцо R полукоммутативно, если для любых $a, b \in R$, удовлетворяющих условию $ab = 0$, выполнено отношение $aRb = 0$.

Из теоремы 2.5 немедленно вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. *Пусть $R_0[x]$ – полукоммутативное кольцо с единицей. Тогда кольцо R является почти армендеризовским, если и только если R является квази-почти армендеризовским.*

Для кольца R положим

$$\begin{aligned} r\text{Ann}_R(\text{id}(R)) &= \{r_R(U) \mid U - \text{идеал кольца } R\}, \\ l\text{Ann}_R(\text{id}(R)) &= \{l_R(U) \mid U - \text{идеал кольца } R\}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. *Если R – квази-почти армендеризовское кольцо с единицей, то отображение $\psi: r\text{Ann}_R(\text{id}(R)) \rightarrow l\text{Ann}_{R_0[x]}(\text{id } R_0[x])$, определенное правилом $r_R(I) \rightarrow r_R(I)[x]$ для $I \trianglelefteq R$, биективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – идеал кольца R . Допустим, что $(x)a = \sum_{i=1}^m a_i x^i \in I[x]$ и рассмотрим два элемента $(x)f = \sum_{i=1}^m f_i x^i$ и $(x)g = \sum_{j=1}^n g_j x^j$ почти-кольца

$R_0[x]$. Заметим, что

$$\begin{aligned}(x)f \circ (x)a &= \sum_{i=1}^m a_i((x)f)^i \in I[x], \\ ((x)a + (x)f) \circ (x)g - (x)f \circ (x)g &= \sum_{j=1}^n g_j((x)a + (x)f)^j - \sum_{j=1}^n g_j((x)f)^j \\ &= \sum_{j=1}^n g_j[((x)a + (x)f)^j - ((x)f)^j] \in I[x].\end{aligned}$$

Следовательно, $I[x]$ – идеал почти-кольца $R_0[x]$. Поскольку $r(I)[x] = l(I[x])$, отображение ψ корректно определено; очевидно, ψ инъективно. Покажем, что $l_{R_0[x]}(I) = r(C_I R)[x]$ для любого идеала I кольца R . Для $(x)f \in l_{R_0[x]}(I)$ имеем $(x)f \circ I = 0$. Поскольку I – идеал почти-кольца $R_0[x]$, имеем также $(x)f \circ R_0[x] \circ I = 0$. Значит, $(x)f \in \bigcap_{g \in I} l(R_0[x] \circ (x)g)$. Из предположения, что R – квази-почти армендеризовское кольцо, вытекает, что

$$\bigcap_{g \in I} l(R_0[x] \circ (x)g) = \bigcap_{g \in I} r(C_g R)[x] = r(C_I R)[x].$$

Следовательно, $l_{R_0[x]}(I) \subseteq r(C_I R)[x]$. С другой стороны, простые вычисления показывают, что $l_{R_0[x]}(I) \supseteq r(C_I R)[x]$. Значит, отображение ψ сюръективно.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.11. *Для кольца с единицей R следующие условия равносильны:*

- (1) *R является квази-почти армендеризовским кольцом;*
- (2) *отображение $\psi: r\text{Ann}_R(\text{id}(R)) \rightarrow r\text{Ann}_{R_0[x]}(\text{id } R_0[x])$, определенное правилом $r_R(I) \rightarrow l_R(I)[x]$ для $I \leq R$, биективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Покажем, что

$$l\text{Ann}_{R_0[x]}(\text{id } R_0[x]) = r\text{Ann}_{R_0[x]}(\text{id } R_0[x]).$$

Пусть I_0 – идеал почти-кольца $R_0[x]$ и $l_{R_0[x]}(I_0) \in l\text{Ann}_{R_0[x]}(\text{id } R_0[x])$. Если $(x)g = \sum_{j=1}^m g_j x^j \in l_{R_0[x]}(I_0)$, то $(x)g \circ R_0[x] \circ (x)f = 0$ для любого $(x)f = \sum_{i=1}^n f_i x^i \in I_0$. Значит, $f_i r g_j = 0$ для всех i, j и $r \in R$. Поскольку R – кольцо с единицей, имеем $f_i g_j = 0$ для всех i и j . Рассмотрим многочлены $(x)\alpha = g_j r f_i x$ и $(x)\beta = x^2$. Ясно, что $(x)\alpha \circ R_0[x] \circ (x)\beta = 0$. Из квази-почти армендеризовости кольца R вытекает, что $g_j f_i = 0$. Значит, $(x)g \in r_{R_0[x]}(I_0) \in r\text{Ann}_{R_0[x]}(\text{id } R_0[x])$. Следовательно,

$$l\text{Ann}_{R_0[x]}(\text{id } R_0[x]) \subseteq r\text{Ann}_{R_0[x]}(\text{id } R_0[x]).$$

Поскольку I_0 – идеал почти-кольца $R_0[x]$, имеем $I_0 \circ R_0[x] \subseteq I_0$. Аналогичные рассуждения показывают, что

$$l\text{Ann}_{R_0[x]}(\text{id } R_0[x]) \supseteq r\text{Ann}_{R_0[x]}(\text{id } R_0[x]).$$

Таким образом, по предложению 2.10 отображение ψ биективно.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $(x)g = \sum_{j=1}^m g_j x^j$, $(x)f = \sum_{i=1}^n f_i x^i \in R_0[x]$ и $(x)f \circ R_0[x] \circ (x)g = 0$. Тогда $(x)g \in r_{R_0[x]}((x)f \circ R_0[x])$. Значит, в кольце R есть идеал I , для

которого $r_{R_0[x]}((x)f \circ R_0[x]) = l(I)[x]$, откуда $g_j x \in l(I)[x]$. Это означает, что $(x)f \circ (rx) \circ (g_j x) = 0$ для всех $r \in R$ и $1 \leq j \leq m$. Следовательно, $g_j r f_i = 0$ для любых $r \in R$, $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$.

Доказанная теорема имеет следующее интересное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2.12. *Редуцированное кольцо R является бэровским, если и только если $R_0[x] \in qB_{r2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R_0[x] \in qB_{r2}$. По предложению 3.1 из [1] почти-кольцо $R_0[x]$ редуцировано; значит, $r_{R_0[x]}(R_0[x]) = 0$. Кроме того, по предложению 1.1 (1) из [2] $R_0[x]$ обладает левой единицей $(x)\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i x^i$. Для любого $b \in R$ имеем $bx = (x)\mu \circ bx = b \cdot (x)\mu$ и, следовательно, $b\mu_1 = b$. Таким образом, μ_1 является правой единицей кольца R . Значит, $(\mu_1 a - a)^2 = 0$. Поскольку кольцо R редуцировано, имеем $\mu_1 a = a$, так что μ_1 является единицей кольца R . Будучи редуцированным, кольцо R является квази-почти армендеризовским. По теореме 2.11 R – бэровское кольцо. Теорема 2.11 влечет также и обратное утверждение.

Кольцо R является подпрямым произведением семейства колец $\{R_i\}_{i \in I}$, если существует такой инъективный гомоморфизм $f: R \rightarrow \prod_{i \in I} R_i$, что для каждого $j \in I$ отображение $\pi_j f: R \rightarrow R_j$, где $\pi_j: \prod_{i \in I} R_i \rightarrow R_j$ – j -я проекция, является сюръективным гомоморфизмом. Ясно, что подпрямое произведение почти-армендеризовских колец является почти армендеризовским кольцом. Следующее предложение доказывается так же, как предложение 3.7 из [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.13. *Подпрямое произведение квази-почти армендеризовских колец является квази-почти армендеризовским кольцом.*

Поскольку всякое полупростое кольцо является подпрямым произведением простых колец, а простые кольца являются квази-почти армендеризовскими, имеем такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2.14. *Всякое полупростое кольцо является квази-почти армендеризовским.*

Подмодуль N левого R -модуля M называется *чистым*, если мономорфно отображение $L \otimes_R N \rightarrow L \otimes_R M$ для любого правого R -модуля L . Томинага [4] назвал идеал I кольца R *право- s -унитальным*, если для любого $a \in I$ найдется $x \in I$, для которого $ax = a$. Согласно предложению 11.3.13 из [5] для всякого идеала I следующие условия равносильны:

- (1) идеал I является чистым как левый идеал кольца R ;
- (2) модуль R/I является плоским как левый R -модуль;
- (3) идеал I право- s -унитален.

ТЕОРЕМА 2.15. *Пусть R – симметричное кольцо. Если аннулятор $l_R(a)$ любого элемента $a \in R$ является чистым как левый идеал кольца R , то R – квази-почти армендеризовское кольцо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $(x)f = \sum_{i=1}^n f_i x^i$ и $(x)g = \sum_{j=1}^m g_j x^j$. Пусть $(x)f \circ R_0[x] \circ (x)g = 0$. Докажем, что $g_j R f_i = 0$ для всех i и j . Для произвольного элемента r кольца R имеем $(x)f \circ (rx) \circ (x)g = 0$. Следовательно,

$$g_1(r(x)f) + g_2(r(x)f)^2 + \dots + g_m(r(x)f)^m = 0. \quad (t)$$

Таким образом, $g_1 r f_1 = 0$, откуда $g_1 \in l_R(r f_1)$. По предположению идеал $l_R(r f_1)$ право- s -унитален, поэтому найдется $e_1 \in l_R(r f_1)$, для которого $g_1 e_1 = g_1$. Положим $(x)f' = \sum_{i=2}^n f_i x^i$. Подставляя $e_1 r$ вместо r в формулу (t), получаем

$$g_1(r(x)f') + g_2(r(x)f')^2 + \dots + g_m(r(x)f')^m = 0.$$

Отсюда вытекает, что $0 = g_1 e_1 r f_2 = g_1 r f_2$. Значит, $g_1 \in l_R(r f_2)$. Поскольку идеал $l_R(r f_2)$ право- s -унитален, найдется $e_2 \in l_R(r f_2)$, для которого $g_1 e_2 = g_1$. Подставляя $e_2 e_1 r$ вместо r в формулу (t), получаем $g_1 r f_3 = 0$. Тем же путем получаем $g_1 r f_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Итак, имеем $(x)f \circ R_0[x] \circ (x)g' = 0$, где $(x)g' = \sum_{j=2}^m g_j x^j$. Следовательно,

$$g_2(r(x)f)^2 + \dots + g_m(r(x)f)^m = 0.$$

Значит, $g_2 r f_1 r f_1 = 0$, откуда $g_1 r f_1 \in l_R(r f_1)$. Таким образом, существует $e'_1 \in l_R(r f_1)$, для которого $g_2 r f_1 = g_2 r f_1 e'_1$. Поскольку кольцо R симметрично и $e'_1 \in l_R(r f_1)$, имеем $g_2 r f_1 = 0$. Продолжая этот процесс, приходим к заключению, что $g_j r f_i = 0$ для всех i и j . Следовательно, R – квази-почти армендеризовское кольцо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.16. *Для симметричного кольца с единицей R следующие условия равносильны:*

- (1) идеал $l_R(Ra)$ право- s -унитален для любого $a \in R$;
- (2) идеал $r_{R_0[x]}((x)f \circ R_0[x])$ право- s -унитален для любого $(x)f \in R_0[x]$, и в этом случае R является редуцированным кольцом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Сначала докажем, что кольцо R редуцировано. По теореме 2.15 R является квази-почти армендеризовским кольцом. Из тех же соображений, что и в доказательстве леммы 2.4, вытекает редуцированность кольца R . Для $(x)f = \sum_{i=1}^n f_i x^i$ и $(x)g = \sum_{j=1}^m g_j x^j$, где $(x)g \in r_{R_0[x]}((x)f \circ R_0[x])$, имеем $(x)f \circ R_0[x] \circ (x)g = 0$. Из теоремы 2.15 следует, что $g_j R f_i = 0$ для всех i и j . Значит, $g_j \in l_R(R f_i)$, и найдется $e_i \in l_R(R f_i)$, для которого $g_j = g_j e_i$ и $(x)f \circ R_0[x] \circ e x = 0$. Для $e = e_1 e_2 \dots e_n$ выполнено равенство $g_j = g_j e$. Поскольку кольцо R симметрично, имеем $g_j = e g_j$, откуда $(x)g = (x)g \circ e x$. Следовательно, идеал $r_{R_0[x]}((x)f \circ R_0[x])$ право- s -унитален.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть a – элемент кольца R и $b \in l_R(Ra)$. Тогда $a x \circ R_0[x] \circ b x = 0$. Поскольку идеал $r_{R_0[x]}(a x \circ R_0[x])$ лево- s -унитален, найдется многочлен $(x)f \in R_0[x]$, для которого $(x)f \circ b x = b x$. Значит, $b f_1 = b$ для $f_1 \in l(Ra)$. Следовательно, идеал $l_R(Ra)$ право- s -унитален.

Как известно, класс симметричных колец включает в себя как коммутативные, так и редуцированные кольца. Пример симметричного кольца, не являющегося ни коммутативным, ни редуцированным, был построен Марксом в работе [6].

СЛЕДСТВИЕ 2.17. *Любое симметричное квази-бэровское кольцо редуцировано.*

Следующий пример показывает, что обратное утверждение неверно.

ПРИМЕР 2.18. Пусть p – простое число и $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{p}\}$. Тогда R – коммутативное редуцированное кольцо. Заметим, что единственные идемпотенты кольца R – это $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Нетрудно видеть, что $r_R((p, 0)R) = (0, p)R$. Таким образом, $r_R((p, 0)R)$ не содержит ненулевых идемпотентов кольца R . Значит, кольцо R не квази-бэровское.

Следующий пример показывает, что предположение о симметричности кольца R в следствии 2.17 существенно.

ПРИМЕР 2.19. Пусть $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел и

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

– кольцо верхнетреугольных матриц размера 2×2 над $\mathbb{Z}$. Поскольку кольцо $\mathbb{Z}$ квази-бэровское, кольцо R тоже является квази-бэровским (по предложению 9 из [7]). Однако кольцо R не редуцировано, потому что оно содержит ненулевой нильпотентный элемент

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.20. Если R – квази-почти армендеризовское кольцо, то для любого ненулевого идемпотента $e \in R$ кольцо eRe тоже является квази-почти армендеризовским.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $S = eRe$. Рассмотрим два многочлена $(x)f = \sum_{i=1}^n f_i x^i$ и $(x)g = \sum_{j=1}^m g_j x^j \in S_0[x]$ от x над S , для которых $(x)f \circ S_0[x] \circ (x)g = 0$. Поскольку $(x)f = (x)f \circ ex$, $(x)g = ex \circ (x)g$ и $ex \circ R_0[x] \circ ex = S_0[x]$, имеем $(x)f \circ R_0[x] \circ (x)g = 0$; значит, $g_j R f_i = 0$ для всех i и j . Из того, что $g_j = g_j e$ и $f_i = e f_i$ для всех i и j , заключаем, что $g_j S f_i = 0$ для всех i и j .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. F. Birkenmeier, Feng-kuo Huang, “Annihilator conditions on polynomials”, *Comm. Algebra*, **29**:5 (2001), 2097–2112.
- [2] G. F. Birkenmeier, Feng-kuo Huang, “Annihilator conditions on polynomials. II”, *Monatsh. Math.*, **141**:4 (2004), 265–276.
- [3] Y. Hirano, “On annihilator ideals of a polynomial ring over a noncommutative ring”, *J. Pure Appl. Algebra*, **168**:1 (2002), 45–52.
- [4] H. Tominaga, “On s -unital rings”, *Math. J. Okayama Univ.*, **18**:2 (1976), 117–134.
- [5] B. Stenström, *Rings of Quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory*, Grundlehren Math. Wiss., **217**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [6] G. Marks, “A taxonomy of 2-primal rings”, *J. Algebra*, **266**:2 (2003), 494–520.
- [7] A. Pollingher, A. Zaks, “On Baer and quasi-Baer rings”, *Duke Math. J.*, **37**:1 (1970), 127–138.

Ш. Галандарзаде

Технологический университет им. К. Н. Туси, Тегеран, Иран
E-mail: ghalandarzadeh@kntu.ac.ir

Поступило

04.04.2009

Исправленный вариант

04.09.2010

П. Малакути Рад

Технологический университет им. К. Н. Туси, Тегеран, Иран
E-mail: pmalakooti@dena.kntu.ac.ir

С. Ширинкам

Технологический университет им. К. Н. Туси, Тегеран, Иран
E-mail: sshirinkam@dena.kntu.ac.ir