Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ф. Каморников, Л. П. Авдашкова, К вопросу о вложении конечной группы в разрешимо насыщенную формацию, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 4, 559–566

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9045>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:18:54

К вопросу о вложении конечной группы в разрешимо насыщенную формацию

С. Ф. Каморников, Л. П. Авдашкова

В терминах $\mathfrak{F}$ -центральности и s -нормальности доказаны теоремы о вложении конечной группы G в разрешимо насыщенную формацию $\mathfrak{F}$.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. В последнее время опубликована серия работ, в которых вложение конечной группы G в насыщенную формацию $\mathfrak{F}$ изучается в рамках следующей схемы:

- 1) формация $\mathfrak{F}$ содержит все сверхразрешимые группы;
- 2) предполагается, что в G существует нормальная подгруппа N , для которой $G/N \in \mathfrak{F}$;
- 3) на определенную систему подгрупп из N налагается некоторое ограничение (нормальность, обобщенная нормальность, цикличность, перестановочность, погруженность, обобщенная дополняемость или что-то другое).

Первоначально такой подход рассматривался для случая, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$ – формация всех сверхразрешимых групп, а $N = G$. Здесь следует отметить, прежде всего, результаты Бакли [1] и Сринивазана [2] о сверхразрешимости конечной группы G , у которой нормальны все минимальные (в [1]) либо все максимальные (в [2]) подгруппы любой силовой подгруппы из G .

Далее, Рамадан [3] показал, что если G – разрешимая группа, $G/N \in \mathfrak{A}$ и все максимальные подгруппы силовских подгрупп из $F(N)$ нормальны в G , то группа G сверхразрешима. Асад и Хелил в [4] доказали, что группа G принадлежит насыщенной формации $\mathfrak{F}$, содержащей $\mathfrak{A}$, если $G/N \in \mathfrak{F}$ и все максимальные подгруппы силовских подгрупп из $F(N)$ s -квазинормально погружены в G .

Указанная схема получила развитие после введения Вангом [5] концепции s -нормальной подгруппы. Отметим в этом направлении работы Вея [6] и Скибы [7].

Кроме того, в качестве ограничивающего условия, налагаемого на ту или иную систему подгрупп из N в пункте 3) обозначенной схемы, использовались условия $\mathfrak{A}$ - s -дополняемости [8], цикличности и s -перестановочности [9] и некоторые другие. Полный перечень работ, охватывающий отмеченную тематику, составляет сегодня несколько десятков источников.

При этом практически во всех работах механизм доказательства вложения группы G в формацию $\mathfrak{F}$ направлен на то, чтобы использовать ключевое свойство насыщенной формации $\mathfrak{F}$ – замкнутость ее относительно фраттиниевых расширений.

В то же время не задействуется такое важное свойство насыщенной формации $\mathfrak{F}$ как локальность [10], позволяющее исследовать вопрос вхождения группы G в формацию $\mathfrak{F}$ на основе анализа свойств групп автоморфизмов, индуцируемых на некоторых G -главных факторах нормальной подгруппы N . А ведь по сути налагаемые на подгруппы из N ограничения в большинстве из указанных работ таковы, что в результате их действия соответствующие G -главные факторы из N становятся циклическими, а этого вполне достаточно для вложения группы G в формацию $\mathfrak{F}$, содержащую формацию $\mathfrak{A}$.

В настоящей работе мы исследуем обозначенную выше общую схему вложения группы G в формацию $\mathfrak{F}$, отталкиваясь прежде всего от свойств G -главных факторов подгруппы N . Как минимум, такой подход позволяет заменить требование насыщенности формации $\mathfrak{F}$ требованием ее разрешимой насыщенности. На примере концепции s -нормальности мы показываем, что используемые ограничения на подгруппу N в приведенных работах [1]–[9] нужны лишь для доказательства $\mathfrak{A}$ -центральности определенных G -главных факторов из N .

В работе рассматриваются только конечные группы, используются обозначения и определения, принятые в [11], [12].

2. Насыщенные и разрешимо насыщенные формации. Класс конечных групп называется *формацией*, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. В [10] был впервые выделен важный для приложений класс насыщенных формаций (формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если всегда из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$). Здесь же был предложен способ конструирования насыщенных формаций при помощи локальных экранов, т.е. специальных функций, определенных на множестве простых чисел (равно на классе простых абелевых групп) со значениями в множестве всех формаций. Формация $\mathfrak{F}$, обладающая локальным экраном f , называется *локальной*. При этом применяется запись $\mathfrak{F} = LF(f)$. Как показал Гашюц [10], всякая локальная формация насыщена. В дальнейшем Любезедер и Шмидт (см. [11]) установили, что всякая насыщенная формация локальна. Таким образом, оказалось, что класс локальных формаций совпадает с классом насыщенных формаций.

Теория экранов и ступенчатых формаций, как формаций, обладающих экранами, построена и хорошо разработана Шеметковым (см. [12], [13]). При этом типизация экранов привела к выделению такого замечательного класса формаций как класс композиционных формаций.

Идея композиционной формации принадлежит Шеметкову и Р. Бэру. Впервые она изложена Шеметковым в обзорном докладе [14] на алгебраическом коллоквиуме в Свердловске в 1973 г. Суть идеи состоит в рассмотрении класса групп $CF(f)$ с f -центральными рядами, где f – композиционный экран, т.е. функция, ставящая в соответствие каждой простой (в том числе и неабелевой) группе некоторую формацию. В [11] такие функции называются *бэровскими* формационными функциями. Согласно теореме Бэра (см. [11; с. 373]) формация $\mathfrak{F}$ является композиционной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ разрешимо насыщена. Формация $\mathfrak{F}$ называется *разрешимо насыщенной*, если ей принадлежит всякая группа G , обладающая такой разрешимой нормальной подгруппой N , что $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$ (здесь $\Phi(N)$ – подгруппа Фраттини группы N).

Как следует из определений, каждая насыщенная (равно локальная) формация является разрешимо насыщенной (равно композиционной). Обратное неверно. В частности, композиционными, но не локальными являются формация $\mathfrak{N}^*$ всех квазинильпотентных групп (см., например, [15]) и формация $\mathfrak{A}^*$ всех s -сверхразрешимых групп [16]. Группа G называется s -сверхразрешимой, если она обладает главным рядом, все факторы которого являются простыми группами (абелевыми или неабелевыми).

Отметим еще, что формула композиционной формации, позволяющая с помощью операций произведения и пересечения формаций конструировать композиционную формацию из значений ее экрана, приведена в совместной работе Каморникова и Шеметкова [17].

3. Вложение группы в формацию. Пусть A – группа операторов группы G . Следуя [12], определим *обобщенную подгруппу Фиттинга* $\tilde{F}(G, A)$ группы G следующими двумя условиями:

- 1) $\tilde{F}(G, A) \supseteq \Phi(G)$;
- 2) $\tilde{F}(G, A)/\Phi(G)$ – A -цокль группы $G/\Phi(G)$, т.е. произведение всех минимальных A -допустимых нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$.

Пусть N – нормальная подгруппа группы G . Зададим действие группы G на N сопряжением:

$$n^g = g^{-1}ng, \quad g \in G, \quad n \in N.$$

Тогда G – группа операторов подгруппы N . В этом случае для обозначения обобщенной подгруппы Фиттинга группы N будем использовать запись $\tilde{F}(N, G)$. Из определения следует, что $\tilde{F}(N, G) \supseteq \Phi(N)$ и, кроме того, $\tilde{F}(N, G)/\Phi(N)$ – произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(N)$, содержащихся в $N/\Phi(N)$.

Нам понадобится далее следующий результат Шеметкова из [12], который мы приведем в виде леммы.

ЛЕММА 1. Пусть A – группа операторов группы G . Тогда

$$C_G(\tilde{F}(G, A)) \subseteq F(G),$$

где $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G .

ЛЕММА 2. Пусть N – нормальная подгруппа группы G . Тогда подгруппа Фиттинга $F(N)$ совпадает с пересечением централизаторов в N всех G -главных факторов группы $\tilde{F}(N, G)/\Phi(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по порядку группы N . Предположим, что $\Phi(N) \neq 1$. Пусть L – минимальная G -допустимая подгруппа группы N , содержащаяся в $\Phi(N)$. Так как $|N/L| < |N|$, то по индукции группа $F(N/L)$ совпадает с пересечением централизаторов в N/L всех G -главных факторов группы $\tilde{F}(N/L, G)/\Phi(N/L)$.

Если $R/L/S/L$ – G -главный фактор группы $\tilde{F}(N/L, G)/\Phi(N/L)$, то из строения группы $\tilde{F}(N/L, G)$ следует, что фактор $R/L/S/L$ G -изоморфен некоторой минимальной нормальной подгруппе $K/L/\Phi(N/L)$ группы $G/L/\Phi(N/L)$, содержащейся в $N/L/\Phi(N/L)$. Так как $L \subseteq \Phi(N)$, то $\Phi(N/L) = \Phi(N)/L$, а потому фактор $R/L/S/L$

G -изоморфен фактору $K/\Phi(N)$. При этом $K/\Phi(N)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi(N)$, содержащаяся в $N/\Phi(N)$. Ввиду G -изоморфизма главных факторов $R/L/S/L$ и $K/\Phi(N)$ имеем, что

$$C_{G/L}(R/L/S/L) = C_G(K/\Phi(N))/L,$$

а значит,

$$\begin{aligned} C_{N/L}(R/L/S/L) &= C_{G/L}(R/L/S/L) \cap N/L \\ &= C_G(K/\Phi(N))/L \cap N/L = C_N(K/\Phi(N))/L. \end{aligned}$$

Пусть B – пересечение централизаторов в N всех G -главных факторов группы $\tilde{F}(N, G)/\Phi(N)$. Тогда из равенства

$$C_{N/L}(R/L/S/L) = C_N(K/\Phi(N))/L$$

и справедливости леммы для группы G/L имеем включение $B/L \subseteq F(N/L)$. Так как централизатор любого главного фактора группы содержит подгруппу Фиттинга этой группы (см. следствие 4.1.1 из [12]), то

$$F(N/L) = F(G/L) \cap N/L \subseteq B/L.$$

Следовательно, $B/L = F(N/L)$. На основании теоремы А.9.3 из [11] справедливо равенство $F(N/L) = F(N)/L$. Отсюда имеем, что $B = F(N)$.

Итак, полагаем далее, что $\Phi(N) = 1$. Как и выше, показывается, что и в этом случае $F(N) \subseteq B$. Докажем обратное включение. Так как $\Phi(N) = 1$, то $\tilde{F}(N, G)$ – произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы G , содержащихся в N . Так как подгруппа B централизует все G -главные факторы группы $\tilde{F}(N, G)$, то $B \subseteq C_N(\tilde{F}(N, G))$. Ввиду леммы 1 имеем $C_N(\tilde{F}(N, G)) \subseteq F(N)$. Следовательно, $B \subseteq F(N)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть N – нормальная разрешимая подгруппа группы G . Тогда подгруппа Фиттинга $F(N)$ совпадает с пересечением централизаторов в N всех G -главных факторов группы $F(N)/\Phi(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как подгруппа N разрешима, то

$$\Phi(N) \subseteq \tilde{F}(N, G) \subseteq F(N).$$

Пусть A – пересечение централизаторов в N всех G -главных факторов группы $\tilde{F}(N, G)/\Phi(N)$, а B – пересечение централизаторов в N всех G -главных факторов группы $F(N)/\Phi(N)$. Тогда $B \subseteq A$. На основании леммы 2 справедливо равенство $A = F(N)$. Ввиду следствия 4.1.1 из [12] имеет место включение $F(N) \subseteq B$. Значит, $F(N) \subseteq B \subseteq A = F(N)$, т.е. $B = F(N)$. Лемма доказана.

Композиционный экран f формации $\mathfrak{F}$ называется *внутренним*, если все его значения являются подформациями формации $\mathfrak{F}$. Если f является максимальным элементом множества всех внутренних композиционных экранов формации $\mathfrak{F}$, то f называется *максимальным* внутренним композиционным экраном формации $\mathfrak{F}$. Как отмечено в [12], композиционная формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним композиционным экраном f . Отсюда, в частности, легко

выводится, что если h – максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $h \leq f$, т.е. $h(H) \subseteq f(H)$ для любой простой группы H .

Главный фактор R/S группы G называется f -центральным, если $G/C_G(R/S) \in f(R/S)$. Отметим, что так как R/S – прямое произведение групп, изоморфных некоторой простой группе H , то из определения композиционного экрана следует, что $G/C_G(R/S) \in f(H)$. Если f – внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$, то f -центральный главный фактор группы G называется $\mathfrak{F}$ -центральным.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{H}$ – разрешимо насыщенная подформация разрешимо насыщенной формации $\mathfrak{F}$. Пусть N – разрешимая нормальная подгруппа группы G , причем $G/N \in \mathfrak{F}$. Если любой G -главный фактор группы $F(G)/\Phi(N)$ $\mathfrak{H}$ -централен в G , то $G \in \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании теоремы Бэра формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ являются композиционными. Пусть $\mathfrak{H} = CF(h)$, $\mathfrak{F} = CF(f)$, где h и f – максимальные внутренние композиционные экраны соответственно формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$.

Пусть

$$\Phi(N) = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = F(N)$$

– участок некоторого главного ряда группы G , проходящий через нормальные подгруппы $\Phi(N)$ и $F(N)$. Обозначим

$$C = \bigcap_{i=1}^n C_G(F_i/F_{i-1}).$$

Вследствие леммы 3 справедливо равенство $N \cap C = F(N)$.

Пусть p_i – простое число, делящее $|F_i/F_{i-1}|$. Тогда ввиду условия теоремы

$$G/C_G(F_i/F_{i-1}) \subseteq h(Z_{p_i}) \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Отсюда имеем, что $G/C_G(F_i/F_{i-1}) \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то $G/C \in \mathfrak{F}$.

С другой стороны, по условию теоремы имеем $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то

$$G/N \cap C = G/F(N) \in \mathfrak{F}.$$

Так как $\mathfrak{F}$ – композиционная формация, то отсюда следует, что все главные факторы группы G , расположенные выше $F(N)$, являются $\mathfrak{F}$ -центральными в G .

По условию теоремы все главные факторы группы G на участке от $\Phi(N)$ до $F(N)$ являются $\mathfrak{H}$ -центральными. А так как для всех $p_i \in \pi(F(N)/\Phi(N))$ имеет место $h(Z_{p_i}) \subseteq f(Z_{p_i})$, то все главные факторы группы $G/\Phi(N)$ являются $\mathfrak{F}$ -центральными. Поэтому из определения композиционной формации заключаем, что $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$. Теперь из разрешимости подгруппы N и разрешимой насыщенности формации $\mathfrak{F}$ окончательно имеем, что $G \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимо насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. Пусть N – разрешимая нормальная подгруппа группы G , причем $G/N \in \mathfrak{F}$. Если все G -главные факторы группы $F(N)/\Phi(N)$ центральны в G , то $G \in \mathfrak{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть N – разрешимая нормальная подгруппа группы G . Если факторгруппа G/N квазинильпотентна и все G -главные факторы группы $F(N)/\Phi(N)$ центральны в G , то группа G квазинильпотентна.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимо насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы. Пусть N – разрешимая нормальная подгруппа группы G , причем $G/N \in \mathfrak{F}$. Если все G -главные факторы группы $F(N)/\Phi(N)$ имеют простой порядок, то $G \in \mathfrak{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Пусть N – разрешимая нормальная подгруппа группы G , причем группа G/N s -сверхразрешима. Если все G -главные факторы группы $F(N)/\Phi(N)$ имеют простой порядок, то группа G s -сверхразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимо насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы. Пусть N – разрешимая нормальная подгруппа группы G , причем $G/N \in \mathfrak{F}$. Если все силовские подгруппы группы $F(N)$ циклически, то $G \in \mathfrak{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.6. Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимо насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы. Пусть N – разрешимая нормальная подгруппа группы G , причем $G/N \in \mathfrak{F}$. Если подгруппа N является циклической, то $G \in \mathfrak{F}$.

4. Концепция s -нормальной подгруппы. Следуя [5], подгруппу H группы G назовем s -нормальной в G , если G обладает нормальной подгруппой T такой, что $HT = G$ и $H \cap T \subseteq \text{Core}_G(H)$, где $\text{Core}_G(H) = \bigcap_{x \in G} H^x$ – ядро подгруппы H в G . Из определения в частности следует, что любая нормальная подгруппа группы G является s -нормальной.

Доказательство следующей леммы можно найти в [5].

ЛЕММА 4. Пусть H и K – подгруппы группы G , причем подгруппа K нормальна в G и содержится в H . Тогда и только тогда подгруппа H s -нормальна в G , когда подгруппа H/K s -нормальна в G/K .

ТЕОРЕМА 2. Пусть N – разрешимая нормальная подгруппа группы G . Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп из $F(N)$ s -нормальны в G , то справедливы следующие утверждения:

- 1) все максимальные подгруппы группы $F(N)$ s -нормальны в G ;
- 2) любой G -главный фактор, расположенный между $\Phi(N)$ и $F(N)$, является $\mathfrak{A}$ -центральным в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть M – максимальная подгруппа группы $F(N)$. Так как подгруппа $F(N)$ нильпотентна, то $M = M_p \times (F(N))_{p'}$ для некоторого простого числа $p \in \pi(F(N))$, причем M_p – максимальная подгруппа силовской p -подгруппы из $F(N)$. Ввиду условия теоремы подгруппа M_p s -нормальна в G . Поэтому найдется нормальная в G подгруппа T такая, что $M_p T = G$ и $M \cap T \subseteq \text{Core}_G(M_p)$. Тогда, очевидно, $MT = G$ и, кроме того,

$$M \cap T = M_p(F(N))_{p'} \cap T = (M_p \cap T)(F(N))_{p'} \subseteq \text{Core}_G(M_p)(F(N))_{p'} \subseteq \text{Core}_G(M).$$

Таким образом, подгруппа M s -нормальна в G .

- 2) Пусть R/S – такой главный фактор группы G , что

$$\Phi(N) \subseteq S \subseteq R \subseteq F(N).$$

Пусть R/R_1 – главный фактор группы $F(N)$, причем $S \subseteq R_1$. Так как $\Phi(N) \subseteq S$, то фактор R/R_1 является дополняемым, а потому найдется максимальная в $F(N)$ подгруппа M , которая обладает следующими свойствами: $MR = F(N)$, $M \cap R = R_1$. Отсюда, в частности, следует, что $S \subseteq M$.

На основании утверждения 1) теоремы подгруппа M s -нормальна в G . Применяя теперь лемму 4, получаем, что M/S – s -нормальная подгруппа группы G/S . Это означает, что найдется нормальная в G/S подгруппа T/S такая, что $(M/S)(T/S) = G/S$ и $M/S \cap T/S \subseteq \text{Core}_{G/S}(M/S)$.

Так как R/S – минимальная нормальная подгруппа группы G/S , то

$$\text{либо } \text{Core}_{G/S}(M/S) \cap R/S = 1, \quad \text{либо } R/S \subseteq \text{Core}_{G/S}(M/S).$$

Рассмотрим эти два случая.

Пусть $\text{Core}_{G/S}(M/S)$ содержит R/S . Тогда, в частности, M/S содержит R/S , что невозможно, так как $M \cap R = R_1 \subset R$.

Таким образом, $\text{Core}_{G/S}(M/S) \cap R/S = 1$. Так как подгруппа T/S нормальна в группе G/S , а R/S – минимальная нормальная подгруппа группы G/S , то

$$\text{либо } R/S \subseteq T/S, \quad \text{либо } R/S \cap T/S = 1.$$

Предположим, что $R/S \subseteq T/S$. Тогда

$$R_1/S \subseteq M/S \cap R/S = M/S \cap R/S \cap T/S \subseteq \text{Core}_{G/S}(M/S) \cap R/S = 1.$$

Значит, $R_1/S = 1$ и $|R/S| = p$. На основании леммы 5.9 из [12] R/S – $\mathfrak{A}$ -центральный главный фактор группы G .

Пусть теперь $R/S \cap T/S = 1$. Тогда $C_G(R/S) \supseteq T$. Кроме того, $C_G(R/S) \supseteq F(N) \supseteq M$. Значит, $C_G(R/S) \supseteq MT = G$. Таким образом, главный фактор R/S группы G централен в G , а значит, он является $\mathfrak{A}$ -центральным. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимо насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы. Пусть N – разрешимая нормальная подгруппа группы G , причем $G/N \in \mathfrak{F}$. Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп из $F(N)$ s -нормальны в G , то $G \in \mathfrak{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2 [6]. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы. Пусть N – разрешимая нормальная подгруппа группы G , причем $G/N \in \mathfrak{F}$. Если все максимальные подгруппы силовских подгрупп из $F(N)$ s -нормальны в G , то $G \in \mathfrak{F}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Buckley, “Finite groups whose minimal subgroups are normal”, *Math. Z.*, **116**:1 (1970), 15–17.
- [2] S. Srinivasan, “Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups”, *Israel J. Math.*, **35**:3 (1980), 210–214.
- [3] M. Ramadan, “Influence of normality on maximal subgroups of Sylow subgroups of a finite group”, *Acta Math. Hungar.*, **59**:1-2 (1992), 107–110.
- [4] M. Asaad, A. A. Heliel, “On s -quasinormally embedded subgroups of finite groups”, *J. Pure Appl. Algebra*, **165**:2 (2001), 129–135.

- [5] Y. Wang, “ c -Normality of finite groups and its properties”, *J. Algebra*, **180**:2 (1996), 954–965.
- [6] H. Wei, “On c -normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups”, *Comm. Algebra*, **29**:5 (2001), 2193–2200.
- [7] A. N. Skiba, “A note on c -normal subgroups of finite groups”, *Algebra Discrete Math.*, 2005, № 3, 85–95.
- [8] L. Miao, W. Guo, “Finite groups with some primary subgroups $\mathfrak{F}$ - s -supplemented”, *Comm. Algebra*, **33**:8 (2005), 2789–2800.
- [9] A. N. Skiba, “On weakly s -permutable subgroups of finite groups”, *J. Algebra*, **315**:1 (2007), 192–209.
- [10] W. Gaschütz, “Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen”, *Math. Z.*, **80**:4 (1963), 300–305.
- [11] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [12] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [13] Л. А. Шеметков, “Ступенчатые формации групп”, *Матем. сб.*, **94**:4 (1974), 628–648.
- [14] Л. А. Шеметков, “Два направления в развитии теории непростых конечных групп”, *УМН*, **30**:2 (1975), 179–198.
- [15] С. Ф. Каморников, “О некоторых свойствах формации квазинильпотентных групп”, *Матем. заметки*, **53**:2 (1993), 71–77.
- [16] В. А. Ведерников, “О некоторых классах конечных групп”, *Докл. АН БССР*, **2**:10 (1988), 872–875.
- [17] С. Ф. Каморников, Л. А. Шеметков, “О корадикалах субнормальных подгрупп”, *Алгебра и логика*, **34**:5 (1995), 493–513.

С. Ф. Каморников

Гомельский филиал Международного института
трудовых и социальных отношений
E-mail: sfkamornikov@mail.ru

Поступило

24.02.2011

Л. П. Авдашкова

Белорусский торгово-экономический университет
потребительской кооперации, г. Гомель
E-mail: avdashkova@mail.ru