Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Зыкова, Регуляризованный след возмущенного оператора Лапласа–Бельтрами на двумерных многообразиях с замкнутыми геодезическими, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 3, 373–389

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9046>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 18:28:21

Регуляризованный след возмущенного оператора Лапласа–Бельтрами на двумерных многообразиях с замкнутыми геодезическими

Т. В. Зыкова

Основным результатом работы является нахождение регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на многообразии, заданном некоторым функциональным семейством гладких *почти лиувиллевых* метрик на сфере (при этом все геодезические этих метрик замкнуты и имеют одинаковую длину).

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm9046

1. Введение. Для дифференциальных операторов на компактных многообразиях с периодическим бихарактеристическим потоком удалось радикально продвинуться в исследовании спектра после возникновения теории интегральных операторов Фурье. Первые результаты в этом направлении ([1], [2] и др.) показали, что спектр таких операторов хорошо локализуется вокруг спектра невозмущенного (отвечающего главному символу) оператора. В этой теории оператор Лапласа–Бельтрами, возмущенный оператором умножения на гладкую функцию на многообразиях с замкнутым геодезическим потоком, занимает особое место как основная модель и как физически наиболее интересный случай. Данная работа продолжает исследования в данном направлении, а именно, вычисляется регуляризованный след оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на многообразии, заданном некоторым функциональным семейством гладких *почти лиувиллевых*¹ метрик на сфере (что достигается посредством перехода в сферо-конические координаты и возмущением получившейся метрики таким образом, что замкнутость геодезического потока сохраняется).

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-7322.2010.1.)

¹Напомним, что риманова метрика на двумерной поверхности M^2 называется *лиувиллевой*, если в подходящих координатах x и y она записывается в виде $ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2)$, где $f(x)$ и $g(y)$ – произвольные гладкие положительные функции; и называется *почти лиувиллевой*, если она представима в виде $ds^2 = (f(x) + g(y))(\alpha(x)dx^2 + \beta(y)dy^2)$, где $f(x)$, $g(y)$, $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ – гладкие положительные функции (иногда в литературе именно эта метрика называется *лиувиллевой*). При этом нетрудно привести *почти лиувиллеву* метрику к *лиувиллевой* заменой $x' = \int \sqrt{\alpha(x)} dx$, $y' = \int \sqrt{\beta(y)} dy$.

Кратко обратимся к истории вопроса. Будем рассматривать Δ_0 – оператор Лапласа–Бельтрами на единичной сфере S^n в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\Delta = \Delta_0 - (n-1)^2/4$ – нормализованный оператор Лапласа–Бельтрами, а q – оператор умножения на комплекснозначную бесконечно дифференцируемую функцию на S^n . Пусть также $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ и $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$ – собственные числа операторов $-\Delta$ и $-\Delta + q$ соответственно, занумерованные с учетом кратности в порядке возрастания их действительных частей.

Спектр оператора $-\Delta$ на S^n известен (см., например, [3]):

$$\lambda_{ki} = \left(k + \frac{n-1}{2}\right)^2, \quad (1.1)$$

$k = 0, 1, \dots, i = 1, \dots, N_k$, с кратностью

$$N_k = \binom{n+k}{n} - \binom{n+k-2}{n} \sim \frac{2}{(n-1)!} k^{n-1}. \quad (1.2)$$

Для собственных чисел оператора $-\Delta + q$ будем использовать двойную нумерацию μ_{ki} , согласованную с нумерацией λ_{ki} . Гийемин, изучив в работах [4]–[7] спектр оператора $-\Delta + q$ на M , где M – симметрическое пространство ранга 1 (n -мерная сфера и проективные пространства [8]) и $q \in C^\infty(M)$, показал, что оценка

$$|\mu_{ki} - \lambda_{ki}| = O(1), \quad i = 1, \dots, N_k, \quad (1.3)$$

получаемая методами теории возмущений [9], неумлучшаема для вещественнозначной $q \neq \text{const}$ для всех M , за исключением сферы S^n . Кроме того, в [6] для всех $n \neq 2$, а в [10] для $n = 2$ показано, что для сферы S^n эта оценка может быть улучшена лишь для нечетных q (т.е. $q(\tau x) = -q(x)$ для каждого $x \in S^n$, где τ – антиподальное отображение) до

$$|\mu_{ki} - \lambda_{ki}| = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad i = 1, \dots, N_k, \quad (1.4)$$

и O в (1.4) можно заменить на o только для $q \equiv 0$. Более того, в [5] показано, что для всех M множество предельных точек последовательности

$$\mu_{ki} - \lambda_{ki}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad i = 1, \dots, N_k,$$

есть отрезок $[\min \hat{q}, \max \hat{q}]$ вещественной оси, а $\hat{q}$ – преобразование Радона на M :

$$\hat{q}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma q(s) ds,$$

где γ – замкнутая геодезическая на M .

Таким образом, относительно асимптотического распределения собственных чисел оператора $-\Delta + q$ получены окончательные результаты, и дальнейшее исследование расположения спектра возможно только “в среднем”. Стандартным аппаратом для этого являются различные формулы регуляризованных следов.

Садовничим и Дубровским в [11] для S^2 и нечетного потенциала q впервые была получена формула следа со скобками:

$$\mu_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{2n} \mu_{ni} - n(n+1)(2n+1) - \frac{c}{n} \right] = -\frac{1}{24\pi} \int_{S^2} [\Delta(q) + 3q^2] dS + \frac{\gamma c}{2}, \quad (1.5)$$

γ – постоянная Эйлера, и для s в [11] предложена формула, выражающая ее через потенциал q . Позже Подольский [12], применив к этой задаче суммирование по Абелю и затем к полученной формуле таубероу теорему Литлвуда, доказал, что ряд сходится без скобок, и показал, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = -\frac{1}{8\pi} \int_{S^2} q^2(x) dS, \quad (1.6)$$

а затем Бобров и Подольский [13], точно исследовав абсолютную и условную сходимости регуляризованных следов степеней оператора Лапласа, в частности, доказали, что полученный в [12] ряд сходится абсолютно.

Подольским в работе [14] на симметрических пространствах ранга 1 были получены формулы следов со скобками всех порядков, а также просуммированные по Абелю для любого гладкого потенциала (уже не нечетного, а произвольного). В этой работе впервые были получены следы операторов в частных производных в случае, когда порядок оператора меньше размерности многообразия.

Бобров [15] для пары “оператор и многообразие” такой, что все траектории гамильтонова потока, индуцированного оператором на многообразии, замкнуты, предложил общую схему вывода формул следов.

2. Постановка задачи. Многообразие, используемое в нашей работе, подробно описано в [16], где доказано, что существует семейство C^∞ -гладких метрик $ds_{\alpha,\beta}^2$ (попарно неизометричных) на двумерной сфере, зависящее от двух функциональных параметров α и β и таких, что

- 1) все геодезические этих метрик замкнуты и имеют одинаковую длину;
- 2) все эти метрики $ds_{\alpha,\beta}^2$ являются возмущениями метрики стандартной сферы в том смысле, что при $\alpha = 0, \beta = 0$ метрика превращается в обычную метрику ds_0^2 постоянной кривизны на сфере;
- 3) все метрики $ds_{\alpha,\beta}^2$ задаются явными формулами.

Нам потребуется схема построения этих метрик. Для представления метрики постоянной кривизны на сфере в ливилевом виде необходимо перейти к специальным координатам в $\mathbb{R}^3$, называемыми *сферо-коническими координатами* и получающимися предельным переходом из эллиптических координат.

Сферо-конические координаты v_2, v_3 получаются тогда как корни уравнения второго порядка

$$\frac{x^2}{a+v} + \frac{y^2}{b+v} + \frac{z^2}{c+v} = 0.$$

Его можно трактовать как предел кубического уравнения

$$\frac{x^2}{a+v} + \frac{y^2}{b+v} + \frac{z^2}{c+v} = 1,$$

когда точка с координатами (x, y, z) стремится к бесконечности и первая сферо-коническая координата v_1 – это просто сумма квадратов: $v_1 = x^2 + y^2 + z^2$.

Итак, рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ сферо-конические координаты (v_1, v_2, v_3) . Явные формулы, выражающие декартовы координаты x, y, z через сферо-конические v_1, v_2, v_3 , таковы:

$$x^2 = \frac{v_1(a+v_2)(a+v_3)}{(a-b)(a-c)}, \quad y^2 = \frac{v_1(b+v_2)(b+v_3)}{(b-a)(b-c)}, \quad z^2 = \frac{v_1(c+v_2)(c+v_3)}{(c-a)(c-b)}.$$

Выписываем в этих координатах евклидову метрику $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ в $\mathbb{R}^3$, а затем, ограничивая эту метрику на стандартную сферу (которая задается в сфероконических координатах простым уравнением $v_1 = 1$), получаем вид стандартной метрики двумерной сферы в сферо-конических координатах:

$$ds_0^2 = \frac{1}{4}(v_2 - v_3) \left(-\frac{1}{(a+v_2)(b+v_2)(c+v_2)} dv_2^2 + \frac{1}{(a+v_3)(b+v_3)(c+v_3)} dv_3^2 \right)$$

или

$$ds_0^2 = \frac{1}{4}(v_2 - v_3) \left(-\frac{dv_2^2}{P(v_2)} + \frac{dv_3^2}{P(v_3)} \right),$$

где $P(v) = (a+v)(b+v)(c+v)$.

Таким образом, представив метрику ds_0^2 в лиувиллевом виде, сразу получаем квадратичный интеграл ее геодезического потока [16], а значит, и структуру лиувиллева слоения на расслоении единичных кокасательных векторов. Это слоение имеет четыре однопараметрических семейства торов Лиувилля, для каждого из которых можно явно выписать формулу для функции вращения:

$$\rho(t)_{S^2} = \left(\int_{-t}^{-a} N(u, t) du \right) / \left(\int_{-c}^{-b} N(u, t) du \right),$$

где

$$N(u, t) = \frac{1}{\sqrt{-P(u)(u+t)}}, \quad t \in (a, b).$$

Легко проверяется, что

$$\rho(t)_{S^2} \equiv 1,$$

что эквивалентно² замкнутости геодезических, лежащих на торах из рассматриваемого семейства.

Построим возмущения стандартной метрики сферы таким образом, чтобы функция вращения не изменилась, т.е. осталась равной единице. Приведем дальше некоторые наблюдения, которые открывают путь для построения подходящих возмущений. Сначала отметим, что приведенную формулу метрики можно рассматривать как четыре отдельные формулы на четырех областях:

$$\begin{array}{ll} \text{I: } x > 0, z > 0, & \text{II: } x < 0, z > 0, \\ \text{III: } x > 0, z < 0, & \text{IV: } x < 0, z < 0. \end{array} \quad (2.1)$$

На каждой из четырех областей функции $P(v_2)$ и $P(v_3)$ можно задать независимо друг от друга (своей формулой), лишь требуя их гладкой стыковки на границах указанных областей, также эти четыре метрики (на разных областях) можно задать разными функциями, а вместо функций $P(v_2)$ и $P(v_3)$, задаваемых одной функцией P , можно взять две разные (только от разных аргументов), например, Q и R . Теперь можно задать метрику следующим образом:

$$g = \frac{1}{4}(v_2 - v_3) \left(-\frac{dv_2^2}{Q(v_2)} + \frac{dv_3^2}{R(v_3)} \right), \quad (2.2)$$

²Необходимое и достаточное условие замкнутости всех геодезических имеет вид $\rho = \text{const} = p/q \in \mathbb{Q}$ (Г. Дарбу). Важно, что метрики вращения без особенностей с замкнутыми геодезическими существуют только при $p = 1, q = 1$.

где

$$\begin{aligned} Q(v_2) &= Q_+(v_2), & R(v_3) &= R_+(v_3) & \text{на области I,} \\ Q(v_2) &= Q_+(v_2), & R(v_3) &= R_-(v_3) & \text{на области II,} \\ Q(v_2) &= Q_-(v_2), & R(v_3) &= R_+(v_3) & \text{на области III,} \\ Q(v_2) &= Q_-(v_2), & R(v_3) &= R_-(v_3) & \text{на области IV.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

При этом надо выбрать функции Q_+ , Q_- , R_+ , R_- так, чтобы в результате получалась гладкая риманова метрика на сфере. Например, достаточно потребовать, чтобы новые функции имели ту же асимптотику (до взятия третьей производной), что и исходная функция P на краях интервалов $[-c, -b]$ и $[-b, -a]$. Меняя функции Q_+ , Q_- , R_+ , R_- , получаем некоторое функциональное семейство гладких лиувилевых метрик $ds^2(Q_+, Q_-, R_+, R_-)$ на сфере.

Отметим, что структура лиувиллева строения для метрик $ds^2(Q_+, Q_-, R_+, R_-)$ полностью аналогична, а функция вращения на аналогичном семействе торов запишется так:

$$\rho(t)_{\text{возмущенной сферы}} = \left(\int_{-t}^{-a} N_2(u, t) du \right) / \left(\int_{-c}^{-b} N_3(u, t) du \right),$$

где

$$\begin{aligned} N_2(u, t) &= \frac{1}{\sqrt{u+t}} \left(\frac{1}{\sqrt{-Q_+(u)}} + \frac{1}{\sqrt{-Q_-(u)}} \right), \\ N_3(u, t) &= \frac{1}{\sqrt{-u-t}} \left(\frac{1}{\sqrt{R_+(u)}} + \frac{1}{\sqrt{R_-(u)}} \right). \end{aligned}$$

Далее, выбрав Q_+ , Q_- , R_+ , R_- такими, чтобы выполнялось условие

$$\rho(t)_{\text{возмущенной сферы}} \equiv 1,$$

(что в свою очередь гарантирует замкнутость геодезических), можно указать явные формулы для указанных возмущений стандартной метрики сферы, не меняющих функцию вращения:

$$\begin{aligned} Q_+(v_2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{-P(v_2)}} + \alpha(v_2) \right)^{-2}, & Q_-(v_2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{-P(v_2)}} - \alpha(v_2) \right)^{-2}, \\ R_+(v_3) &= \left(\frac{1}{\sqrt{P(v_3)}} + \beta(v_3) \right)^{-2}, & R_-(v_3) &= \left(\frac{1}{\sqrt{P(v_3)}} - \beta(v_3) \right)^{-2}; \end{aligned}$$

здесь α и β – почти произвольные гладкие функции с требованием того, чтобы их добавление не меняло асимптотики (до взятия третьей производной) функции $P(v)$ в точках $v = -a, -b, -c$, и чтобы выражение в скобках всегда оставалось положительным. В остальном функции α и β произвольны.

Тем самым показано, что метрика стандартной сферы допускает достаточно много шевелений (причем, возмущения даже не обязаны быть малыми), при этом геодезический поток остается квадратично интегрируемым, функция вращения сохраняется, а следовательно, сохраняется и замкнутость геодезических. Так как все геодезические имеют одинаковую длину, далее, для простоты, будем полагать эту длину равной 2π (очевидно, что ее всегда можно сделать такой, домножив метрику на подходящую константу).

Всюду дальше будем обозначать наше многообразие ML (где буквой L будем напоминать о *лиувиллевости* метрики), а саму метрику будем записывать просто как

$$g = \frac{1}{4}(v_2 - v_3) \left(-\frac{dv_2^2}{Q(v_2)} + \frac{dv_3^2}{R(v_3)} \right),$$

понимая ее при этом на каждой области в смысле (2.2), (2.3).

3. Регуляризованный след оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на ML . Рассмотрим оператор $-\Delta + q$, где q – оператор умножения на вещественную бесконечно дифференцируемую функцию на S^2 .

Для выражения в явном виде оператора Лапласа–Бельтрами на ML в локальных координатах (v_2, v_3) воспользуемся известной формулой (например, [17]):

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} \cdot g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right), \quad (3.1)$$

где g_{ij} – элементы метрического тензора, g^{ij} – элементы обратной матрицы.

В координатах (v_2, v_3) оператор $-\Delta + q$ будет иметь вид:

$$-\Delta + q = +\frac{2Q'(v_2)}{v_2 - v_3} \frac{\partial}{\partial v_2} - \frac{2R'(v_3)}{v_2 - v_3} \frac{\partial}{\partial v_3} + \frac{4Q(v_2)}{v_2 - v_3} \frac{\partial^2}{\partial^2 v_2} - \frac{4R(v_3)}{v_2 - v_3} \frac{\partial^2}{\partial^2 v_3} + q(v_2, v_3). \quad (3.2)$$

Полный символ оператора $-\Delta + q$

$$a(v_2, v_3, \xi, \eta) = -\frac{4Q(v_2)}{v_2 - v_3} \xi^2 + \frac{4R(v_3)}{v_2 - v_3} \eta^2 + \frac{2iQ'(v_2)}{v_2 - v_3} \xi - \frac{2iR'(v_3)}{v_2 - v_3} \eta + q(v_2, v_3)$$

можно разбить на однородные компоненты:

$$\begin{aligned} a_0(v_2, v_3, \xi, \eta) &= q(v_2, v_3), \\ a_1(v_2, v_3, \xi, \eta) &= \frac{2iQ'(v_2)}{v_2 - v_3} \xi - \frac{2iR'(v_3)}{v_2 - v_3} \eta, \\ a_2(v_2, v_3, \xi, \eta) &= -\frac{4Q(v_2)}{v_2 - v_3} \xi^2 + \frac{4R(v_3)}{v_2 - v_3} \eta^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Зафиксируем плотность на нашем многообразии:

$$\rho_P = \sqrt{\det g} \, dx = \frac{v_2 - v_3}{4\sqrt{-Q(v_2)R(v_3)}} dv_2 dv_3$$

и перейдем к оператору P , действующему в сечениях расслоения полуплотностей $(ML, \Omega^{1/2})$ по формуле

$$Pu = \rho^{1/2}(-\Delta + q)(u\rho^{-1/2}), \quad u \in C^\infty(ML, \Omega^{1/2}). \quad (3.4)$$

Так определен классический эллиптический псевдодифференциальный оператор из $\Psi_{phg}^2(ML, \Omega^{1/2}, \Omega^{1/2})$, для которого $(Pu, v) = (u, Pv)$, $u, v \in C^\infty(ML, \Omega^{1/2})$. Этот оператор имеет те же собственные значения, что и $-\Delta + q$, а его собственные функции получаются из собственных функций оператора $-\Delta + q$ умножением на $\rho^{1/2}$.

Зададим оператор $\mathcal{P}$ в $L^2(ML, \Omega^{1/2})$ ограничением P на те $u \in L^2(ML, \Omega^{1/2})$, для которых $Pu \in L^2(ML, \Omega^{1/2})$. Верны следующие утверждения:

- 1) оператор $\mathcal{P}$ – неограниченный и самосопряженный оператор в $L^2(ML, \Omega^{1/2})$;
- 2) область определения $H_2(ML, \Omega^{1/2})$ оператора $\mathcal{P}$ всюду плотна.

Итак, пусть главный и субглавный символы оператора $\mathcal{P}$ равны $p(x, \xi)$ и $\text{sub}(x, \xi)$ соответственно.

Отметим, что для бесконечно дифференцируемого риманова многообразия M размерности n с метрикой g , если в качестве плотности зафиксировать квадратный корень из определителя метрического тензора $\rho_P = \sqrt{\det g_{ij}} dx$, то в локальных координатах символ оператора Лапласа–Бельтрами Δ , действующего в сечениях расслоения полуплотностей $(M, \Omega^{1/2})$ по формуле (3.4), будет иметь

$$a^{(P)}(x, \xi) = a_2^{(P)}(x, \xi) + a_1^{(P)}(x, \xi) + a_0^{(P)}(x, \xi),$$

где

$$\begin{aligned} a_2^{(P)}(x, \xi) &= - \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \xi_i \xi_j, \\ a_1^{(P)}(x, \xi) &= i \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i} \xi_j, \\ a_0^{(P)}(x, \xi) &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{1}{4} \rho_P^{-2} \frac{\partial \rho_P}{\partial x^i} g^{ij} \frac{\partial \rho_P}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \rho_P^{-1} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i} \frac{\partial \rho_P}{\partial x^j} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

и, кроме того, $\text{sub}(\Delta) = 0$.

Действительно, проведем выкладки для любого $u \in C^\infty(ML, \Omega^{1/2})$:

$$\Delta u = \rho_P^{1/2} \rho_P^{-1} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho_P g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} (u \rho_P^{-1/2}) \right).$$

Затем преобразуем выражение в больших скобках в сумме:

$$\rho_P g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} (u \rho_P^{-1/2}) = \rho_P^{1/2} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \rho_P^{-1/2} g^{ij} u \frac{\partial \rho_P}{\partial x^j}.$$

И завершим преобразование всего выражения в сумме:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho_P g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} (u \rho_P^{-1/2}) \right) \\ &= \rho_P^{1/2} g^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \left(\frac{1}{2} \rho_P^{-1/2} \frac{\partial \rho_P}{\partial x^i} g^{ij} + \rho_P^{1/2} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i} \right) \frac{\partial u}{\partial x^j} \\ & \quad - \frac{1}{2} \rho_P^{-1/2} g^{ij} \frac{\partial \rho_P}{\partial x^j} \frac{\partial u}{\partial x^i} + \left(\frac{1}{4} \rho_P^{-3/2} \frac{\partial \rho_P}{\partial x^i} g^{ij} \frac{\partial \rho_P}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \rho_P^{-1/2} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^i} \frac{\partial \rho_P}{\partial x^j} \right) u. \end{aligned}$$

А так как метрический тензор симметричен и $g^{ij} = g^{ji}$, то, приведя подобные слагаемые, мы получим вид (3.5) функций $a_k^{(P)}(x, \xi)$, $k = 0, 1, 2$.

Далее, с учетом того, что

$$\text{sub}(\Delta) = a_1^{(P)}(x, \xi) - \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 a_2^{(P)}(x, \xi)}{\partial x^k \partial \xi^k},$$

мы видим, что нам осталось найти второе слагаемое в этой разности. Для этого последовательно возьмем производные от $a_2^{(P)}(x, \xi)$ по ξ_k и x^k :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial \xi_k} a_2^{(P)}(x, \xi) = \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial \xi_k} \left(- \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \xi_i \xi_j \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(-2 \sum_{j=1}^n g^{kj} \xi_j \right) = -2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial g^{kj}}{\partial x^k} \xi_j.$$

И тогда

$$\frac{1}{2i} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 a_2^{(P)}(x, \xi)}{\partial x^k \partial \xi_k} = -2 \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g^{kj}}{\partial x^k} \xi_j = i \sum_{k,j=1}^n g^{kj} \frac{\partial g^{kj}}{\partial x^k} \xi_j = a_1^{(P)}(x, \xi).$$

Тем самым, мы показали, что $\text{sub}(\Delta) = 0$.

Из приведенных рассуждений немедленно следует, что для главного и субглавного символов оператора $\mathcal{P}$, действующего в сечениях расслоения полуплотностей $(ML, \Omega^{1/2})$, верно

$$p(v_2, v_3, \xi, \eta) = -\frac{4Q(v_2)}{v_2 - v_3} \xi^2 + \frac{4R(v_3)}{v_2 - v_3} \eta^2, \quad \text{sub}(v_2, v_3, \xi, \eta) = 0. \quad (3.6)$$

Сили показал в [18], что если $\mathcal{P}$ – положительный оператор порядка m , то $\mathcal{P}^{1/m}$ является псевдодифференциальным оператором первого порядка и его собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda^{1/m}$, является также собственной функцией для $\mathcal{P}$, соответствующей собственному значению λ , а главным и субглавным символом оператора $\mathcal{P}^{1/m}$ являются функции

$$p^{1/m}(x, \xi) \quad \text{и} \quad \frac{1}{m} p^{1-m/m}(x, \xi) \text{sub}(x\xi)$$

(и, в частности, $\text{sub}(\mathcal{P}^{1/m}) = 0$ равносильно тому, что $\text{sub}(\mathcal{P}) = 0$).

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать оператор $\mathcal{P}^{1/2}$. Так как гамильтонов поток, определяемый главным символом оператора первого порядка, является потоком на расслоении единичных косфер и для оператора первого порядка соответствующая унитарная группа $t \rightarrow e^{-it\mathcal{P}^{1/2}}$ является разрешающим оператором для гиперболического уравнения $(D_t + \mathcal{P}^{1/2})u = 0$ (здесь $D_t = (1/i)\partial/\partial t$), то рассмотрение именно оператора $\mathcal{P}^{1/2}$ – упрощение как с геометрической, так и с аналитической точек зрения.

Рассмотрим гамильтонову систему T^*ML , порожденную главным символом оператора $\mathcal{P}^{1/2}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{\partial p^{1/2}(x, \xi)}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} = -\frac{\partial p^{1/2}(x, \xi)}{\partial x}, \end{cases} \quad (3.7)$$

состоящую из $2n$ уравнений, (x, ξ) – координаты в T^*ML , индуцированные некоторой локальной системой координат в ML . Известно, что векторное поле $H_{p^{1/2}}$ на T^*ML , определяемое правыми частями в (3.7), не зависит от выбора локальных координат в ML .

Введем в рассмотрение гамильтонов поток $F^t(x, \xi)$, являющийся множеством траекторий гамильтонова поля $H_{p^{1/2}}$ (действие потока $F^t(x, \xi)$, $-\infty < t < +\infty$, состоит в том, что любая точка $(x, \xi) \in T^*ML$ переходит в точку $(x(t), \xi(t)) \in T^*ML$,

являющуюся значением в момент времени t решения системы (3.7) с начальными условиями $x(0) = x$, $\xi(0) = \xi$.

В нашем случае гамильтонов поток удовлетворяет следующим условиям [3].

УСЛОВИЕ 1. Все траектории гамильтонова поля $H_{p^{1/2}}$ замкнуты и имеют наименьший общий период T .

Таким образом, проекции траекторий $H_{p^{1/2}}$ (бихарактеристики оператора $\mathcal{P}$) на ML являются простыми замкнутыми кривыми без самопересечений, и при любых фиксированных (x, ξ) поток $F^t(x, \xi)$ периодичен по t с наименьшим периодом T .

УСЛОВИЕ 2. Выполнено $\beta(T, x, \xi) \equiv \beta_0 = \text{const}$ на $T^*ML \setminus \{0\}$.

Здесь $\beta(T, x, \xi)$ – сдвиг фазы для замкнутой траектории

$$\gamma = F^t x, \xi, \quad 0 \leq t < T, \quad \text{где} \quad F^T(x, \xi) = (x, \xi),$$

определен как

$$\beta(T, x, \xi) = \beta_c(T, x, \xi) + \beta_s(T, x, \xi),$$

где

$$\beta_s(T, x, \xi) = - \left[\frac{1}{2} \int_0^T p^{-1/2}(F^t(x, \xi)) \text{sub}(F^t(x, \xi)) dt \right]_{2\pi}, \quad \beta_c(T, x, \xi) = \frac{\alpha\pi}{2};$$

здесь $[\cdot]_{2\pi}$ – вычет по модулю 2π , α – индекс Маслова траектории γ .

Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что $\beta_0 = 0$. Тогда известно [1], что все собственные значения $\lambda_k^{1/2}$ оператора $P^{1/2}$, начиная с некоторого номера k_0 , содержатся в объединении интервалов (кластеров)

$$I_k = \left(\frac{2\pi k}{T} - \frac{C}{k}, \frac{2\pi k}{T} + \frac{C}{k} \right) \quad (3.8)$$

при некотором $C > 0$. Причем, количество N_k собственных значений, лежащих в одном кластере (3.8), является многочленом от k степени $n - 1$. Его явный вид можно найти, например, в [3; § 29.2].

Для собственных значений оператора $\mathcal{P}$ мы будем также использовать двойную нумерацию λ_{ki} , $i = 1, \dots, N_k$, определяемую следующим образом: индекс k указывает, в какой интервал I_k попадает $\lambda^{1/2}$, а все собственные числа, отвечающие одному индексу k , нумеруются индексом i в порядке возрастания. Для первых собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{k_0}$ двойная нумерация определяется произвольно. Из работы Вейнштейна [2] следует, что для собственных чисел оператора $-\Delta + q$ имеет место следующая оценка:

$$|\lambda_{ki} - k(k+1)| = O(1), \quad (3.9)$$

и кратность собственных значений, для которых выполняется (3.9), равна $N_k = 2k + 1$.

Положим $\mu_{ki} = \lambda_{ki} - k(k+1)$, где $i = 0, \dots, 2k$. Имеет место асимптотическое разложение при $k \rightarrow \infty$ (см., например, [19]):

$$\sum_{i=0}^{2k} \mu_{ki} = c_0(2k+1) + c_1 + c_2(2k+1)^{-1} + O(k^{-2}), \quad (3.10)$$

а значит, и

$$\sum_{i=0}^{2k} \lambda_{ki} = (2k+1)k(k+1) + c_0(2k+1) + c_1 + c_2(2k+1)^{-1} + O(k^{-2}). \quad (3.11)$$

Из последней формулы видно, что для вычисления первого следа нам необходимо знать коэффициенты c_0, c_1, c_2 .

Рассмотрим ряды Дирихле

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)e^{-k(k+1)t}, \\ F_0(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t}, \\ F_{-1}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-1}e^{-k(k+1)t}. \end{aligned}$$

Можно показать (см., например, [14]), что при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} F_1(t) &= t^{-1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}t + O(t^2), \\ F_0(t) &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}t^{-1/2} + O(1), \\ F_{-1}(t) &= -\ln t + O(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим далее

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k t}.$$

Поскольку $\lambda_k \sim k$, то $F(t)$ равномерно сходится при $0 < t_0 \leq t < +\infty$ для любого t_0 . Тогда

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} e^{-\lambda_{ki}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} e^{-(k(k+1)+\mu_{ki})t} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \sum_{i=0}^{2k} e^{-\mu_{ki}t}.$$

Для внутренней суммы воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \sum_{i=0}^{2k} e^{-\mu_{ki}t} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \left(2k+1 - t \sum_{i=0}^{2k} \mu_{ki} + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{2k} e^{-\mu_{ki}\xi t} \right), \quad (3.12)$$

где $0 < \xi < 1$. Так как из (3.9) следует, что $|\mu_{ki}| = O(1)$, можем записать оценку при $t \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{t^2}{2} e^{-k(k+1)t} \sum_{i=0}^{2k} e^{-\mu_{ki}\xi t} \right| < c \sum_{k=0}^{\infty} t^2 e^{-k(k+1)t} (2k+1),$$

где $c > 0$ – некоторая константа. Так как

$$\max_{t \in [0, \infty)} t^2 e^{-k(k+1)t} = \left(\frac{2}{ek(k+1)} \right)^2,$$

то исследуемый ряд равномерно сходится при $t \in [0, \infty)$ и, значит, есть $o(1)$ при $t \rightarrow +0$. Тогда (3.12) примет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \sum_{i=0}^{2k} e^{-\mu_{ki}t} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} (2k+1) - t \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \left(\sum_{i=0}^{2k} \mu_{ki} \right) + o(1).$$

Подставляя сюда (3.10), получим при $t \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \sum_{i=0}^{2k} e^{-\mu_{ki}t} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} (2k+1) - c_0 t \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} (2k+1) \\ & \quad - c_1 t \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} - c_2 t \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} (2k+1)^{-1} + t \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} O(k^{-2}) + o(1). \end{aligned}$$

Отмечая, что

$$t \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} O(k^{-2}) = O(t) \quad \text{при } t \rightarrow +0,$$

получаем

$$F(t) = F_1(t) - c_0 t F_1(t) - c_1 t F_0(t) - c_2 t F_{-1}(t) + O(t),$$

и, окончательно,

$$F(t) = t^{-1} + \frac{1}{3} - c_0 - c_1 t^{1/2} + c_2 t \ln t + O(t) \quad (3.13)$$

при $t \rightarrow +0$.

Дальше нам потребуется следующий факт общей теории псевдодифференциальных операторов (ПДО) (см., например, [20]): для эллиптического ПДО B положительного порядка m , полуограниченного снизу, с самосопряженной главной частью, действующего на компактном многообразии размерности n , существует разложение

$$Tr(e^{-tB}) = \sum_{j=0}^N t^{(j-n)/m} (\eta_j + \tilde{\eta}_j \ln t) + O(t^{(N-n)/m} \ln t), \quad t \rightarrow +0, \quad (3.14)$$

верное для всех N , причем $\tilde{\eta}_j = 0$ для всех $j \leq 0$. Вычислить коэффициенты η_j и $\tilde{\eta}_j$ можно с помощью детального исследования дзета-функции ПДО (см. [18]). В частности, отсюда следует, что если оператор B дифференциальный, то $\tilde{\eta}_j = 0$ для всех j .

Тем самым, с помощью (3.14) для оператора $\mathcal{A}$, который является самосопряженным расширением оператора $-\Delta + q$ в $L^2_\rho(ML)$, можем выписать асимптотику его θ -функции, которая, в свою очередь, совпадает с $F(t)$:

$$F(t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j t^{(j-2)/2}. \quad (3.15)$$

Хорошо известно, что θ -функция и ζ -функция связаны преобразованием Меллина, и можно показать (см. [17]), что η_j при $j = 0$ и $j = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, вычисляются через вычеты аналитического продолжения ζ -функции γ_j в точках $z_j = (j - 2)/2$ по формуле

$$\gamma_j = -\frac{i}{8\pi^2} \iint_{ML} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \lambda^{(j-2)/2} b_{-2-j}^{(0)}(v_2, v_3, \xi(\alpha), \eta(\alpha), \lambda) d\lambda d\alpha dv_2 dv_3, \quad (3.16)$$

а при $j = 2k + 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, – через значения аналитического продолжения ζ -функции $\varkappa_j$ в точках $z_j = (j - 2)/2 = l$ по формуле

$$\varkappa_l = \zeta_{\mathcal{A}}(l) = (-1)^l \frac{1}{8\pi^2} \iint_{ML} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^l b_{-2l-4}^{(0)}(v_2, v_3, \xi(\alpha), \eta(\alpha), -r) dr d\alpha dv_2 dv_3. \quad (3.17)$$

Коэффициенты $b_{-2-j}^{(0)}$ – компоненты разложения символа резольвенты оператора $-\Delta + q - \lambda I$, определяются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} a_2(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda) b_{-2}^{(0)}(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda) = 1, \\ a_2(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda) b_{-2-j}^{(0)}(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda) \\ + \sum_{\substack{k+l+|\alpha|=j \\ l < j}} \partial_{(\xi, \eta)}^\alpha a_{2-k}(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda) D_{(v_2, v_3)}^\alpha \frac{b_{-2-l}^{(0)}(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda)}{\alpha!} = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где k, l – индексы, α – мультииндекс, $D_x = (1/i)\partial/\partial x$, $b_i^{(0)}(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda)$ – искомые компоненты символа параметрикса оператора $-\Delta + q - \lambda I$, $a_i(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda)$ – однородные компоненты символа $a(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda)$ оператора $-\Delta + q - \lambda I$, полученные из однородных компонентов (3.3) символа $a(v_2, v_3, \xi, \eta)$ оператора $-\Delta + q$ следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda) &= a_0(v_2, v_3, \xi, \eta) = q(v_2, v_3), \\ a_1(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda) &= a_1(v_2, v_3, \xi, \eta) = \frac{2iQ'(v_2)}{v_2 - v_3} \xi - \frac{2iR'(v_3)}{v_2 - v_3} \eta, \\ a_2(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda) &= a_2(v_2, v_3, \xi, \eta) - \lambda = -\frac{4Q(v_2)}{v_2 - v_3} \xi^2 + \frac{4R(v_3)}{v_2 - v_3} \eta^2 - \lambda. \end{aligned}$$

Так как

$$a_2(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda) = -\frac{4Q(v_2)}{v_2 - v_3} \xi^2 + \frac{4R(v_3)}{v_2 - v_3} \eta^2 - \lambda,$$

из первого уравнения (3.18) сразу получим

$$b_{-2}^{(0)}(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda) = \frac{v_2 - v_3}{-4Q(v_2)\xi^2 + 4R(v_3)\eta^2 - \lambda v_2 + \lambda v_3}, \quad (3.19)$$

а воспользовавшись вторым уравнением (3.18), сможем последовательно получить все $b_{-2-j}^{(0)}(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda)$, $j = 1, 2, \dots$, а затем вычислить соответствующие значения и вычеты аналитического продолжения ζ -функции.

В частности, проводя такое исследование, можно показать, что все вычеты γ_j при $j = 2k + 1$, $k = 0, 1, \dots$, равны нулю, что в силу сказанного выше равносильно

равенству нулю η_j при $j = 2k + 1$, $k = 0, 1, \dots$ (т.е. коэффициентов при дробных степенях t в разложении (3.15)), а значит, асимптотика θ -функции оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$F(t) \sim t^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j. \quad (3.20)$$

Сравнивая (3.13) и (3.20), получаем

$$a_0 = 1, \quad c_0 = \frac{1}{3} - a_1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0.$$

Значение a_1 вычисляется через значение аналитического продолжения ζ -функции оператора $\mathcal{A}$, и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2k} \lambda_{ki} - k(k+1)(2k+1) - c_0(2k+1) \right)$$

сходится абсолютно.

Для вычисления правой части этого ряда проведем следующие рассуждения:

$$\begin{aligned} F(t) - (1 - c_0 t)F_1(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{2k} (e^{-\lambda_{ki}t} - e^{-k(k+1)t}) + c_0 t(2k+1)e^{-k(k+1)t} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \left\{ \sum_{i=0}^{2k} (e^{-(\lambda_{ki} - k(k+1))t} - 1) + c_0 t(2k+1) \right\}. \end{aligned}$$

Для внутренней суммы воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Тогда

$$\begin{aligned} F(t) - (1 - c_0 t)F_1(t) &= -t \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \left(\sum_{i=0}^{2k} \lambda_{ki} - k(k+1)(2k+1) - c_0(2k+1) \right) \\ &\quad + \frac{t^2}{2!} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \left(\sum_{i=0}^{2k} (\lambda_{ki} - k(k+1))^2 \right) \\ &\quad + \frac{t^3}{3!} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \left(\sum_{i=0}^{2k} e^{-(\lambda_{ki} - k(k+1))\xi t} \right), \end{aligned}$$

где $0 < \xi < 1$. Так как из (3.9) следует, что $|\lambda_{ki} - k(k+1)| = O(1)$, то остаточный член при $t \in [0, 1]$ оценивается рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^3 e^{-k(k+1)t} (2k+1),$$

а так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} t^2 e^{-k(k+1)t} (2k+1)$ сходится равномерно и имеет оценку $o(1)$, то остаточный член имеет оценку $o(t)$ при $t \rightarrow +0$. Значит,

$$\begin{aligned} F(t) - (1 - c_0 t)F_1(t) &= - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \left(\sum_{i=0}^{2k} \lambda_{ki} - k(k+1)(2k+1) - c_0(2k+1) \right) t \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \left(\sum_{i=0}^{2k} (\lambda_{ki} - k(k+1))^2 \right) t^2 + o(t). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2k} \lambda_{ki} - k(k+1)(2k+1) - c_0(2k+1) \right) e^{-k(k+1)t} \\ &= \frac{1}{t} ((1 - c_0 t) F_1(t) - F(t)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(k+1)t} \left(\sum_{i=0}^{2k} (\lambda_{ki} - k(k+1))^2 \right) t + o(1). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части. Из [19] следует, что для внутреннего ряда при $k \rightarrow \infty$ верно

$$\sum_{i=0}^{2k} (\lambda_{ki} - k(k+1))^2 \sim (2\pi)^{-2} \left(k \int_{S^*ML} (q^{\text{av}})^2 dv + \dots \right),$$

где S^*ML – расслоение единичных сфер в кокасательном пространстве, dv – канонический элемент объема S^*ML ,

$$q^{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T (\exp t\Xi)^*(q) dt,$$

где Ξ – гамильтоново векторное поле на $T^*ML \setminus \{0\}$. Значит, второе слагаемое (3.21) можно переписать как

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^*ML} (q^{\text{av}})^2 dv \sum_{k=0}^{\infty} t k e^{-k(k+1)t}.$$

Можно показать (см., например, [14]), что при $t \rightarrow +0$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-k(k+1)t} = \frac{1}{2} t^{-1} + O(t^{-1/2})$$

и, значит,

$$\lim_{t \rightarrow +0} t \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-k(k+1)t} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда окончательно заключаем, что второе слагаемое правой части (3.21) при $t \rightarrow +0$ равно $(1/(16\pi^2)) \int_{S^*ML} (q^{\text{av}})^2 dv$.

Окончательно, переходя в (3.21) к пределу при $t \rightarrow +0$, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{2k} \lambda_{ki} - k(k+1)(2k+1) - c_0(2k+1) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} ((1 - c_0 t) F_1(t) - F(t)) + \frac{1}{16\pi^2} \int_{S^*ML} (q^{\text{av}})^2 dv \\ &= \frac{1}{15} - a_2 - \frac{c_0}{3} + \frac{1}{16\pi^2} \int_{S^*ML} (q^{\text{av}})^2 dv. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Напомним, что $c_0 = 1/3 - a_1$, а значит, для завершения вычислений осталось вычислить a_1 и a_2 . Как уже было сказано выше, эти коэффициенты с помощью

преобразования Меллина можно выразить через значения ζ -функции оператора $\mathcal{A}$, а именно: $a_1 = \zeta_{\mathcal{A}}(0)$, $a_2 = -\zeta_{\mathcal{A}}(1)$. Пользуясь (3.17), можно выписать явные формулы для вычисления необходимых значений:

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{A}}(0) &= \frac{1}{8\pi^2} \iint_{ML} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty b_{-4}^{(0)}(v_2, v_3, \xi(\alpha), \eta(\alpha), -r) dr d\alpha dv_2 dv_3, \\ \zeta_{\mathcal{A}}(1) &= -\frac{1}{8\pi^2} \iint_{ML} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r b_{-6}^{(0)}(v_2, v_3, \xi(\alpha), \eta(\alpha), -r) dr d\alpha dv_2 dv_3.\end{aligned}\quad (3.23)$$

С помощью (3.19) и второй формулы из (3.18), можно последовательно вычислить³ $b_{-3}^{(0)}(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda)$, $b_{-4}^{(0)}(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda)$, $b_{-5}^{(0)}(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda)$ и $b_{-6}^{(0)}(v_2, v_3, \xi, \eta, \lambda)$ и по формулам (3.23) окончательно получить

$$\begin{aligned}a_1 = \zeta_{\mathcal{A}}(0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{ML} \left(\frac{1}{3} \gamma(ML) - q(v_2, v_3) \right) \sqrt{\det g} dv_2 dv_3 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi} \iint_{ML} q(v_2, v_3) \sqrt{\det g} dv_2 dv_3,\end{aligned}\quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}a_2 = \zeta_{\mathcal{A}}(1) &= -\frac{1}{60\pi} \iint_{ML} (\Delta \gamma(ML) + \gamma^2(ML)) \sqrt{\det g} dv_2 dv_3 \\ &\quad - \frac{1}{24\pi} \iint_{ML} \left(\Delta q(v_2, v_3) + 3q^2(v_2, v_3) - 2q(v_2, v_3) \gamma(ML) \right) \sqrt{\det g} dv_2 dv_3;\end{aligned}\quad (3.25)$$

в этих выражениях

$$\gamma(ML) = \frac{2(R(v_3) - Q(v_2)) + (v_2 - v_3)(R'(v_3) + Q'(v_2))}{(v_2 - v_3)^3}$$

– гауссова кривизна ML и

$$\sqrt{\det g} = \frac{v_2 - v_3}{4\sqrt{-Q(v_2)R(v_3)}}$$

– корень из определителя матрицы метрического тензора.

ЗАМЕЧАНИЕ. Последнее равенство в (3.24) возможно, так как

$$\iint_{ML} \gamma(ML) \sqrt{\det g} dv_2 dv_3 = 2\pi \chi(ML),$$

где $\chi(ML)$ – характеристика Эйлера, которая в данном случае равна 2.

Теперь, подставляя a_1 и a_2 в (3.22), можем окончательно сформулировать главный результат этой работы.

³Все эти компоненты были посчитаны, но выражения для них громоздки и привести их в данной работе не представляется возможным.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ML – многообразие, заданное некоторым функциональным семейством гладких почти лиувиллевых метрик на сфере и определенное формулами (2.2), (2.3). Если q – бесконечно-дифференцируемая вещественнозначная функция на ML , то для собственных чисел оператора $A = \Delta + q$ верно равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2k} \left(\lambda_{ki} - k(k+1) - \frac{1}{4\pi} \iint_{ML} q(v_2, v_3) \sqrt{\det g} \, dv_2 \, dv_3 \right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{S^*ML} (q^{\text{av}})^2 \, dv - \frac{1}{60\pi} \iint_{ML} (\Delta\gamma(ML) + \gamma^2(ML) - \gamma(ML)) \sqrt{\det g} \, dv_2 \, dv_3 \\ & \quad - \frac{1}{24\pi} \iint_{ML} (\Delta q(v_2, v_3) + 3q^2(v_2, v_3) - 2q(v_2, v_3)(\gamma(ML) - 1)) \sqrt{\det g} \, dv_2 \, dv_3, \end{aligned}$$

где

$$\gamma(ML) = \frac{2(R(v_3) - Q(v_2)) + (v_2 - v_3)(R'(v_3) + Q'(v_2))}{(v_2 - v_3)^3}$$

– гауссова кривизна ML ,

$$\sqrt{\det g} = \frac{v_2 - v_3}{4\sqrt{-Q(v_2)R(v_3)}}$$

– корень из определителя матрицы метрического тензора, S^*ML – расслоение единичных сфер в кокасательном пространстве, dv – каноническая форма объема на S^*ML , а q^{av} – символ усреднения на ML ($q^{\text{av}} = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} (\exp t\Xi)^*(q) \, dt$, где Ξ – гамильтоново векторное поле на кокасательном расслоении $T^*ML \setminus \{0\}$, определяемое римановой структурой на ML).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. J. Duistermaat, V. Guillemin, “The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics”, *Invent. Math.*, **29**:1 (1975), 39–79.
- [2] A. Weinstein, “Fourier integral operators, quantization, and spectra of Riemannian manifolds”, *Géométrie symplectique et physique mathématique* (Aix-en-Provence, 1974), Colloq. Internat. CNRS, **237**, Éditions Centre Nat. Recherche Sci., Paris, 289–298.
- [3] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье, Мир, М., 1986; Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, Мир, М., 1986; Т. 3. Псевдодифференциальные операторы, Мир, М., 1987; Т. 4. Интегральные операторы Фурье, Мир, М., 1988.
- [4] V. Guillemin, “Some spectral results on rank one symmetric spaces”, *Adv. Math.*, **28**:2 (1978), 129–137.
- [5] V. Guillemin, “An Addendum to: Some spectral results on rank one symmetric spaces”, *Adv. Math.*, **28**:2 (1978), 138–147.
- [6] V. Guillemin, “Some spectral results for the Laplace operator with potential on the n -sphere”, *Adv. Math.*, **27**:3 (1978), 273–286.
- [7] V. Guillemin, “Band asymptotics in two dimensions”, *Adv. Math.*, **42**:3 (1981), 248–282.
- [8] А. Л. Бессе, *Многообразия с замкнутыми геодезическими*, Мир, М., 1980.
- [9] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [10] H. Widom, “The Laplace operator with potential on the 2-sphere”, *Adv. Math.*, **31**:1 (1979), 63–66.

- [11] В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, “Классическая формула регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с нечетным потенциалом на сфере S^2 ”, *ДАН СССР*, **319**:1 (1991), 61–62.
- [12] В. Е. Подольский, “Формула регуляризованного следа оператора Лапласа–Бельтрами с нечетным потенциалом на сфере S^2 ”, *Матем. заметки*, **56**:1 (1994), 71–77.
- [13] А. Н. Бобров, В. Е. Подольский, “Сходимость регуляризованных следов степени оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на сфере S^n ”, *Матем. сб.*, **190**:10 (1999), 3–16.
- [14] V. E. Podol'skii, “On the summability of regularized sums of eigenvalues of the Laplace–Beltrami operator with potential on symmetric spaces of rank one”, *Russian J. Math. Phys.*, **4**:1 (1996), 123–130.
- [15] А. Н. Бобров, “Регуляризованные следы высших порядков оператора Лапласа–Бельтрами с потенциалом на симметрических пространствах ранга 1”, *Дифференц. уравнения*, **33**:6 (1997), 800–804.
- [16] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Т. 2, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999.
- [17] М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Наука, М., 1978.
- [18] R. T. Seeley, “Complex powers of an elliptic operator”, *Singular Integrals*, Proc. Sympos. Pure Math., **10**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1967, 288–307.
- [19] V. Guillemin, A. Uribe, “Spectral properties of a certain class of complex potentials”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **279**:759–771 (1983).
- [20] М. Тейлор, *Псевдодифференциальные операторы*, Мир, М., 1985.

Т. В. Зыкова

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: zytanya@yandex.ru

Поступило

18.02.2011