Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Магомедов, О существовании компромиссного разбиения для частично-4-однородного графа, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 3, 378–383

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9047>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 04:58:27

О существовании компромиссного разбиения для частично-4-однородного графа

А. М. Магомедов

Рассматривается граф G , степени $2k$ вершин которого равны 5, степени k вершин – 2, степени остальных вершин – 4. В связи с задачей оптимизации расписания исследованы необходимые и достаточные условия существования такого разбиения G на два реберно-непересекающихся остовных подграфа с равномошными наборами ребер, что для каждой вершины графа количества инцидентных ребер, отнесенных к этим подграфам, разнятся не более чем на единицу.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Следуя подходу, принятому в [1], будем считать, что граф может содержать кратные ребра и петли.

В [2] рассмотрена следующая задача составления расписания. Пусть $L = \{1, \dots, l\}$ и $N = \{1, \dots, n\}$ – множества преподавателей и учебных групп соответственно ($1 \leq n \leq l$), $M = \{1, \dots, m\}$ – множество академических часов, отведенных расписанию. Каждому преподавателю i определена нагрузка в виде двухэлементного набора ω_i из номеров учебных групп, где он должен провести занятия в *последовательные* академические часы. Структура нагрузок такова, что каждая учебная группа должна учиться подряд все m часов множества M (“условие равной загруженности”). Естественно, два разных преподавателя не могут одновременно проводить занятие в одной и той же учебной группе, преподаватель не может одновременно проводить занятие в двух разных группах. Используя критерий Петерсена [3] разбиения графа на 2-факторы (*связный граф 2-факторизуем тогда и только тогда, когда он является однородным графом четной степени*), в [2] доказано, что расписание с описанными выше свойствами существует тогда и только тогда, когда m четно.

В задаче, рассмотренной в [4], условия равной загруженности предполагаются также выполненными, но нагрузки некоторых преподавателей представлены одноэлементными, а нагрузки остальных преподавателей – двухэлементными наборами; соответствующие семейства наборов обозначаются W_1 и W_2 , $W \stackrel{\text{def}}{=} W_1 \cup W_2$, количество вхождений элемента u в семейство U обозначается $\text{гер}_U u$. Задача составления

Статья написана при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-96504-р_юг_а).

расписания формулируется как задача построения матрицы (r_{ik}) , $i \in L$, $k \in M$, $r_{ik} \in \{0, 1, \dots, n\}$, удовлетворяющей условиям

- (1) для любого $\omega_i \in W$ найдется в точности $\text{гер}_W \omega_i$ строк, в каждой из которых набор ненулевых элементов равен ω_i ;
- (2) номера учебных групп из набора $\omega_i \in W_2$ размещаются в соседних ячейках строки;
- (3) ненулевые элементы каждого столбца попарно различны.

Понятно, что из последнего условия и из условия равной загруженности следует, что ненулевые элементы каждого столбца образуют множество N . Одна характерная ситуация, когда расписание подобного типа не существует, рассмотрена в [5].

Интерпретация: “ $r_{ik} = j$, $j \in N$ ” – занятие преподавателя i в учебной группе j в k -й час, “ $r_{ik} = 0$ ” – у преподавателя i нет занятия в k -й час.

Семейство W_2 и граф $G(W_2) = (V, E)$, где $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ – множество вершин, E – множество ребер, будем называть *ассоциированными*, если любые две вершины $v_i, v_j \in V$ соединены $\text{гер}_{W_2}(i, j)$ ребрами.

Суть предложенного в [4] подхода к составлению расписания для случая, когда $W_1 = N$ и $m = 2p - 1$ ($p = 2, 3, \dots$), заключается в следующем: выполняется разбиение графа $G(W_2)$ на $p - 1$ остовных 2-однородных подграфов, затем наборы k -го подграфа размещаются в столбцах $2k - 1$ и $2k$ матрицы, $k = 1, \dots, p - 1$, после чего составление расписания завершается добавлением элементов W_1 в последний столбец. Кроме того, при $m = 2p - 1$ доказано, что

- а) если в W_1 представлены все элементы из N , то расписание существует;
- б) в следующих двух случаях расписание не существует:
 - 1) $|W_1| < n$;
 - 2) $|W_1| = n$ и $\text{гер}_{W_1} j > p$ для некоторого $j \in N$.

При возрастании мощности семейства W_1 мощность семейства W_2 , согласно условию равной загруженности, убывает и задача составления расписания, вообще говоря, упрощается (вырождаясь при $W_2 = \emptyset$ в тривиальную). Из сказанного следует, что представляет интерес исследование условий существования расписания при следующих “пограничных условиях”:

$$|W_1| = n, \quad \text{гер}_{W_1} j \in \{0, 1, p\} \quad \text{для любого } j \in N.$$

Характерные для пограничных условий особенности проблемы выявляются, в общих чертах, уже при $p = 3$ ($m = 2p - 1 = 5$); всюду в дальнейшем предполагается, что пограничные условия выполнены и $p = 3$. Приведенное выше утверждение работы [2] является, по существу, “комбинаторной интерпретацией” критерия разбиения графа на 2-факторы, для нашего же случая соответствующий критерий неизвестен; его формулировка для графа $G(W_2)$ и является основной целью данной статьи.

2. Компромиссное разбиение для частично-4-однородного графа. Пусть $W_1^k \stackrel{\text{def}}{=} \{j \in W_1 : \text{гер}_{W_1} j = k\}$. Тогда пограничные условия означают, что

$$3|W_1^3| + (|W_1| - |W_1^0| - |W_1^3|) = |W_1|$$

и, следовательно, $|W_1^0| = 2|W_1^3|$. Согласно условию равной загруженности, $\text{гер}_{W_2} j$ равно 2, 5 и 4, если j содержится соответственно в W_1^3 , W_1^0 и W_1^1 . Другими словами,

степень вершины v_j в графе $G(W_2)$ равна 2, 5 и 4 в зависимости от принадлежности j подмножествам W_1^3 , W_1^0 и W_1^1 .

Граф $G = (V, E)$ порядка n будем называть *частично-4-однородным*, если множество вершин V допускает такое упорядочение $\{v_1, \dots, v_n\}$, что при некотором κ

$$d_G v_i = \begin{cases} 5 & \text{при } 1 \leq i \leq 2\kappa, \\ 2 & \text{при } 2\kappa < i \leq 3\kappa, \\ 4 & \text{при } 3\kappa < i \leq n. \end{cases}$$

Предполагая, что вершины упорядочены нужным образом, частично-4-однородный граф G будем обозначать $G(V_\kappa, V, E)$, где $V_\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \{v_1, \dots, v_{2\kappa}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для частично-4-однородного графа $G(V_\kappa, V, E)$ выполняется равенство $|E| = 2|V|$.

Под *разбиением* $h = \{G_i(V, E_i), i = 1, 2\}$ графа $G(V, E)$ подразумевается разбиение графа G на остовные реберно-непересекающиеся подграфы $G_1(V, E_1)$, $G_2(V, E_2)$.

При заданном разбиении $h = \{G_i(V, E_i), i = 1, 2\}$ графа $G(V, E)$ обозначим

$$c_h(v) \stackrel{\text{def}}{=} d_{G_1} v - d_{G_2} v, \quad e_h(G) \stackrel{\text{def}}{=} |E_1| - |E_2|.$$

Разбиение $h = \{G_i(V, E_i), i = 1, 2\}$ графа $G(V, E)$ будем называть *компромиссным*, если

$$|c_h(v)| \leq 1 \quad \text{для всех } v \in V \quad \text{и} \quad e_h(G) = 0.$$

ЛЕММА 1. Пусть эйлеров граф $G = (V, E)$ содержит четное число ребер. Тогда G допускает такое разбиение h на остовные реберно-непересекающиеся подграфы, что $c_h(v) = 0$ для любого $v \in V$ и, следовательно, $e_h(G) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начиная с произвольной вершины $v' \in V$, выполним в графе G обход эйлера цикла, пометая последовательные ребра цикла метками 1 и 2 попеременно, и построим разбиение $h = \{G_i(V, E_i), i = 1, 2\}$ графа G на остовные реберно-непересекающиеся подграфы, включив в E_i ребра, помеченные меткой i ($i = 1, 2$). Так как при прохождении вершины $v \in V \setminus \{v'\}$ два инцидентных v ребра помечаются разными метками, то $c_h(v) = 0$. Из четности $|E|$ следует, что и $c_h(v') = 0$. Таким образом, равенство $c_h(v) = 0$ справедливо для любой вершины $v \in V$; отсюда вытекает и равенство $e_h(G) = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть G – частично-4-однородный граф и $G' = (V', E')$ – его связная компонента, содержащая вершины степени 5. Тогда G' допускает такое разбиение h на остовные реберно-непересекающиеся подграфы, что

- $|c_h(v)| \leq 1$ для любого $v \in V'$;
- если $|E'|$ четно, то $e_h(G') = 0$, иначе $e_h(G') = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число вершин в подмножестве V'' , образованном вершинами графа G' , имеющими степень 5, четно. Построим G' до эйлера графа, для чего разобьем V'' на подмножества $\{v_a, v_A\}$ по две вершины в каждом и добавим в G' новую вершину v_α и новые ребра (v_a, v_α) и (v_A, v_α) для каждого $\{v_a, v_A\}$. Для обхода эйлера цикла C с помечиванием последовательных ребер попеременно метками 1 и 2 выберем в качестве начальной вершины произвольную новую вершину v' ,

а в качестве начального ребра для помечивания (меткой 2) – любое из двух ребер, инцидентных вершине v' .

При четном $|E'|$ как в C , так и среди ребер, инцидентных произвольной вершине цикла C , имеется поровну ребер, помеченных 1 и 2. Если $|E'|$ нечетно, то количество ребер цикла C , помеченных меткой 2, на единицу больше, нежели помеченных 1: оба ребра, смежных вершине v' , помечены 2, а среди ребер, инцидентных любой другой вершине, – поровну ребер, помеченных 1 и 2.

Если удалить новые элементы и построить для G' разбиение $h = \{G'_i(V', E'_i), i = 1, 2\}$, где E'_i – подмножество ребер E' , помеченных меткой i ($i = 1, 2$), то

- $|d_{G'_1} v - d_{G'_2} v| \leq 1$ для всех $v \in V$;
- если $|E'|$ четно, то $e_h(G') = 0$, иначе $e_h(G') = 1$.

Последнее следует из того, что при нечетном $|E'|$ оба новых ребра, инцидентных вершине v' , помечены меткой 2; после удаления новых элементов, напротив, ребер, помеченных меткой 1, будет на одно больше. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Простой перенумерацией G'_1 и G'_2 в формулировке леммы 1 можно заменить равенство $e_h(G') = 1$ на $-e_h(G') = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если количество ребер в связной компоненте H частично-4-однородного графа $G(V_\kappa, V, E)$ четно, то H допускает компромиссное разбиение.

ТЕОРЕМА 1. Связный частично-4-однородный граф всегда допускает компромиссное разбиение. Несвязный частично-4-однородный граф $G(V_\kappa, V, E)$ допускает компромиссное разбиение тогда и только тогда, когда в каждой связной компоненте графа G , не содержащей вершин множества V_κ , количество ребер четно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 1 в случае связного частично-4-однородного графа G мы оказываемся в условиях следствия 1, поэтому G допускает компромиссное разбиение. Докажем утверждение теоремы для случая, когда граф G является несвязным.

Необходимость. Пусть частично-4-однородный граф $G(V_\kappa, V, E)$ допускает компромиссное разбиение $h = \{G_i(V, E_i), i = 1, 2\}$, $G'(V', E')$ – связная компонента графа G , $V' \cap V_\kappa = \emptyset$. Так как все вершины G' имеют четные степени, то выполнение неравенств $|c_h(v)| \leq 1$ для всех вершин $v \in V'$ равносильно выполнению равенств $c_h(v) = 0$ для всех $v \in V'$. Следовательно, $|E'|$ четно.

Достаточность. Пусть для каждой связной компоненты $G'(V', E')$ частично-4-однородного графа $G(V_\kappa, V, E)$, удовлетворяющей условию $V' \cap V_\kappa = \emptyset$, выполнено условие четности $|E'|$. Докажем, что G допускает компромиссное разбиение. Согласно следствию 1, если в графе G множество G_0 связных компонент, имеющих нечетное количество ребер, пусто, то доказательство закончено.

Рассмотрим случай, когда G_0 непусто. Так как $|E|$ четно (замечание 1), число всех ребер в связных компонентах из G_0 четно. Поэтому количество компонент в G_0 равно некоторому четному s . Разобьем компоненты подграфа G_0 на пары $\{G_{i1}(V_{i1}, E_{i1}), G_{i2}(V_{i2}, E_{i2})\}$, где i пробегает значения от 1 до $s/2$. В соответствии с леммой 2 (и замечанием 2) построим для каждого G_{ij} разбиение h_{ij} на основные реберно-непересекающиеся подграфы так, чтобы $e_{h_{i1}}(G_{i1}) = -e_{h_{i2}}(G_{i2}) = 1$ и $|c_{h_{ij}}(v)| \leq 1$ для любого $v \in V_{ij}$ и $j = 1, 2$. В результате получим компромиссное разбиение для G_0 . Теорема доказана.

При $\kappa = 0$ теорема вырождается в утверждение о 2-факторизации 4-однородного графа, которое вытекает из критерия Петерсена.

3. Применение к построению расписания. Как следует из результатов [2], для набора нагрузок, ассоциированного со связной компонентой частично-4-однородного графа $G(V_k, V, E)$, не содержащей вершин из множества V_k , всегда существует расписание из 4-х столбцов.

Поэтому всюду в дальнейшем можно считать, что граф $G(V_k, V, E)$ связный и $V_k \neq \emptyset$. Тогда согласно теореме 1 существует компромиссное разбиение

$$h = \{G_i(V, E_i), i = 1, 2\}. \quad (*)$$

Принципиальную схему применения компромиссного разбиения для построения расписания рассмотрим для простого случая, когда G_1 и G_2 в $(*)$ являются связными графами.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $W = W_1 \cup W_2$ – такой набор нагрузок, что $|W_1| = |N|$ и $\text{гер}_{W_1} j = \{0, 1, 3\}$ для любого $j \in N$. Предположим, что частично-4-однородный граф $G = G(W_2)$, ассоциированный с семейством W_2 , является связным и, более того, остовные реберно-непересекающиеся подграфы G_1 и G_2 в некотором компромиссном разбиении $(*)$ графа G также связны. Тогда для набора нагрузок W существует расписание, обладающее свойствами (1)–(3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в компромиссном разбиении $(*)$ $|E_1| = |E_2| = |E|/2$ с учетом равенства $2|V| = |E|$ получим: $|V| = |E_1| = |E_2|$. Равенство числа ребер числу вершин в связном графе G_1 означает, что G_1 содержит единственный цикл C_1 , к некоторым вершинам которого, быть может, “прикреплены” деревья (в случае существования, такие вершины будем называть *аттракторами*); так как степень любой вершины графа G_1 не превышает 3, степень каждого аттрактора равна 3, к каждому из них “прикреплено” точно одно дерево.

Выполним ориентацию ребер в G_1 (за полученным ориентированным графом сохраняется прежнее обозначение):

- выберем направление обхода цикла C_1 , ориентируя тем самым его ребра;
- для каждого аттрактора ориентируем ребра соответствующего дерева так, чтобы получить ориентированное корневое дерево с корнем в данном аттракторе (ясно, что это можно сделать единственным образом).

Для каждой дуги (v_i, v_j) полученного ориентированного графа G_1 введем новую вершину v_{ij} и, представляя из соображений наглядности, что вершина v_{ij} расположена “в середине” дуги (v_i, v_j) , введем в рассмотрение дуги (v_i, v_{ij}) и (v_{ij}, v_j) , которые будем называть соответственно *начальной половиной* (инцидентной вершине v_i) и *конечной половиной* (инцидентной вершине v_j) дуги (v_i, v_j) .

Выполним помечивание половин каждой дуги (v_i, v_j) :

- конечную половину пометим “2”;
- если из вершины v_i ориентированного графа G_1 выходит единственная дуга, то ее начальную половину пометим “1”, если же из вершины v_i выходят две дуги, то начальную половину любой из них пометим “1”, а начальную половину другой – “3” (поскольку полустепень захода для каждой вершины ориентированного графа G_1 равна 1 и степень вершины не превышает 3, вершину v_i могут иметь своим началом не более чем две дуги).

Начнем построение расписания, размещая для каждой дуги (v_i, v_j) ориентированного графа G_1 числа i и j в отдельной строке матрицы: i – в столбце с номером, равным метке начальной половины дуги (v_i, v_j) , а j – в столбце с номером 2. Поскольку метки половин каждой дуги разнятся на 1, числа i и j размещаются в соседних ячейках строки, а поскольку для любой вершины метки инцидентных половин дуг попарно различны, ненулевые элементы в каждом столбце также попарно различны.

Следующее простое замечание является ключевым для доказательства: *число i содержится в 3-м столбце в том и только в том случае, когда степень соответствующей вершины v_i в графе G_1 равна 3.*

Для завершения построения расписания проведем аналогичным образом помечивание для графа G_2 с той лишь разницей, что теперь роль меток “1”, “2” и “3” выполняют метки “5”, “4” и “3” соответственно, а результаты помечивания применяются для построения (начиная с $(n + 1)$ -й строки) соответственно 5-го и 4-го столбцов расписания, а также для достройки 3-го столбца. Понятно, что при этом в 3-й столбец не будет записано число i , ранее уже записанное туда по результатам помечивания графа G_1 : обратное означало бы, что степень вершины v_i равна 3 как в G_1 , так и в G_2 , что невозможно.

Двухэлементные наборы внесены в расписание. Теперь можно предъявить и полное расписание, включающее также наборы из W_1 . Действительно, после приведенного построения 1-й и 5-й столбцы будут содержать только элементы из множества $W_1^0 \cup W_1^1$, а 3-й столбец – только элементы из W_1^0 . Поэтому достаточно добавить все элементы j с $\text{гер}_{W_1} j = 3$ в каждый столбец с номером 1, 3 и 5, а затем расположить все элементы j с $\text{гер}_{W_1} j = 1$ в 3-м столбце.

Осталось записать 0 во все незаполненные ячейки матрицы.

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные и конструктивные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Сачков, *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*, Наука, М., 1982.
- [2] А. М. Магомедов, “Уплотнение расписания с директивным сроком, кратным количеству занятий каждого преподавателя”, *Матем. заметки*, **85:1** (2009), 65–72.
- [3] J. Petersen, “Die Theorie der regulären graphs”, *Acta Math.*, **15:1** (1891), 193–220.
- [4] А. М. Магомедов, “Размещение неделимых 2-слов в матрице как задача факторизации графа”, *Вестник Дагестанск. научн. центра*, 2006, № 23, 5–14.
- [5] А. М. Магомедов, “К вопросу о реберной раскраске двудольного графа”, *Дискрет. матем.*, **21:2** (2009), 153–158.

А. М. Магомедов

Дагестанский государственный университет

E-mail: magomedtagirl@yandex.ru

Поступило

30.11.2007

Исправленный вариант

11.03.2010