Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Похожаев, О некоторых весовых тождествах для
решений обобщенных уравнений Кортевега–де Фриза,
Матем. заметки, 2011, том 89, выпуск 3, 393–409

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9048>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 04:11:46

О некоторых весовых тождествах для решений обобщенных уравнений Кортевега–де Фриза

С. И. Похожаев

Рассматривается уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$$

и его обобщение

$$u_t + u_{xxx} + f(u)_x = 0.$$

Для решений этих уравнений выводятся весовые тождества (дифференциальные и интегральные).

На основании этих тождеств устанавливается разрушение за конечное время решений некоторых начально-краевых задач.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Хорошо известна роль интегральных тождеств в теории нелинейных уравнений. На основании таких тождеств устанавливаются не только качественные свойства решений, но и их количественные характеристики, в частности, априорные оценки рассматриваемых решений.

Стандартная техника получения таких тождеств основана, как правило, на использовании “интегрирующего” множителя и последующего интегрирования с учетом граничных и начальных условий. Существенным моментом при этом является выбор “интегрирующего” множителя.

Большое распространение получили в качестве “интегрирующего” множителя само решение или его производные. В итоге мы получаем класс коэрцитивных операторов относительно выбранного множителя, см., например, Лионс [1].

При анализе нестандартных задач, как правило, возникающих в физике, этих “классических” множителей оказывается недостаточно. Возникает проблема нахождения необходимых интегральных тождеств для получения количественной и качественной информации о поведении рассматриваемых решений. Однако общих методов нахождения таких необходимых интегральных тождеств не существует.

В настоящей статье на примере известного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) и его обобщений предлагается некоторый подход для нахождения таких тождеств.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00441, 09-01-12157_офи-м).

Этот подход основан на введении нелинейного множителя и весовой функции. При этом выбор нелинейного множителя определяется характером нелинейности самого уравнения. В то же время выбор весовой функции определяется характером граничных условий.

В статье приводятся весовые тождества двух видов – дифференциальные и им эквивалентные интегральные тождества. Это сделано с целью демонстрации применения этих тождеств. Дифференциальные тождества “работают напрямую” и дают характеристику функционала решения, обращающуюся в бесконечность, и оценку конечного времени разрушения решения.

Интегральные тождества “работают от противного” и имеют более универсальный характер и определенные преимущества перед “дифференциальным” подходом, см. [2].

В качестве приложения рассматриваются начально-краевые задачи для уравнения КдФ.

Вопросам разрешимости начально-краевых задач для уравнения КдФ посвящена значительная литература, см. [1], [3]–[7] и цитируемые там работы.

В отличие от этих интересных работ, посвященных глобальной разрешимости рассмотренных задач, в настоящей статье рассматривается проблема отсутствия глобальных решений начально-краевых задач для уравнения КдФ и, в частности, проблема разрушения локальных решений таких задач.

Содержание статьи следующее.

В п. 2 описывается постановка задачи. В пп. 3, 4 выводятся первые весовые дифференциальные и интегральные тождества относительно весовых функций для решений обобщенного уравнения КдФ. В п. 5 рассматриваются приложения предыдущих тождеств к проблеме разрушения локальных решений начально-краевых задач для уравнения КдФ и его некоторых обобщений.

Пункты 6, 7 посвящены тождествам высшего порядка. Основное тождество представлено в п. 8. Применению этого основного тождества к обобщенному уравнению КдФ посвящен п. 9.

В заключение следует отметить, что предлагаемые подходы к получению весовых тождеств применимы для более широкого класса нелинейных уравнений.

ЗАМЕЧАНИЕ К ОБОЗНАЧЕНИЯМ. Отметим, что в каждом пункте применяются обозначения для постоянных, в общем случае, независимые от предыдущих пунктов.

2. Постановка задачи. Рассмотрим обобщенное уравнение Кортевега–де Фриза (ОКдФ)

$$u_t + u_{xxx} + f(u)_x = 0 \quad (2.1)$$

при $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (2.2)$$

и некоторыми граничными условиями, которые будут конкретизированы ниже.

Относительно нелинейной функции f предполагаем всюду, что $f \in C^1(\mathbb{R})$. При этом в некоторых тождествах дополнительно предполагается, что $f \in C^2(\mathbb{R})$.

Относительно рассматриваемых решений предполагается их принадлежность соответствующему функциональному пространству, в котором выполнимы соответствующие операции при выводе соответствующих тождеств.

3. Первое дифференциальное тождество. Положим

$$H(t) = \int_{\Omega} h(u) \varphi(t, x) dx,$$

где $h \in C^3(\mathbb{R})$, $\varphi \in C_{t,x}^{1,3}(\mathbb{R}^2)$ и $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$.

Тогда для производной $H'_u(t)$ в силу уравнения (2.1) имеем

$$\frac{dH}{dt} = - \int_{\Omega} h'(u)(u_{xxx} + f(u)_x) \varphi dx + \int_{\Omega} h(u) \varphi_t dx.$$

Отсюда, интегрируя по частям, находим, что

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} = & \int_{\Omega} F_1(u) \varphi_x dx + \int_{\Omega} h(u) \mathcal{L} \varphi dx \\ & - \frac{3}{2} \int_{\Omega} h''(u) u_x^2 \varphi_x dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} h'''(u) u_x^3 \varphi dx + B(u, \varphi)|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1(u) &= \int_0^u f'(s) h'(s) ds, \quad \mathcal{L} \varphi = \varphi_t + \varphi_{xxx}, \\ B(u, \varphi) &= \left(-h'(u) u_{xx} + \frac{1}{2} h''(u) u_x^2 - F_1(u) \right) \varphi + h'(u) u_x \varphi_x - h(u) \varphi_{xx} \end{aligned}$$

и $B(u, \varphi)|_{\partial\Omega} = B(u, \varphi)|_{x=b} - B(u, \varphi)|_{x=a}$.

Из этого тождества вытекают следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $h(u) = u$. Тогда для

$$H_1(t) = \int_{\Omega} u \varphi(t, x) dx$$

имеем

$$\frac{dH_1}{dt} = \int_{\Omega} f(u) \varphi_x dx + \int_{\Omega} u \mathcal{L} \varphi dx + b_1(u, \varphi)|_{\partial\Omega}, \quad (3.2)$$

где $b_1(u, \varphi) = (-u_{xx} - f(u)) \varphi + u_x \varphi_x - u \varphi_{xx}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $h(u) = (1/2)u^2$. Тогда для

$$H_2(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \varphi(t, x) dx$$

имеем

$$\frac{dH_2}{dt} = \int_{\Omega} F_1(u) \varphi_x dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \mathcal{L} \varphi dx - \frac{3}{2} \int_{\Omega} u_x^2 \varphi_x dx + b_2(u, \varphi)|_{\partial\Omega}, \quad (3.3)$$

где $F_1(u) = \int_0^u s f'(s) ds$,

$$b_2(u, \varphi) = \left(-u u_{xx} + \frac{1}{2} u_x^2 - F_1(u) \right) \varphi + u u_x \varphi_x - \frac{1}{2} u^2 \varphi_{xx}.$$

4. Первое интегральное тождество. Интегрируя дифференциальное соотношение (3.1) по $t \in (0, T)$, получаем следующее интегральное тождество относительно пробных функций $\varphi \in C_{t,x}^{1,3}(Q) \cap C_{t,x}^{0,2}(\bar{Q})$ в $Q = (0, T) \times \Omega$ с $\varphi(T, x) \equiv 0$ в Ω :

$$\begin{aligned} \iint_Q F_1(u) \varphi_x dt dx = & \frac{1}{2} \iint_Q h'''(u) u_x^3 \varphi dt dx + \frac{3}{2} \iint_Q h''(u) u_x^2 \varphi_x dt dx \\ & - \iint_Q h(u) \mathcal{L} \varphi dt dx - \int_{\Omega} h(u_0) \varphi(0, x) dx - \int_0^T B(u, \varphi)|_{\partial\Omega} dt. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Отсюда вытекают следующие соотношения.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $h(u) = u$. Тогда имеем

$$\iint_Q f(u) \varphi_x dt dx = - \iint_Q u \mathcal{L} \varphi dt dx - \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(0, x) dx - \int_0^T b_1(u, \varphi)|_{\partial\Omega} dt. \quad (4.2)$$

Здесь граничный функционал $b_1(u, \varphi)$ определен в предыдущем пункте.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $h(u) = (1/2)u^2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \iint_Q F_1(u) \varphi_x dt dx = & \frac{3}{2} \iint_Q u_x^2 \varphi_x dt dx - \frac{1}{2} \iint_Q u^2 \mathcal{L} \varphi dt dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_0^2 \varphi(0, x) dx - \int_0^T b_2(u, \varphi)|_{\partial\Omega} dt. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь $F_1(u) = \int_0^u s f'(s) ds$ и граничный функционал $b_2(u, \varphi)$ определен в предыдущем пункте.

Отметим, что во всех тождествах этого пункта пробная функция φ принадлежит $C_{t,x}^{1,3}(Q) \cap C_{t,x}^{0,2}(\bar{Q})$ и удовлетворяет условию

$$\varphi(T, x) \equiv 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (4.4)$$

5. Первые приложения. Рассмотрим некоторые начально-краевые задачи для уравнения КдФ

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (5.1)$$

в области $Q_L = (0, T) \times \Omega_L$ с $\Omega_L = (0, L) \subset \mathbb{R}$ при начальном условии

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{в } \Omega_L \quad (5.2)$$

с $u_0 \in L^1(\Omega_L)$ и граничными условиями, указанными ниже.

ПРИМЕР 5.1. Пусть задано граничное условие при $x = L$ и $t > 0$ такое, что

$$\Gamma_L(u) := - \left[u_{xx}(t, L) + \frac{1}{2} u^2(t, L) \right] L^2 + l \cdot L \cdot u_x(t, L) - l(l-1)u(t, L) \geq 0 \quad (5.3)$$

при $t \in (0, T)$ с некоторым $l > 4$.

Пусть начальная функция u_0 удовлетворяет условию

$$H_1(0) = \int_{\Omega_L} u_0 x^l dx > \left(\frac{l-1}{(l+2)(l-4)} \right)^{1/2} l(l-2)L^{l-1}. \quad (5.4)$$

Тогда начально-краевая задача (5.1), (5.2) с таким граничным условием при $x = L$ не имеет глобального по $t > 0$ решения. Более того, не существует решения этой задачи при $t > T_*$, где

$$T_* = c_l L^3 \ln \frac{H_1(0) + b_L}{H_1(0) - b_L},$$

с

$$c_l = \left(\frac{(l-4)(l+2)}{l-1} \right)^{1/2} \frac{1}{(l+2)l(l-1)(l-2)}, \quad b_L = \left(\frac{l-1}{(l-4)(l+2)} \right)^{1/2} l(l-2)L^{l-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следствием 3.1 с функцией $\varphi = x^l$ при некотором $l > 4$.

Тогда для интеграла

$$H_1(t) = \int_{\Omega_L} u \varphi dx$$

имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{l}{2} \int_{\Omega_L} u^2 x^{l-1} dx + l(l-1)(l-2) \int_{\Omega_L} u \cdot x^{l-3} dx + b_1(u, \varphi)|_{\partial\Omega_L}. \quad (5.5)$$

В силу выбора функции φ находим, что

$$b_1(u, \varphi)|_{\partial\Omega_L} = L^{l-2} \cdot \Gamma_L(u),$$

и из условия (5.3) следует, что

$$b_1(u, \varphi)|_{\partial\Omega_L} \geq 0.$$

Далее, в силу стандартных неравенств Гёльдера и Юнга находим, что

$$\begin{aligned} l(l-1)(l-2) \left| \int_{\Omega_L} u \cdot x^{l-3} dx \right| &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_L} u^2 x^{l-1} dx + \frac{1}{2} \frac{l^2(l-1)^2(l-2)^2}{l-4} L^{l-4}, \\ H_1^2(t) &\leq \frac{L^{l+2}}{l+2} \int_{\Omega_L} u^2 x^{l-1} dx. \end{aligned}$$

Тогда дифференциальное уравнение (5.5) влечет

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} &\geq \frac{l-1}{2} \int_{\Omega_L} u^2 x^{l-1} dx - \frac{1}{2} \frac{l^2(l-1)^2(l-2)^2}{l-4} L^{l-4} \\ &\geq \frac{(l-1)(l+2)}{2L^{l+2}} H_1^2(t) - \frac{1}{2} \frac{l^2(l-1)^2(l-2)^2}{l-4} L^{l-4}. \end{aligned}$$

Отсюда при начальном условии $H_1(0)$, удовлетворяющем неравенству (5.4), получим требуемое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Аналогичное утверждение справедливо и для случая граничных условий, сосредоточенных на левой части границы: при $x = 0$.

Для этого достаточно рассмотреть функцию $\varphi(x) = -(L - x)^l$ с некоторым $l > 4$.

ПРИМЕР 5.2. Рассмотрим теперь задачу (5.1), (5.2) в Q_L с граничными условиями при $x = L$ и $x = 0$, удовлетворяющими неравенству

$$u_x(t, L) - \left[u_{xx}(t, L) + \frac{1}{2} u^2(t, L) \right] L \geq u_x(t, 0). \quad (5.6)$$

Тогда для задачи (5.1), (5.2) с граничными условиями при $x = 0$ и $x = L$, удовлетворяющими неравенству (5.6), справедливо следующее утверждение.

Пусть начальная функция u_0 такова, что

$$H_1(0) := \int_0^L u_0(x) x \, dx > 0.$$

Тогда не существует глобального по $t > 0$ решения этой задачи. Более того, не существует решения этой задачи при

$$t > \frac{2L^3}{3H_1(0)}.$$

Для ДОКАЗАТЕЛЬСТВА воспользуемся следствием 3.1 с функцией $\varphi(x) = x$.

Тогда дифференциальное уравнение (3.2) для $H_1(t) = \int_{\Omega_L} u \cdot x \, dx$ принимает вид

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_L} u^2 \, dx + b_1(u, \varphi)|_{\partial\Omega_L}.$$

В силу условия (5.6) имеем $b_1(u, \varphi)|_{\partial\Omega_L} \geq 0$. Следовательно, получаем

$$\frac{dH_1}{dt} \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega_L} u^2 \, dx. \quad (5.7)$$

В силу неравенства Гёльдера имеем

$$|H_1(t)| = \left| \int_{\Omega_L} u \cdot x \, dx \right| \leq \left(\int_{\Omega_L} u^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\frac{L^3}{3} \right)^{1/2}.$$

Тогда дифференциальное неравенство (5.7) влечет

$$\frac{dH_1}{dt} \geq \frac{3H_1^2(t)}{2L^3}.$$

Отсюда при $H_1(0) > 0$ следует требуемое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Ясно, что в класс задач, рассмотренных в предыдущих примерах, входят начально-краевые задачи, допускающие локальное по $t > 0$ решение. Следовательно, утверждения об отсутствии глобальных по $t > 0$ решений таких задач – это утверждения о разрушении (blow-up) за конечное время локальных по $t > 0$ решений этих задач.

Рассмотрим теперь модифицированное уравнение КдФ

$$v_t - v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \quad \text{в } Q_L \quad (5.8)$$

с начальным условием

$$v(0, x) = v_0(x) \quad (5.9)$$

при $v_0 \in L^2(\Omega_L)$ и $v_{0x} \in L^1(\Omega_L)$.

С помощью преобразования Миуры перейдем от функции v к функции u :

$$u = -v^2 - \sqrt{6}v_x.$$

Тогда функция u удовлетворяет классическому уравнению КдФ (5.1).

Применяя предыдущие результаты об отсутствии глобальных по $t > 0$ решений начально-краевых задач для уравнения КдФ (5.1), получаем соответствующие результаты для модифицированного уравнения КдФ (5.8).

Приведем один из них, следующий из примера 5.2.

ПРИМЕР 5.3. Пусть граничные условия при $x = L$ и $x = 0$ для уравнения (5.8) таковы, что выполнено неравенство

$$\begin{aligned} L \cdot \left(\frac{1}{2} v^4 + \sqrt{6} v^2 v_x + 2v v_x + v_x^2 + \sqrt{6} v_{xx} - 2v v_{xx} - \sqrt{6} v_{xxx} \right) \Big|_{x=L, t \in (0, T)} \\ \leq (2v v_x + \sqrt{6} v_{xx}) \Big|_{x=0, t \in (0, T)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Пусть начальная функция v_0 такова, что

$$\int_{\Omega_L} (v_0^2 + \sqrt{6} v_{0x}) x \, dx < 0.$$

Тогда не существует глобального по $t > 0$ решения такой задачи. Более того, не существует такого решения при

$$t > \frac{2L^3}{3 \left| \int_{\Omega_L} (v_0^2 + \sqrt{6} v_{0x}) x \, dx \right|}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. В случае гладкого решения модифицированного уравнения КдФ с однородным граничным условием Дирихле

$$v(t, L) = v(t, 0) = 0 \quad \text{при } t \in (0, T)$$

неравенство (5.10) принимает вид

$$L^2[v_x^2(t, L) + \sqrt{6} v_{xx}(t, L)] \leq \sqrt{6} v_{xx}(t, 0)$$

при $t \in (0, T)$.

Рассмотрим теперь некоторые приложения интегральных тождеств. Ограничимся приложением следствия 4.2.

ПРИМЕР 5.4. Рассмотрим обобщенное уравнение КдФ

$$u_t + u_{xxx} - (|u|^{p-1}u)_x = 0 \quad \text{в } Q_L = (0, T) \times \Omega_L \quad (5.11)$$

с $p > 1$ и с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{в } \Omega_L = (0, L) \subset \mathbb{R}, \quad (5.12)$$

$u_0 \in L^2(\Omega_L)$.

Тождество (4.3) для этой задачи принимает вид

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_L} \left[\frac{p}{p+1} |u|^{p+1} + \frac{3}{2} u_x^2 \right] \varphi_x dt dx \\ &= \frac{1}{2} \iint_{Q_L} u^2 \mathcal{L} \varphi dt dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_L} u_0^2 \varphi(0, x) dx + \int_0^T b_2(u, \varphi)|_{\partial \Omega_L} dt. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Выберем функцию φ с $\varphi_x \geq 0$ так, чтобы

$$\iint_{Q_L} \frac{|\mathcal{L} \varphi|^{q'}}{\varphi_x^{q'-1}} dt dx < \infty$$

с $q' = (p+1)/(p-1)$. Тогда из соотношения (5.13) на основании неравенств Гёльдера и Юнга с параметром следует, что

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_L} \left[\frac{p}{2(p+1)} |u|^{p+1} + \frac{3}{2} u_x^2 \right] \varphi_x dt dx \\ & \leq c_p \cdot \iint_{Q_L} \frac{|\mathcal{L} \varphi|^{q'}}{\varphi_x^{q'-1}} dt dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_L} u_0^2 \varphi(0, x) dx + \int_0^T b_2(u, \varphi)|_{\partial \Omega_L} dt, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где

$$c_p = \frac{p-1}{p+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{(p+1)/(p-1)} \cdot \left(\frac{4}{p} \right)^{2/(p-1)}.$$

Отсюда получаем следующее общее утверждение.

Пусть начальная функция $u_0 \in L^2(\Omega_L)$ и граничные условия таковы, что существует пробная функция φ с $\varphi_x \geq 0$, при которой правая часть неравенства (5.14) является отрицательной. Тогда не существует решения этой начально-краевой задачи для уравнения (5.11).

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

Пусть граничные условия имеют вид

$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, L) = 0, \\ u_x(t, 0) = g(t) \end{cases} \quad (5.15)$$

с $g \in L^2(0, T)$. Тогда $b_2(u, \varphi) = (1/2)u_x^2 \varphi_x$.

В качестве функции φ возьмем функцию вида

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(\tau) \varphi_1(\xi)$$

при $\tau = t/T$ и $\xi = x/L$ с $T, L > 0$.

При этом $\varphi_0 \geq 0$ есть функция из $C^1(\mathbb{R})$ такая, что

$$\varphi_0(0) = 1, \quad \varphi_0(1) = 0, \quad c_0 := \int_0^1 \frac{|\varphi_0'(\tau)|^{q'}}{\varphi_0^{q'-1}(\tau)} d\tau < \infty.$$

Ясно, что такая функция существует.

В соответствии с граничным условием (5.15) в качестве функции $\varphi_1(\xi)$ возьмем

$$\varphi_1(\xi) = -\frac{1}{2}(\xi - 1)^2.$$

Тогда

$$\iint_{Q_L} \frac{|\mathcal{L}\varphi|^{q'}}{\varphi_x^{q'-1}} dt dx = \iint_{Q_L} \frac{|\varphi_t|^{q'}}{\varphi_x^{q'-1}} dt dx = \frac{c_0}{q' + 2} \cdot \frac{1}{2^{q'}} T^{1-q'} \cdot L^{q'}.$$

При этом

$$b_2(u, \varphi)|_{\partial\Omega_L} = \frac{1}{2} u_x^2 \varphi|_{x=L} - \frac{1}{2} u_x^2 \varphi|_{x=0} = \frac{1}{4} u_x^2(t, 0) = \frac{1}{4} g^2(t).$$

Таким образом, неравенство (5.14) принимает вид

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_L} \left[\frac{p}{2(p+1)} |u|^{p+1} + \frac{3}{2} u_x^2 \right] \varphi_x dt dx \\ & \leq d_p T^{1-q'} \cdot L^{q'} - \frac{1}{4} \int_{\Omega_L} u_0^2(x) \left(\frac{x}{L} - 1 \right)^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^T g^2(t) dt \end{aligned}$$

с

$$d_p = \frac{c_0 c_p}{q' + 2} \cdot \frac{1}{2^{q'}}, \quad q' = \frac{p+1}{p-1}.$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Пусть начальная функция $u_0 \in L^2(0, L)$ и граничная функция $g \in L^2(0, T)$ таковы, что

$$\int_{\Omega_L} u_0^2(x) \left(\frac{x}{L} - 1 \right)^2 dx > 4d_p T^{1-q'} \cdot L^{q'} + \int_0^T g^2(t) dt.$$

Тогда в прямоугольнике

$$Q_L = (0, T) \times (0, L)$$

не существует решения начально-краевой задачи (5.11), (5.12) с граничными условиями (5.15).

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть начальная функция $u_0 \in L^2(0, L)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{\Omega_L} u_0^2(x) \left(\frac{x}{L} - 1 \right)^2 dx > 4d_p T^{1-q'} \cdot L^{q'}.$$

Тогда начально-краевая задача (5.11), (5.12) с однородными граничными условиями

$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, L) \equiv 0, \\ u_x(t, 0) = 0 \end{cases}$$

не имеет решения в прямоугольнике $Q_L = (0, T) \times (0, L)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Естественно, что приведенные утверждения касаются решений, принадлежащих функциональным пространствам, в которых имеют смысл соответствующие интегральные соотношения.

6. Первое тождество высшего порядка. Пусть u есть гладкое решение уравнения (2.1) и $\psi \in C_{t,x}^{1,3}(\mathbb{R}^2)$.

Умножим уравнение (2.1) с $f \in C^2(\mathbb{R})$ на $u_{xx}\psi(t, x)$ и проинтегрируем по частям. После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint_Q f'(u) u_x^2 \cdot \psi_x dt dx - \frac{3}{2} \iint_Q u_{xx}^2 \psi_x dt dx - \frac{1}{2} \iint_Q u_x^3 f''(u) \psi dt dx \\ &= -\frac{1}{2} \iint_Q u_x^2 \mathcal{L}\psi dt dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_x^2 \psi dx \Big|_0^T + \int_0^T B_1(u, \psi) |_{\partial\Omega} dt, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где

$$B_1(u, \psi) = -\left(u_x u_t + \frac{1}{2} u_{xx}^2 + \frac{1}{2} f'(u) u_x^2\right) \psi - u_x u_{xx} \psi_x + \frac{1}{2} u_x^2 \psi_{xx}$$

и $B_1(u, \psi) |_{\partial\Omega} = B_1(u, \psi) |_{x=b} - B_1(u, \psi) |_{x=a}$.

7. Второе тождество высшего порядка. Пусть u есть гладкое решение уравнения (2.1) с $f \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C_{t,x}^{1,3}(\mathbb{R}^2)$.

Тогда справедливо следующее тождество относительно функций ψ из указанного класса:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \iint_Q u_x^3 f''(u) \psi dt dx &= -\iint_Q f^2(u) \psi_x dt dx + \iint_Q u \mathcal{L}\psi_x dt dx - \iint_Q F(u) \mathcal{L}\psi dt dx \\ &+ \iint_Q f(u) \psi_{xx} dt dx + \frac{3}{2} \iint_Q f'(u) u_x^2 \psi_x dt dx \\ &+ \int_{\Omega} W_0 \cdot \psi dx \Big|_0^T + \int_0^T B_2(u, \psi) |_{\partial\Omega} dt. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_2(u, \psi) &= \left(\frac{1}{2} f^2(u) + f'(u) u_x - \frac{1}{2} f'(u) u_x^2 + f(u) u_{xx} + u_{xxx} \right) \psi \\ &- (u_{xx} + f(u) u_x + f(u)) \psi_x + (u_x + F(u)) \psi_{xx} - u \mathcal{L}\psi, \end{aligned}$$

где $F(u) = \int_0^u f(s) ds$, $W_0 = W_0(u, u_x) = u_x + F(u)$ и $\mathcal{L}\psi = \psi_t + \psi_{xxx}$.

Вывод этого тождества основан на методике работы [8]. Следуя этой методике, составляем соотношение вида

$$J := \frac{\partial W_0}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^k W_k}{\partial x^k} \quad (7.2)$$

с неизвестными функциями $W_k = W_k(u, u_x)$ ($k = 0, 1, 2, 3$) так, чтобы в силу уравнения (2.1) получить выражение, зависящее только от u и u_x , т.е.

$$J = J(u, u_x).$$

В результате получаются определяющие уравнения для искомых функций W_k ($k = 0, 1, 2, 3$). А именно,

$$W_0 = u_x + F(u), \quad W_1 = f'(u)u_x - \frac{3}{2}f'(u)u_x^2, \quad W_2 = 0, \quad W_3 = u_x + F(u).$$

Тогда находим, что

$$J = J(u, u_x) = -f(u)f'(u)u_x - \frac{1}{2}f''(u)u_x^3.$$

Теперь, умножая (7.2) на функцию ψ и интегрируя по частям, получаем тождество (7.1) относительно функций $\psi \in C_{t,x}^{1,3}(\mathbb{R}^2)$.

8. Основное тождество высшего порядка. Исключая из соотношений (6.1) и (7.1) член $-1/2 \iint_{Q_L} u_x^3 f''(u) \psi \, dt \, dx$, получаем основное тождество

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[\frac{3}{2} u_{xx}^2 + f^2(u) - 2f'(u)u_x^2 \right] \psi_x \, dt \, dx - \iint_Q f(u) \psi_{xx} \, dt \, dx \\ &= \iint_Q u_{\mathcal{L}} \psi_x \, dt \, dx + \iint_Q \left[\frac{1}{2} u_x^2 - F(u) \right] \mathcal{L} \psi \, dt \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \left[F(u) - \frac{1}{2} u_x^2 + u_x \right] \psi \, dx \Big|_0^T + \int_0^T B_*(u, \psi) |_{\partial \Omega} \, dt. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Здесь $B_*(u, \psi) = B_2(u, \psi) - B_1(u, \psi)$.

Далее, замечая, что

$$\iint_Q u_{\mathcal{L}} \psi_x \, dt \, dx = - \iint_Q u_x \mathcal{L} \psi \, dt \, dx + \int_0^T u_{\mathcal{L}} \psi |_{\partial \Omega} \, dt,$$

тождество (8.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[\frac{3}{2} u_{xx}^2 + f^2(u) - 2f'(u)u_x^2 \right] \psi_x \, dt \, dx - \iint_Q f(u) \psi_{xx} \, dt \, dx \\ &= \iint_Q \left[\frac{1}{2} u_x^2 - u_x - F(u) \right] \mathcal{L} \psi \, dt \, dx \\ &- \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} u_x^2 - u_x - F(u) \right] \psi \, dx \Big|_0^T + \int_0^T B_{**}(u, \psi) |_{\partial \Omega} \, dt, \end{aligned} \quad (8.2)$$

где $B_{**}(u, \psi) = B_*(u, \psi) + u_{\mathcal{L}} \psi$, т.е.

$$\begin{aligned} B_{**}(u, \psi) &= \left[u_t u_x + \frac{1}{2} u_{xx}^2 + u_{xxx} + f(u) u_{xx} + f'(u) u_x + \frac{1}{2} f^2(u) \right] \psi \\ &+ [u_x \cdot u_{xx} - u_{xx} - (1 + u_x) f(u)] \psi_x + \left[F(u) + u_x - \frac{1}{2} u_x^2 \right] \psi_{xx}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Полагая $\psi \equiv 1$ и $\Omega = \mathbb{R}$, получаем известный закон сохранения

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2} u_x^2 - F(u) \right]_{t=T} dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2} u_x^2 - F(u) \right]_{t=0} dx$$

в соответствующем функциональном пространстве с

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} B_{**}(u(x, t), 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} B_{**}(u(x, t), 1).$$

9. Применение. Рассмотрим обобщенное уравнение КдФ с $f(u) = |u|^p$, т.е.

$$u_t + u_{xxx} + (|u|^p)_x = 0 \quad \text{в } Q_L \quad (9.1)$$

с $p > 1$ при граничных условиях, содержащих однородное граничное условие Дирихле

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad (9.2)$$

при $t \in (0, T)$. Тогда граничный функционал $B_*(u, \varphi)$ в (8.1) принимает вид

$$B_*(u, \psi) = \frac{1}{2} u_{xx}^2 \psi + (u_{xx} u_x - u_{xx}) \psi_x + \left(u_x - \frac{1}{2} u_x^2 \right) \psi_{xx}. \quad (9.3)$$

В качестве весовой функции ψ возьмем функцию вида

$$\psi(t, x) = \psi_0(t) \psi_1(x). \quad (9.4)$$

Здесь функция $\psi_0 \geq 0$ из класса $C^1(0, T) \cap C[0, T]$ такая, что

$$\begin{cases} \psi_0(0) = 1, \quad \psi_0(T) = 0, \\ \psi_0'(t) \leq 0 \text{ при } t \in (0, T). \end{cases} \quad (9.5)$$

Относительно функции $\psi_1 \in C^4(0, L) \cap C^3[0, L]$ предполагаются выполненными следующие условия:

$$\begin{cases} \psi_1'(x) \geq 0 \text{ при } x \in [0, L], \\ \psi_1(0) = \psi_1'(0) = \psi_1''(0) = 0, \\ \psi_1(L) = A_0 > 0, \quad \psi_1'(L) = A_1 > 0, \quad \psi_1''(L) = -\frac{A_1^2}{A_0}, \end{cases} \quad (9.6)$$

с некоторыми положительными величинами A_0 и A_1 .

Дополнительные условия на функции ψ_0 и ψ_1 будут указаны ниже.

Интегральное соотношение (8.1) для решений уравнения (9.1) с выбранной функцией ψ принимает вид

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_L} \left[\frac{3}{2} u_{xx}^2 + |u|^{2p} - 2p|u|^{p-2} u \cdot u_x^2 \right] \psi_x dt dx \\ &= \iint_{Q_L} u \mathcal{L} \psi_x dt dx + \iint_{Q_L} \left[\frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{p+1} |u|^p u \right] \mathcal{L} \psi dt dx \\ & \quad - J_0(u_0, \psi_1) + B_L(u, \psi_0). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Здесь

$$J_0(u_0, \psi_1) = \int_{\Omega_L} \left[\frac{1}{p+1} |u_0|^p u_0 - \frac{1}{2} u_{0x}^2 + u_{0x} \right] \psi_1(x) dx \quad (9.8)$$

и

$$B_L(u, \psi_0) = \frac{1}{2} \int_0^T [A_0^{1/2} u_{xx} + A_1 A_0^{-1/2} \cdot (u_x - 1)]^2|_{x=L} \psi_0(t) dt - \frac{A_1^2}{2A_0} \int_0^T \psi_0(t) dt. \quad (9.9)$$

Далее заметим, что в силу выбранной функции ψ имеем $\psi_t \leq 0$ и, следовательно,

$$u_x^2 \mathcal{L} \psi \leq u_x^2 \psi_{xxx}.$$

Тогда из интегрального соотношения (9.7) следует, что

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_L} \left[\frac{3}{2} u_{xx}^2 + |u|^{2p} - 2p|u|^{p-2} u \cdot u_x^2 \right] \psi_x dt dx \\ & \leq \iint_{Q_L} u \mathcal{L} \psi_x dt dx + \frac{1}{2} \iint_{Q_L} u_x^2 \psi_{xxx} dt dx \\ & \quad - \frac{1}{p+1} \iint_{Q_L} |u|^p u \mathcal{L} \psi dt dx - J_0(u_0, \psi_1) + B_L(u, \psi_0). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Для последующих оценок воспользуемся следующими леммами.

ЛЕММА 9.1. Пусть $v \in W_2^2(0, L)$ и $v(0) = v(L) = 0$.

Пусть $\varphi \in C^3(0, L) \cap C^2[0, L]$ с $\varphi_x \geq 0$ при $x \in \Omega_L = (0, L)$ и

$$\int_{\Omega_L} \frac{|\varphi_{xxx}|^{q'}}{\varphi_x^{q'-1}} dx < \infty$$

с $q' = 2p/(p-1)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_L} \left[\frac{3}{2} v_{xx}^2 + |v|^{2p} - 2p|v|^{p-2} v v_x^2 \right] \varphi_x dt dx \\ & \geq \int_{\Omega_L} \left[\frac{9}{10} v_{xx}^2 + \frac{1}{12} |v|^{2p} \right] \varphi_x dx - c_p \cdot \int_{\Omega_L} \frac{|\varphi_{xxx}|^{q'}}{\varphi_x^{q'-1}} dx \end{aligned} \quad (9.11)$$

с

$$c_p = \frac{p-1}{p+1} \left(\frac{1}{p} \right)^{2p/(p-1)} \cdot 12^{(p+1)/(p-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий леммы имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_L} (|v|^p v_x \varphi_x)_x dx \\ & = \int_{\Omega_L} |v|^p v_{xx} \varphi_x dx + p \int_{\Omega_L} |v|^{p-2} v \cdot v_x^2 \varphi_x dx + \int_{\Omega_L} |v|^p v_x \varphi_{xx} dx \\ & = \int_{\Omega_L} |v|^p v_{xx} \varphi_x dx + p \int_{\Omega_L} |v|^{p-2} v v_x^2 \varphi_x dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega_L} |v|^p v \varphi_{xxx} dx = 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу стандартных неравенств Юнга с параметрами $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ имеем

$$p \int_{\Omega_L} |v|^{p-2} v v_x^2 \varphi_x dx = \frac{1}{p+1} \int_{\Omega_L} |v|^p v \varphi_{xxx} dx - \int_{\Omega_L} |v|^p v_{xx} \varphi_x dx$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\varepsilon}{q} \int_{\Omega_L} |v|^{2p} \varphi_x dx + \frac{1}{q'} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{q'-1}} \left(\frac{1}{1+p} \right)^{q'} \cdot \int_{\Omega_L} \frac{|\varphi_{xxx}|^{q'}}{\varphi_x^{q'-1}} dx \\ &\quad + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega_L} |v|^{2p} \varphi_x dx + \frac{1}{2\delta} \int_{\Omega_L} v_{xx}^2 \varphi_x dx, \end{aligned}$$

где $q = 2p/(p+1)$, $q' = 2p/(p-1)$.

Полагая в этом неравенстве $\delta = 5/6$ и $\varepsilon = q/24$, получаем утверждение леммы 9.1.

ЛЕММА 9.2. Пусть $v \in W_2^2(0, L)$ и $v(0) = v(L) = 0$. Пусть $\varphi \in C^5(0, L) \cap C^4[0, L]$ с $\varphi_x \geq 0$ при $x \in \Omega_L$ и

$$\int_{\Omega_L} \left(\frac{|\varphi_{xxx}|^{2p'}}{\varphi_x^{2p'-1}} + \frac{|\varphi_{xxxx}|^{p'}}{\varphi_x^{p'-1}} \right) dx < \infty.$$

Тогда

$$\int_{\Omega_L} v_{xx}^2 \varphi_{xxx} dx \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \int_{\Omega_L} v_{xx}^2 \varphi_x dx + \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{p} \int_{\Omega_L} |v|^{2p} \varphi_x dx + J_1(\varphi; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \quad (9.12)$$

с $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ и

$$\begin{aligned} J_1(\varphi; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= \frac{1}{p'} \cdot \frac{1}{\varepsilon_2^{p'-1}} \left(\frac{1}{2\varepsilon_1} \right)^{p'} \cdot \int_{\Omega_L} \frac{|\varphi_{xxx}|^{2p'}}{\varphi_x^{2p'-1}} dx \\ &\quad + \frac{1}{p'} \cdot \frac{1}{\varepsilon_3^{p'-1}} \left(\frac{1}{2} \right)^{p'} \cdot \int_{\Omega_L} \frac{|\varphi_{xxxx}|^{p'}}{\varphi_x^{p'-1}} dx. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий леммы имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} \frac{d}{dx} \left(vv_x \varphi_{xxx} \right) dx &= \int_{\Omega_L} v_x^2 \varphi_{xxx} dx + \int_{\Omega_L} v \cdot v_{xx} \varphi_{xxx} dx + \int_{\Omega_L} vv_{xx} \varphi_{xxxx} dx \\ &= \int_{\Omega_L} v_x^2 \varphi_{xxx} dx + \int_{\Omega_L} vv_{xx} \varphi_{xxx} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_L} v^2 \varphi_{xxxx} dx = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} v_x^2 \varphi_{xxx} dx &= - \int_{\Omega_L} v \cdot v_{xx} \varphi_{xxx} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_L} v^2 \varphi_{xxxx} dx \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{2} \int_{\Omega_L} v_{xx}^2 \varphi_x dx + \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_{\Omega_L} v^2 \frac{\varphi_{xxx}^2}{\varphi_x} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_L} v^2 \varphi_{xxxx} dx \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{2} \int_{\Omega_L} v_{xx}^2 \varphi_x dx + \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{p} \int_{\Omega_L} |v|^{2p} \varphi_x dx + J_1(\varphi; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3). \end{aligned}$$

Возвратимся теперь к неравенству (9.10). На основании оценок (9.11) и (9.12) при соответствующих условиях на функцию ψ получим

$$\begin{aligned} &\iint_{Q_L} \left[\frac{9}{10} u_{xx}^2 + \frac{1}{12} |u|^{2p} \right] \psi_x dt dx \\ &\leq \iint_{Q_L} u \mathcal{L} \psi_x dt dx - \frac{1}{p+1} \iint_{Q_L} |u|^p u \mathcal{L} \psi dt dx + \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2p} \iint_{Q_L} |u|^{2p} \psi_x dt dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon_1}{4} \iint_{Q_L} u_{xx}^2 \psi_x dt dx + c_p \iint_{Q_L} \frac{|\psi_{xxx}|^{q'}}{\psi_x^{q'-1}} dt dx \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T J_1(\psi; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) dt - J_0(u_0, \psi_1) + B_L(u, \psi_0).
\end{aligned}$$

Отсюда, снова применяя неравенство Юнга с параметрами $\varepsilon_4, \varepsilon_5 > 0$, находим, что

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_L} \left[\frac{9}{10} u_{xx}^2 + \frac{1}{12} |u|^{2p} \right] \psi_x dt dx \\
& \leq \frac{\varepsilon_1}{4} \iint_{Q_L} u_{xx}^2 \psi_x dt dx + \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + (p+1)\varepsilon_5}{2p} \iint_{Q_L} |u|^{2p} \psi_x dt dx \\
& \quad + c_p \iint_{Q_L} \frac{|\psi_{xxx}|^{q'}}{\psi_x^{q'-1}} dt dx + \frac{1}{2} \int_0^T J_1(\psi; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) dt \\
& \quad + J_2(\psi; \varepsilon_4, \varepsilon_5) - J_0(u_0, \psi_1) + B_L(u, \psi_0).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
J_2(\psi; \varepsilon_4, \varepsilon_5) &= \frac{2p-1}{2p} \left(\frac{1}{\varepsilon_4} \right)^{1/(2p-1)} \iint_{Q_L} \frac{|\mathcal{L}\psi_x|^{2p/(2p-1)}}{\psi_x^{1/(2p-1)}} dt dx \\
& \quad + \frac{p-1}{2p} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{2p/(p-1)} \left(\frac{1}{\varepsilon_5} \right)^{(p+1)/(p-1)} \iint_{Q_L} \frac{|\mathcal{L}\psi|^{2p(p-1)}}{\psi_x^{(p+1)/(p-1)}} dt dx.
\end{aligned}$$

Теперь, полагая

$$\varepsilon_1 = \frac{9}{5}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = (p+1)\varepsilon_5 = \frac{p}{48},$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_L} \left[\frac{9}{20} u_{xx}^2 + \frac{1}{24} |u|^{2p} \right] \psi_x dt dx \\
& \leq c_p \iint_{Q_L} \frac{|\psi_{xxx}|^{q'}}{\psi_x^{q'-1}} dt dx + \frac{1}{2} J_1^*(\psi) + J_2^*(\psi) - J_0(u_0, \psi_1) + \Gamma_L(u, \psi_0). \quad (9.13)
\end{aligned}$$

Здесь

$$J_1^*(\psi) = \int_0^T J_1\left(\psi; \frac{9}{5}, \frac{p}{48}, \frac{p}{48}\right) dt, \quad J_2^*(\psi) = J_2\left(\psi; \frac{p}{48}, \frac{p}{p+1} \cdot \frac{1}{48}\right).$$

Очевидно, что неравенство (9.13) является содержательным при условии, что величины, входящие в правую часть этого неравенства, являются конечными.

ЛЕММА 9.3. Пусть функция ψ , определенная формулой (9.4), удовлетворяет условиям (9.5), (9.6) и следующие интегралы:

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_L} \frac{|\psi_{xxx}|^{2p/(p-1)}}{\psi_x^{(p+1)/(p-1)}} dt dx, \quad \iint_{Q_L} \frac{|\psi_{xxx}|^{2p'}}{\psi_x^{2p'-1}} dt dx, \quad \iint_{Q_L} \frac{|\psi_{xxxx}|^{p'}}{\psi_x^{p'-1}} dt dx, \\
& \iint_{Q_L} \frac{|\mathcal{L}\psi_x|^{2p/(2p-1)}}{\psi_x^{1/(2p-1)}} dt dx, \quad \iint_{Q_L} \frac{|\mathcal{L}\psi|^{2p/(p-1)}}{\psi_x^{(p+1)/(p-1)}} dt dx
\end{aligned}$$

с $p > 1$ и $p' = p/(p-1)$ являются конечными. Тогда для решения уравнения (9.1) при граничных условиях, содержащих однородное граничное условие Дирихле (9.2) с начальной функцией $u_0 \in \dot{W}_2^1(\Omega_L)$, выполнена априорная оценка (9.13).

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. Соответствующий анализ показывает, что функции ψ , удовлетворяющие всем условиям леммы 9.3, существуют. Например, такой функцией $\psi(t, x) = \psi_0(t)\psi_1(x)$ является функция с

$$\psi_1(x) = \sin \omega x^l \quad \text{при } x \in [0, L]$$

с соответствующими $\omega > 0$, $l > 4p'$, $\pi/4 < \omega L^l < \pi/2$. При этом

$$\operatorname{tg} 2\beta = -2 \frac{l}{p-1} \beta$$

с $\beta = \omega L^l$ и $A_0 = \sin \beta$, $A_1 = (l/L)\beta \cdot \cos \beta$.

Относительно функции $\psi_0(t)$, удовлетворяющей условиям (9.5), достаточно предположить, что ψ_0 имеет касание в точке $t = T$ порядка выше $(p+1)/(p-1)$.

Лемма 9.3 влечет следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть весовая функция ψ удовлетворяет условиям леммы 9.3. Пусть выполнены условия (9.2). Пусть начальная функция $u_0 \in \dot{W}_2^1(\Omega_L)$ и граничное условие с граничным функционалом $B_L(u, \psi_0)$ (9.9) таковы, что

$$J_0(u_0, \psi_1) - B_L(u, \psi_0) \geq M(\psi).$$

Тогда начально-краевая задача для уравнения (9.1) не имеет решения в прямоугольнике $Q_L = (0, T) \times \Omega_L$ с $\Omega_L = (0, L)$.

Здесь

$$M(\psi) = c_p \iint_{Q_L} \frac{|\psi_{xxx}|^{2p/(p-1)}}{\psi_x^{(p+1)/(p-1)}} dt dx + \frac{1}{2} J_1^*(\psi) + J_2^*(\psi).$$

СЛЕДСТВИЕ 9.1. Пусть наряду с условиями (9.2) задано граничное условие при $x = L$

$$A_0 u_{xx}(t, L) + A_1(u_x(t, L) - 1) = 0$$

при $t \in (0, T)$. Тогда при начальной функции $u_0 \in \dot{W}_2^1(\Omega_L)$ такой, что

$$J_0(u_0, \psi_1) \geq M(\psi),$$

не существует решения этой задачи в прямоугольнике Q_L .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [2] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, "Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных", Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.

- [3] J. L. Bona, Shu Ming Sun, Bing-Yu Zhang, “A nonhomogeneous boundary-value problem for the Korteweg–de Vries equation posed on a finite domain”, *Comm. Partial Differential Equations*, **28**:7-8 (2003), 1391–1436; “A non-homogeneous boundary-value problem for the Korteweg–de Vries equation posed on a finite domain. II”, *J. Differential Equations*, **247**:9 (2009), 2558–2596.
- [4] В. А. Бубнов, “Разрешимость в целом нелинейных граничных задач для уравнения Кортевега–де Фриза в ограниченной области”, *Дифференц. уравнения*, **16**:1 (1980), 34–41.
- [5] J. Holmer, “The initial-boundary value problem for the Korteweg–de Vries equation”, *Comm. Partial Differential Equations*, **31**:8 (2006), 1151–1190.
- [6] Th. Colin, J.-M. Ghidaglia, “An initial-boundary value problem for the Korteweg–de Vries equation posed on a finite interval”, *Adv. Differential Equations*, **6**:12 (2001), 1463–1492.
- [7] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao, “Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$ ”, *J. Amer. Math. Soc.*, **16**:3 (2003), 705–749.
- [8] С. И. Похожаев, “О многомерных скалярных законах сохранения”, *Матем. сб.*, **194**:1 (2003), 147–160.

С. И. Похожаев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: pokhozhaev@mi.ras.ru

Поступило

08.09.2010