Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Волосивец, Операторы Хаусдорфа на p -адическом линейном пространстве и их свойства в пространствах Харди, *ВМО* и Гёльдера, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 3, 357–367

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9049>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:12:58

Операторы Хаусдорфа на p -адическом линейном пространстве и их свойства в пространствах Харди, BMO и Гёльдера

С. С. Волосивец

Получены достаточные условия ограниченности p -адического матричного оператора в пространствах Харди, Гёльдера и BMO . Эти условия выражены в терминах определителя матрицы и ее нормы в p -адическом линейном пространстве.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm9049

1. Введение. Пусть p – простое число и $x \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел), $x \neq 0$. Если x записано в виде $x = p^\gamma m/n$, где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и $m, n \in \mathbb{Z}$ взаимно просты с p , то $|x|_p := p^{-\gamma}$. Для $x = 0$ по определению $|0|_p = 0$. Величина $|\cdot|_p$ является нормой; кроме того, при $x, y \in \mathbb{Q}$

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p), \quad |xy|_p = |x|_p |y|_p. \quad (1.1)$$

Обозначим пополнение $\mathbb{Q}$ по норме $|\cdot|_p$ через $\mathbb{Q}_p$. Тогда для каждого $x \in \mathbb{Q}_p$ имеет место единственное представление

$$x = p^\gamma (x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^{\gamma+i}, \quad (1.2)$$

где $x_0 \neq 0$, $x_i \in \mathbb{Z} \cap [0, p)$, $\gamma \in \mathbb{Z}$. В этом случае $|x|_p = p^{-\gamma}$ и, как и выше, $|0|_p = 0$. Величина $|\cdot|_p$ снова является нормой, причем (1.1) по-прежнему верно (см. [1; § 1]). Определение сложения, вычитания, умножения и деления в $\mathbb{Q}_p$ см. в [1; § 1], а также примеры в [2; гл. 1, § 5]. Отметим, что $\mathbb{Q}_p$ есть поле относительно этих операций. Далее

$$B_k(x_0) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - x_0|_p \leq p^k\}, \quad S_k(x_0) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - x_0|_p = p^k\}$$

обозначают соответственно шары и сферы радиуса p^k , $k \in \mathbb{Z}$. Если $B_k = B_k(0)$, $S_k = S_k(0)$, то для любого $x_0 \in \mathbb{Q}_p$ имеем $x_0 + B_k = B_k(x_0)$ и $x_0 + S_k = S_k(x_0)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00270).

Из неравенства (1.1) следует, что два шара $B_n(x_0)$ и $B_m(y_0)$ либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом. Мэру Хаара на локально-компактной аддитивной группе $\mathbb{Q}_p$ обозначим через $d\mu$, потребовав выполнения равенства $\mu(B_0) = 1$.

Для

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times \dots \times \mathbb{Q}_p, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{Q}_p^n$$

введем норму $|\mathbf{x}|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|_p$ и произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Шары $B_k(\mathbf{x})$ и сферы $S_k(\mathbf{x})$ определяются так же, как при $n = 1$. Отметим, что

$$B_k(\mathbf{x}) = B_k(x_1) \times \dots \times B_k(x_n).$$

Мера Хаара $d\mu(\mathbf{x})$ на $\mathbb{Q}_p^n$ является произведением соответствующих мер. Пространство $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$, $1 \leq q < \infty$, состоит из измеримых комплекснозначных функций f с конечной нормой

$$\|f\|_q = \left(\int_{\mathbb{Q}_p^n} |f(\mathbf{x})|^q d\mu(\mathbf{x}) \right)^{1/q}.$$

Вместо $L^\infty(\mathbb{Q}_p^n)$ при $q = \infty$ будем рассматривать пространство $BUC(\mathbb{Q}_p^n)$ ограниченных равномерно непрерывных функций на $\mathbb{Q}_p^n$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}_p^n} |f(\mathbf{x})|$. Максимальная функция для $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{Q}_p^n)$ вводится равенством

$$M(f)(\mathbf{x}) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} p^{-kn} \int_{B_k(\mathbf{x})} |f(\mathbf{y})| d\mu(\mathbf{y}).$$

Если $f \in L^1(\mathbb{Q}_p^n)$ и $M(f) \in L^1(\mathbb{Q}_p^n)$, то f принадлежит пространству Харди $H^1(\mathbb{Q}_p^n)$ с нормой $\|f\|_{H^1} = \|M(f)\|_1$. Назовем функцию $a(\mathbf{x})$ *атомом*, если

- 1) $\text{supp}(a)$, т.е. замыкание множества $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}_p^n : a(\mathbf{x}) \neq 0\}$, содержится в некотором шаре $B_k(\mathbf{x}_0)$;
- 2) $|a(\mathbf{x})| \leq p^{-kn}$ на $\mathbb{Q}_p^n$;
- 3) $\int_{\mathbb{Q}_p^n} a(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = 0$.

Для функции $f \in H^1(\mathbb{Q}_p^n)$ имеет место атомарное разложение

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$$

в $H^1(\mathbb{Q}_p^n)$, где $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$, a_k – атомы. При этом

$$\|f\|_{H^1} \asymp \inf \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|,$$

где $\inf$ берется по всем таким разложениям (см. [3]). Здесь и далее $A \asymp B$ означает, что $C_1 A \leq B \leq C_2 A$ для некоторых $0 < C_1 < C_2$.

Пусть I – шар в $\mathbb{Q}_p^n$ и

$$f_I = \mu(I)^{-1} \int_I f(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}).$$

Если

$$\|f\|_* = \sup_I |f - f_I|_I < \infty,$$

то $f \in BMO(\mathbb{Q}_p^n)$, а если $f \in BMO(\mathbb{Q}_p^n)$,

$$\|f\|_{*\delta} = \sup_{\mu(I) \leq \delta} |f - f_I|_I, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|f\|_{*\delta} = 0,$$

то $f \in VMO(\mathbb{Q}_p^n)$. Пространства $BMO(\mathbb{R})$ и $VMO(\mathbb{R})$ введены, соответственно, Джоном и Ниренбергом [4] и Сарасоном [5]. Пространство $BMO(\mathbb{Q}_p^n)$ является сопряженным к $H^1(\mathbb{Q}_p^n)$, а именно для любого линейного непрерывного функционала $l(f)$ на $H^1(\mathbb{Q}_p^n)$ существует $g \in BMO(\mathbb{Q}_p^n)$ такая, что $\|l\| \asymp \|g\|_*$. Соответствующее доказательство в более общем случае можно найти в [3; теорема В], там же обсуждается выражение $l(f)$ через g . Аналогично работе [5] можно показать, что для $f \in VMO(\mathbb{Q}_p^n)$ верно равенство

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \|f(\cdot + \mathbf{h}) - f(\cdot)\|_* = 0.$$

Для пространства $H^1(\mathbb{Q}_p^n)$ аналогичный факт можно вывести с помощью описанного выше атомарного разложения.

Пусть G_k – множество функций, постоянных на всех $B_{-k}(\mathbf{x})$. Аналогом наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа является величина

$$\mathcal{A}_k(f)_X = \inf\{\|f - g\|_X : g \in X \cap G_k\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Введем также дискретный модуль непрерывности

$$\omega_k(f)_X = \sup_{\mathbf{h} \in B_{-k}} \|f(\cdot + \mathbf{h}) - f(\cdot)\|_X.$$

Здесь $X = X(\mathbb{Q}_p^n)$ – одно из пространств $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$, $1 \leq q < \infty$, $BUC(\mathbb{Q}_p^n)$, $H^1(\mathbb{Q}_p^n)$ или $VMO(\mathbb{Q}_p^n)$. Величины $\mathcal{A}_k(f)_X$ и $\omega_k(f)_X$ связаны неравенством типа Ефимова (см. лемму 6). Если $\{\omega_k\}_{k=0}^\infty$ убывает к нулю, то через $H_X^\omega(\mathbb{Q}_p^n)$ обозначим пространство

$$\{f \in X(\mathbb{Q}_p^n) : \omega_k(f)_X \leq C\omega_k, k \in \mathbb{Z}_+\},$$

где C зависит от f , но не от k .

Операторы Хаусдорфа для функций, определенных на $\mathbb{R}^n$, изучались в ряде работ, среди которых можно выделить [6]–[10]. Дадим определение в p -адическом случае. Пусть $\varphi(\mathbf{t})$ измерима на $\mathbb{Q}_p^n$, $(n \times n)$ -матрица $A(\mathbf{t})$ невырождена для п.в. $\mathbf{t} \in \mathbb{Q}_p^n$ и имеет непрерывные компоненты $a_{ij}(\mathbf{t}) : \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{Q}_p$, а $f(\mathbf{x})$ непрерывна на $\mathbb{Q}_p^n$. Определим оператор Хаусдорфа формулой

$$\mathcal{H}_{\varphi, A}(f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \varphi(\mathbf{t}) f(A(\mathbf{t})\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{t}),$$

если интеграл справа существует в смысле Лебега. Для $f \in L^q(\mathbb{Q}_p^n)$, $1 \leq q < \infty$, определим $\mathcal{H}_{\varphi, A}(f)$ как L^q -предел $\mathcal{H}_{\varphi, A}(f_i)$, где $f_i \in BUC(\mathbb{Q}_p^n)$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f - f_i\|_q = 0$. Существование и ограниченность $\mathcal{H}_{\varphi, A}$ в $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$, $1 \leq q < \infty$, обеспечивается условием

$$\kappa_q(\varphi, A) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} |\varphi(\mathbf{t})| |\det A^{-1}(\mathbf{t})|_p^{1/q} d\mu(\mathbf{t}) < \infty \quad (1.3)$$

(см. [11; лемма 3]). Легко видеть, что сопряженным к $\mathcal{H}_{\varphi,A}$ является оператор

$$\mathcal{H}_{\varphi,A}^* = \mathcal{H}_{\varphi_1,A^{-1}},$$

где $\varphi_1(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t})|\det A^{-1}(\mathbf{t})|_p$. В [11] изучалась ограниченность $\mathcal{H}_{\varphi,A}$ и $\mathcal{H}_{\varphi,A}^*$ в $H^1(\mathbb{Q}_p^n)$ и $BMO(\mathbb{Q}_p^n)$ для матрицы $A(\mathbf{t}) = a(\mathbf{t})E$, где E – единичная матрица. В настоящей работе даются условия ограниченности $\mathcal{H}_{\varphi,A}$ в $H^1(\mathbb{Q}_p^n)$ и $BMO(\mathbb{Q}_p^n)$, близкие к условиям из [9] и [10], в которых ограничения на вид матрицы заменены на условия, связанные с ее нормой, как нормой линейного оператора в $\mathbb{Q}_p^n$. Кроме того, в [11] применялись аналогии операторов Рисса из [12], что не позволяло рассматривать случай $p = 2$. Даны также условия, при которых оператор $\mathcal{H}_{\varphi,A}$ действует в $VMO(\mathbb{Q}_p^n)$ и $H_X^\omega(\mathbb{Q}_p^n)$.

2. Вспомогательные утверждения. Метод доказательства неравенств леммы 1 хорошо известен (см., например, [13; лемма 7] в случае групп Виленкина).

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{Q}_p^n)$,

$$\|f\|_\delta^* := \sup_{\mu(I) \leq \delta} \inf_{c \in \mathbb{C}} |f - c|_I, \quad \|f\|^* = \|f\|_\infty^*.$$

Тогда

$$\|f\|_\delta^* \leq \|f\|_{*\delta} \leq 2\|f\|_\delta^*, \quad \|f\|^* \leq \|f\|_* \leq 2\|f\|^*.$$

Если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}_p^n$, то по определению оператор A с матрицей $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ действует так: $A\mathbf{x} = (\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j)$.

ЛЕММА 2. Пусть $A = (n \times n)$ -матрица с компонентами $a_{ij} \in \mathbb{Q}_p$. Тогда норма A , как оператора из $\mathbb{Q}_p^n$ в $\mathbb{Q}_p^n$, равна $\alpha(A) := \max_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.1) имеем

$$|A\mathbf{x}|_p \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right|_p \leq \max_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|_p |x_j|_p \leq \alpha(A) |\mathbf{x}|_p.$$

Если $\alpha(A) = |a_{i_0,j_0}|_p$, то для $\mathbf{x} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на месте с номером j_0 , получаем $|A\mathbf{x}|_p = \alpha(A)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $g \in G_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi(\mathbf{t}) = 0$ вне B_0 и $\alpha(A(\mathbf{t})) \leq 1$ при всех $\mathbf{t} \in B_0$. Тогда $\mathcal{H}_{\varphi,A}(g) \in G_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in B_{-k}$. Тогда

$$\mathcal{H}_{\varphi,A}(g)(x) = \int_{B_0} g(A(\mathbf{t})\mathbf{x}_0 + A(\mathbf{t})\mathbf{y})\varphi(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}). \quad (2.1)$$

По лемме 2

$$|A(\mathbf{t})\mathbf{y}|_p \leq \|A(\mathbf{t})\| |\mathbf{y}|_p \leq |\mathbf{y}|_p \leq p^{-k}.$$

Таким образом, $g(A(\mathbf{t})\mathbf{x}_0 + A(\mathbf{t})\mathbf{y})$ и интеграл в правой части (2.1) не зависят от $\mathbf{y}$, т.е. функция $\mathcal{H}_{\varphi,A}(g)$ постоянна на всех $B_{-k}(\mathbf{x}_0)$. Лемма доказана.

Аналог леммы 4 для $BMO(\mathbb{R})$ см. в [14].

ЛЕММА 4. Пусть $f(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ принадлежит $BMO(\mathbb{Q}_p^n)$, как функция $\mathbf{x}$ при всех $\mathbf{t} \in \mathbb{Q}_p^n$, а $\Phi_1(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} |f(\mathbf{x}, \mathbf{t})| d\mu(\mathbf{t})$ существует п.в. и принадлежит $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{Q}_p^n)$. Тогда для $\Phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t})$ справедливо неравенство

$$\|\Phi\|_* \leq \int_{\mathbb{Q}_p^n} \|f(\cdot, \mathbf{t})\|_* d\mu(\mathbf{t}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I = B_k(\mathbf{x}_0)$. Тогда по теореме Фубини

$$\begin{aligned} & \mu(I)^{-1} \int_I |\Phi(\mathbf{x}) - \Phi_I| d\mu(\mathbf{x}) \\ &= \mu(I)^{-1} \int_I \left| \int_{\mathbb{Q}_p^n} \left(f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mu(I)^{-1} \int_I f(\mathbf{u}, \mathbf{t}) d\mu(\mathbf{u}) \right) d\mu(\mathbf{t}) \right| d\mu(\mathbf{x}) \\ &\leq \int_{\mathbb{Q}_p^n} \mu(I)^{-1} \int_I \left| f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mu(I)^{-1} \int_I f(\mathbf{u}, \mathbf{t}) d\mu(\mathbf{u}) \right| d\mu(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{x}) \\ &\leq \int_{\mathbb{Q}_p^n} \|f(\cdot, \mathbf{t})\|_* d\mu(\mathbf{t}). \end{aligned}$$

Переходя к точной верхней грани, доказываем лемму.

ЛЕММА 5. Пусть $f(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ принадлежит $H^1(\mathbb{Q}_p^n)$, как функция $\mathbf{x}$ при всех $\mathbf{t} \in \mathbb{Q}_p^n$ и $\Phi_1(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} |f(\mathbf{x}, \mathbf{t})| d\mu(\mathbf{t})$ существует п.в. и принадлежит $L^1(\mathbb{Q}_p^n)$. Тогда для $\Phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t})$ верно неравенство

$$\|\Phi\|_{H^1} \leq \int_{\mathbb{Q}_p^n} \|f(\cdot, \mathbf{t})\|_{H^1} d\mu(\mathbf{t}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I = B_k(\mathbf{x}_0)$ – шар в $\mathbb{Q}_p^n$. Тогда по теореме Фубини

$$\left| \mu(I)^{-1} \int_I \Phi(\mathbf{u}) d\mu(\mathbf{u}) \right| \leq \int_{\mathbb{Q}_p^n} \mu(I)^{-1} \left| \int_I f(\mathbf{u}, \mathbf{t}) d\mu(\mathbf{u}) \right| d\mu(\mathbf{t}),$$

откуда следует, что $M(\Phi)(\mathbf{x}) \leq \int_{\mathbb{Q}_p^n} M(f(\mathbf{x}, \mathbf{t})) d\mu(\mathbf{t})$ и по обобщенному неравенству Минковского

$$\|M(\Phi)\|_1 \leq \int_{\mathbb{Q}_p^n} \|M(f(\cdot, \mathbf{t}))\|_1 d\mu(\mathbf{t})$$

или $\|\Phi\|_{H^1} \leq \int_{\mathbb{Q}_p^n} \|f(\cdot, \mathbf{t})\|_{H^1} d\mu(\mathbf{t})$. Лемма доказана.

Аналог леммы 6 для групп Виленкина доказан Ефимовым [15; гл. 10, § 10.5].

ЛЕММА 6. Пусть $X(\mathbb{Q}_p^n) = L^q(\mathbb{Q}_p^n)$, $1 \leq q < \infty$, $BUC(\mathbb{Q}_p^n)$, $H^1(\mathbb{Q}_p^n)$ или $VMO(\mathbb{Q}_p^n)$, и $f \in X(\mathbb{Q}_p^n)$. Тогда справедливо неравенство

$$\mathcal{A}_k(f)_X \leq \omega_k(f)_X \leq 2\mathcal{A}_k(f)_X. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правое неравенство (2.2) доказывается стандартным образом во всех случаях. Пусть функция $g_k \in G_k$ такова, что $\|f - g_k\|_X \leq \mathcal{A}_k(f)_X + \varepsilon/2$ и $\mathbf{h} \in B_{-k}$. Тогда $g_k(\cdot + \mathbf{h}) = g_k(\cdot)$ и

$$\begin{aligned} \|f(\cdot + \mathbf{h}) - f(\cdot)\|_X &\leq \|f(\cdot + \mathbf{h}) - g_k(\cdot + \mathbf{h})\|_X \\ &\quad + \|g_k(\cdot + \mathbf{h}) - g_k(\cdot)\|_X + \|g_k(\cdot) - f(\cdot)\|_X \\ &< 2\mathcal{A}_k(f)_X + \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем правое неравенство (2.2).

Для доказательства левого неравенства (2.2) рассмотрим функцию

$$g_k(f)(\mathbf{x}) = f_{B_{-k}(\mathbf{x})} = p^k \int_{B_{-k}(\mathbf{x})} f(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}).$$

Легко видеть, что $g_k(f) \in G_k$ и

$$f(\mathbf{x}) - g_k(f)(\mathbf{x}) = p^k \int_{B_{-k}} (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) d\mu(\mathbf{h}),$$

откуда по обобщенному неравенству Минковского при $X(\mathbb{Q}_p^n) = L^q(\mathbb{Q}_p^n)$, $1 \leq q < \infty$, и непосредственно при $X(\mathbb{Q}_p^n) = BUC(\mathbb{Q}_p^n)$ получаем левое неравенство (2.2). Для $X(\mathbb{Q}_p^n) = VMO(\mathbb{Q}_p^n)$ используем лемму 4 вместо обобщенного неравенства Минковского. При этом

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} + \mathbf{t}))X_{B_{-k}}(\mathbf{t}),$$

где X_E – индикатор E , поэтому $\Phi_1(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} |f(\mathbf{x}, \mathbf{t})| d\mu(\mathbf{t})$ существует п.в. и $\Phi_1 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{Q}_p^n)$, так как $f(\cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{Q}_p^n)$. Для $H^1(\mathbb{Q}_p^n)$ аналогичным образом используем лемму 5. Лемма доказана.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть φ и A таковы, что

$$\begin{aligned} \gamma(\varphi, A) &= \int_{\mathbb{Q}_p^n} |\varphi(\mathbf{t})| \alpha^n(A^{-1}(\mathbf{t})) d\mu(\mathbf{t}) < \infty, \\ \kappa_1(\varphi, A) &= \int_{\mathbb{Q}_p^n} |\varphi(\mathbf{t})| |\det A^{-1}(\mathbf{t})|_p d\mu(\mathbf{t}) < \infty. \end{aligned}$$

Тогда оператор $\mathcal{H}_{\varphi, A}$ ограничен на $H^1(\mathbb{Q}_p^n)$ и

$$\|\mathcal{H}_{\varphi, A}(f)\|_{H^1} \leq \gamma(\varphi, A) \|f\|_{H^1}.$$

Здесь $\alpha(A)$ – норма матрицы A , определенная в лемме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in H^1(\mathbb{Q}_p^n)$. В силу леммы 5 имеем

$$\|\mathcal{H}_{\varphi, A}(f)\|_{H^1} \leq \int_{\mathbb{Q}_p^n} |\varphi(\mathbf{t})| \|f(A(\mathbf{t}) \cdot)\|_{H^1} d\mu(\mathbf{t}). \quad (3.1)$$

При этом условие $\kappa_1(\varphi, A) < \infty$ обеспечивает существование и интегрируемость $\Phi_1(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} |\varphi(\mathbf{t}) f(A(\mathbf{t}) \cdot)| d\mu(\mathbf{t})$. Рассмотрим атомарное разложение $f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$

такое, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \leq C_1 \|f\|_{H^1}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ сходится в $L^1(\mathbb{Q}_p^n)$ и существует возрастающая последовательность $\{N_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такая, что $f(\mathbf{x}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_i} \lambda_k a_k(\mathbf{x})$ п.в. на $\mathbb{Q}_p^n$. Тогда

$$f(A(\mathbf{t})\mathbf{x}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_i} \lambda_k a_k(A(\mathbf{t})\mathbf{x}) \quad \text{при п.в. } \mathbf{x} \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Докажем, что $b_k = \alpha^{-n}(A^{-1}(\mathbf{t}))a_k(A(\mathbf{t})\cdot)$ – тоже атомы при п.в. $\mathbf{t} \in \mathbb{Q}_p^n$. Согласно формуле замены переменных (см. [1; § 4, формула (4.2)]) для невырожденной матрицы $A(\mathbf{t})$ и атома a получаем

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} a(A(\mathbf{t})\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} |\det A^{-1}(\mathbf{t})|_p a(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{y}) = |\det A^{-1}(\mathbf{t})|_p \int_{\mathbb{Q}_p^n} a(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{y}) = 0.$$

Пусть $\text{supp}(a) \subset B_k(\mathbf{x}_0)$. Тогда

$$\text{supp}(a(A(\mathbf{t})\cdot)) \subset \{\mathbf{u} \in \mathbb{Q}_p^n : \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \in A^{-1}(\mathbf{t})(B_k)\} \subset B_l(\mathbf{u}_0),$$

где

$$B_l(\mathbf{u}_0) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Q}_p^n : |\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|_p \leq \alpha(A^{-1}(\mathbf{t}))p^k\}, \quad \mathbf{u}_0 = A^{-1}(\mathbf{t})\mathbf{x}_0.$$

Наконец, если $|a(\mathbf{x})| \leq p^{-kn} = \mu^{-1}(B_k(\mathbf{x}_0))$, то

$$|\alpha^{-n}(A^{-1}(\mathbf{t}))a(A(\mathbf{t})\mathbf{u})| \leq \mu^{-1}(B_l(\mathbf{u}_0)) \quad \text{для всех } \mathbf{u} \in \mathbb{Q}_p^n$$

и можно записать

$$f(A(\mathbf{t})\mathbf{u}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_i} \lambda_k \alpha^n(A^{-1}(\mathbf{t}))b_k(\mathbf{u}) \quad \text{п.в. на } \mathbb{Q}_p^n,$$

где $b_k(\mathbf{u})$ – атомы. Отсюда следует, что

$$\|f(A(\mathbf{t})\cdot)\|_{H^1} \leq \sum_{k=1}^{N_i} |\lambda_k| \alpha^n(A^{-1}(\mathbf{t})) \|b_k\|_{H^1} \leq C_1 \alpha^n(A^{-1}(\mathbf{t})) \|f\|_{H^1}.$$

Подставляя последнюю оценку в (3.1), завершаем доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть φ и A таковы, что $\kappa_{\infty}(\varphi, A) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} |\varphi(\mathbf{t})| d\mu(\mathbf{t}) < \infty$ и

$$\gamma^*(\varphi, A) = \gamma(\varphi_1, A^{-1}) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} |\varphi(\mathbf{t})| |\det A^{-1}(\mathbf{t})|_p \alpha^n(A(\mathbf{t})) d\mu(\mathbf{t}).$$

Тогда оператор $\mathcal{H}_{\varphi, A}^*$ ограничен на $H^1(\mathbb{Q}_p^n)$ и

$$\|\mathcal{H}_{\varphi, A}^*(f)\|_{H^1} \leq \gamma^*(\varphi, A) \|f\|_{H^1}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия следствия 1. Тогда оператор $\mathcal{H}_{\varphi, A}$ действует в пространстве $\text{ВМО}(\mathbb{Q}_p^n)$ и ограничен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечалось во введении, операторы $\mathcal{H}_{\varphi,A}$ и $\mathcal{H}_{\varphi,A}^*$ сопряжены друг другу, а $BMO(\mathbb{Q}_p^n)$ является сопряженным пространством к $H^1(\mathbb{Q}_p^n)$. В силу известного факта функционального анализа в условиях следствия 1 имеем

$$\|\mathcal{H}_{\varphi,A}\|_{BMO \rightarrow BMO} \asymp \|\mathcal{H}_{\varphi,A}^*\|_{H^1 \rightarrow H^1} < \infty.$$

Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 2. Пусть φ и A таковы, что $\varphi \geq 0$, $\alpha(A(\mathbf{t}))$ ограничена постоянной α , $\gamma^*(\varphi, A) < \infty$ и $\kappa_\infty(\varphi, A) < \infty$. Тогда оператор $\mathcal{H}_{\varphi,A}$ ограниченно действует в $BMO(\mathbb{Q}_p^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in BMO(\mathbb{Q}_p^n)$, $I = \mathbf{x} + B_k$ — шар в $\mathbb{Q}_p^n$ и $c_I(\mathbf{t}) = f_{A(\mathbf{t})I}$. Тогда по формуле замены переменных

$$\begin{aligned} \mu^{-1}(I) \int_I |f(A(\mathbf{t})\mathbf{x}) - c_I(\mathbf{t})| d\mu(\mathbf{x}) &= \mu^{-1}(A(\mathbf{t})I) \int_{A(\mathbf{t})I} |f(\mathbf{u}) - c_I(\mathbf{t})| d\mu(\mathbf{u}) \\ &\leq \alpha^n(A(\mathbf{t})) \mu^{-1}(A(\mathbf{t})I) |\det A^{-1}(\mathbf{t})|_p \int_{A(\mathbf{t})I} |f(\mathbf{u}) - c_I(\mathbf{t})| d\mu(\mathbf{u}) \\ &\leq \alpha^n(A(\mathbf{t})) |\det A^{-1}(\mathbf{t})|_p \|f\|_{*,p^k\alpha}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В силу непрерывности $A(\mathbf{t})$ по $\mathbf{t}$ выражение $f_{A(\mathbf{t})I}$ также непрерывно по $\mathbf{t}$. Далее, в силу (3.2) имеем

$$\begin{aligned} |c_I(\mathbf{t})| &\leq \mu^{-1}(I) \left(\int_I |f(A(\mathbf{t})\mathbf{x}) - c_I(\mathbf{t})| d\mu(\mathbf{x}) + \int_I |f(A(\mathbf{t})\mathbf{x})| d\mu(\mathbf{x}) \right) \\ &\leq \|f\|_* \alpha^n(A(\mathbf{t})) |\det A^{-1}(\mathbf{t})|_p + \mu^{-1}(I) \int_I |f(A(\mathbf{t})\mathbf{x})| d\mu(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} \varphi(\mathbf{t}) |c_I(\mathbf{t})| d\mu(\mathbf{t}) \leq \|f\|_* \gamma^*(\varphi, A) + \mu^{-1}(I) \int_I \int_{\mathbb{Q}_p^n} |f(A(\mathbf{t})\mathbf{x})| \varphi(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{x}). \quad (3.3)$$

Из определения $g \in BMO(\mathbb{Q}_p^n)$ следует, что $|g| \in BMO(\mathbb{Q}_p^n)$. По следствию 2 интеграл $\int_{\mathbb{Q}_p^n} |f(A(\mathbf{t})\mathbf{x})| \varphi(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t})$ представляет собой функцию из $BMO(\mathbb{Q}_p^n)$, в частности, она локально интегрируема и правая часть (3.3) конечна при фиксированном I . Поэтому существует $c(I) := \int_{\mathbb{Q}_p^n} \varphi(\mathbf{t}) c_I(\mathbf{t}) d\mu(\mathbf{t})$ и в силу (3.2)

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_{\varphi,A}(f) - c(I)|_I &\leq \mu^{-1}(I) \int_{\mathbb{Q}_p^n} \varphi(\mathbf{t}) \int_I |f(A(\mathbf{t})\mathbf{x}) - c_I(\mathbf{t})| d\mu(\mathbf{t}) \\ &\leq \int_{\mathbb{Q}_p^n} \varphi(\mathbf{t}) \|f\|_{*,p^k\alpha} \alpha^n(A(\mathbf{t})) |\det A^{-1}(\mathbf{t})|_p d\mu(\mathbf{t}) \leq \gamma^*(\varphi, A) \|f\|_{*,p^k\alpha}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ясно, что при $k \rightarrow -\infty$ правая часть (3.4) стремится к нулю, откуда $\|\mathcal{H}_{\varphi,A}(f)\|_{p^k}^* \rightarrow 0$ и по лемме 1 получаем $\mathcal{H}_{\varphi,A}(f) \in BMO(\mathbb{Q}_p^n)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. 1) Пусть φ и A таковы, что

$$\kappa_q(\varphi, A) < \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad \text{supp}(\varphi) \subset B_0, \\ \alpha(A(\mathbf{t})) \leq 1 \quad \text{для всех } \mathbf{t} \in \text{supp}(\varphi).$$

Тогда оператор $\mathcal{H}_{\varphi, A}$ отображает $H_{L^q}^\omega(\mathbb{Q}_p^n)$ в себя (при $q = \infty$ полагаем $L^q \equiv BUC$).

2) Пусть φ и A таковы, что

$$\gamma(\varphi, A) < \infty, \quad \kappa_1(\varphi, A) < \infty, \quad \text{supp}(\varphi) \subset B_0, \\ \alpha(A(\mathbf{t})) \leq 1 \quad \text{для всех } \mathbf{t} \in \text{supp}(\varphi).$$

Тогда оператор $\mathcal{H}_{\varphi, A}$ отображает $H_{H^1}^\omega(\mathbb{Q}_p^n)$ в себя.

3) Пусть φ и A таковы, что

$$\varphi \geq 0, \quad \gamma^*(\varphi, A) < \infty, \quad \kappa_\infty(\varphi, A) < \infty, \quad \text{supp}(\varphi) \subset B_0, \\ \alpha(A(\mathbf{t})) \leq 1 \quad \text{для всех } \mathbf{t} \in \text{supp}(\varphi).$$

Тогда оператор $\mathcal{H}_{\varphi, A}$ отображает $H_{VMO}^\omega(\mathbb{Q}_p^n)$ в себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $f \in H_{L^q}^\omega(\mathbb{Q}_p^n)$, т.е. $\omega_k(f)_{L^q} \leq C_1 \omega_k$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. Согласно лемме 6 найдем $g_n \in G_n \cap L^q(\mathbb{Q}_p^n)$ такую, что $\|f - g_n\|_q \leq 2C_1 \omega_n$. Как указано во введении, при условии (1.3) оператор $\mathcal{H}_{\varphi, A}$ ограничен в $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$, а по лемме 3 имеем $\mathcal{H}_{\varphi, A}(g_n) \in G_n$. Таким образом,

$$\mathcal{A}_n(\mathcal{H}_{\varphi, A}(f))_{L^q} \leq \|\mathcal{H}_{\varphi, A}(f) - \mathcal{H}_{\varphi, A}(g_n)\|_q \leq C_2 \|f - g_n\|_q \leq C_3 \omega_n. \quad (3.5)$$

Снова по лемме 6 находим, что

$$\omega_n(\mathcal{H}_{\varphi, A}(f))_{L^q} \leq 2C_3 \omega_n, \quad \mathcal{H}_{\varphi, A}(f) \in H_{L^q}^\omega(\mathbb{Q}_p^n).$$

Часть 1) теоремы доказана.

Доказательство пунктов 2) и 3) проходит по той же схеме, что и доказательство 1) с применением теорем 1 и 2, а также лемм 3 и 6.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть

$$\mathcal{B}^{(n)}(f)(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n |x_i|_p^{-1} \int_{\Gamma(\mathbf{x})} f(\mathbf{u}) d\mu(\mathbf{u}),$$

где

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Q}_p^n : |u_i|_p \leq |x_i|_p, 1 \leq i \leq n\},$$

– n -мерный модифицированный оператор Харди–Литтлвуда. Тогда $\mathcal{B}^{(n)}(f)$ отображает $H_{L^q}^\omega(\mathbb{Q}_p^n)$ в себя при $1 < q \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $\mathcal{B}^{(n)}(f)(\mathbf{x}) = \int_{B_0(\mathbf{0})} f(x_1 t_1, \dots, x_n t_n) d\mu(\mathbf{t})$, $\varphi = X_{B_0}$, $A(\mathbf{t})$ – диагональная матрица с элементами $t_1, \dots, t_n$ на главной диагонали и $\alpha(A(\mathbf{t})) \leq 1$ для $\mathbf{t} \in B_0(\mathbf{0})$. Наконец,

$$\kappa_q(\varphi, A) = \int_{B_0(\mathbf{0})} |t_1 \dots t_n|_p^{-1/q} d\mu(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^n \int_{B_0} |t_i|_p^{-1/q} d\mu(t) < \infty$$

для $q > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор $\mathcal{B}^{(n)}(f)$ даже при $n = 1$ не отображает $H^1(\mathbb{Q}_p^1)$ в себя. К сожалению, условия следствия 2 и теоремы 2 не позволяют ответить утвердительно на вопрос об ограниченности данного оператора в $BMO(\mathbb{Q}_p^n)$ и $VMO(\mathbb{Q}_p^n)$, хотя при $n = 1$ это известный факт (см. [16] в двоичном случае и [13] для групп Виленкина с ограниченной образующей последовательностью).

СЛЕДСТВИЕ 4. В условиях теоремы 3 для соответствующих пространств X во всех пунктах 1)–3) имеем оценку

$$\omega_n(\mathcal{H}_{\varphi,A}(f))_X \leq C\omega_n(f)_X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.5) и леммы 6 следует, что для $g_n \in G_n$ со свойством $\|f - g_n\|_X \leq 2\mathcal{A}_n(f)_X$ верно

$$\omega_n(\mathcal{H}_{\varphi,A}(f))_X \leq 2\mathcal{A}_n(\mathcal{H}_{\varphi,A}(f))_X \leq C_1\|f - g_n\|_X \leq 2C_1\omega_n(f)_X.$$

Следствие доказано.

Введем (неоднородное) пространство Гёльдера–Бесова $\dot{\Lambda}(a, q, r)$, где $a > 0$, $0 < r < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, как множество $f \in L^q(\mathbb{Q}_p^n)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}(a,q,r)} = \|f\|_q + \left(\sum_{l=0}^{\infty} p^{lar} \omega_l^r(f)_{L^q} \right)^{1/r} < \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть φ и A таковы, что $\kappa_q(\varphi, A) < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\text{supp}(\varphi) \subset B_0$ и $\alpha(A(\mathbf{t})) \leq 1$ для всех $\mathbf{t} \in \text{supp}(\varphi)$. Тогда оператор $\mathcal{H}_{\varphi,A}$ действует в пространстве $\dot{\Lambda}(a, q, r)$ и ограничен.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p*-адический анализ и математическая физика, Наука, М., 1994.
- [2] Н. Коблиц, *p*-адические числа, *p*-адический анализ и дзета-функции, Современная математика: вводные курсы, Мир, М., 1982.
- [3] R. R. Coifman, G. Weiss, “Extensions of Hardy spaces and their use in analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83**:4 (1977), 569–645.
- [4] F. John, L. Nirenberg, “On functions of bounded mean oscillation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14**:3 (1961), 415–426.
- [5] D. Sarason, “Functions of vanishing mean oscillation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **207** (1975), 391–405.
- [6] E. Liflyand, F. Móricz, “The Hausdorff operator is bounded on the real Hardy space $H^1(\mathbb{R})$ ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**:5 (2000), 1391–1396.
- [7] K. F. Andersen, “Boundedness of Hausdorff operator on $L^p(\mathbb{R}^n)$, $H^1(\mathbb{R}^n)$ and $BMO(\mathbb{R}^n)$ ”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **69**:1-2 (2003), 409–418.
- [8] F. Móricz, “Multivariate Hausdorff operators on the spaces $H^1(\mathbb{R}^n)$ and $BMO(\mathbb{R}^n)$ ”, *Anal. Math.*, **31**:1 (2005), 31–41.
- [9] A. K. Lerner, E. Liflyand, “Multidimensional Hausdorff operators on the real Hardy space”, *J. Aust. Math. Soc.*, **83**:1 (2007), 79–86.
- [10] E. Liflyand, “Boundedness of multidimensional Hausdorff operators on $H^1(\mathbb{R}^n)$ ”, *Acta. Sci. Math. (Szeged)*, **74**:3-4 (2008), 845–851.

- [11] S. S. Volosivets, “Multidimensional Hausdorff operator on p -adic field”, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **2**:3 (2010), 252–259.
- [12] J. A. Chao, M. H. Taibleson, “Generalized conjugate systems on local fields”, *Studia Math.*, **64**:3 (1979), 213–225.
- [13] S. S. Volosivets, “On $\mathbf{P}$ -adic analogs of Hardy and Hardy–Littlewood operators”, *East J. Approx.*, **11**:1 (2005), 57–72.
- [14] S. S. Volosivets, “On Hardy and Hardy–Littlewood transforms in classes of functions with given majorant of modulus of continuity”, *Acta. Sci. Math. (Szeged)*, **75**:1-2 (2009), 265–274.
- [15] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987.
- [16] Б. И. Голубов, “Об ограниченности двоичных операторов Харди и Харди–Литтлвуда в двоичных пространствах H и BMO ”, *Anal. Math.*, **26**:4 (2000), 287–298.

С. С. Волосивец

Саратовский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Поступило

17.02.2011

Исправленный вариант

24.06.2011