Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, Матричные задачи дополнения блочного типа, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 863–873

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm905>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:17:43

УДК 519.6

МАТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДОПОЛНЕНИЯ БЛОЧНОГО ТИПА

Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов

Показана (безусловная или при определенных условиях) разрешимость трех матричных задач дополнения блочного типа. В задачах этого типа строится матрица A с предписанным характеристическим многочленом, в которой заданы один или несколько блоков блочного (2×2) -представления. В данном случае задаются соответственно: а) блок A_{12} ; б) блок A_{11} ; в) блоки A_{11} и A_{12} . Обсуждается опыт реализации алгоритмов, решающих указанные задачи, в виде процедур системы символьных вычислений MAPLE.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Пусть фиксировано некоторое числовое поле K . Мы имеем в виду прежде всего поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, но, в принципе, допустимо любое поле *характеристики нуль*.

Пусть выбран *нормированный* (т.е. имеющий старший коэффициент 1) многочлен степени n с коэффициентами из поля K :

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (1.1)$$

Пусть, далее, в блочном представлении $(n \times n)$ -матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

заданы один или несколько блоков A_{ij} . Предполагается, что диагональные блоки A_{11} и A_{22} квадратные и элементы всех блоков суть числа из K . Требуется определить значения элементов незаданных блоков (иначе называемых *свободными*) таким образом, чтобы характеристическим многочленом матрицы A был многочлен (1.1). Этот класс обратных матричных задач на собственные значения называется задачами *блочного типа*.

Настоящая статья представляет собой продолжение нашей статьи [1], где был определен класс матричных задач *дополнения*. Задачи блочного типа могут рассматриваться как подмножество этого класса. Совокупность $\mathcal{X}$ пар индексов, характеризующая задачу дополнения, в случае блочных задач соответствует множеству элементов заданных блоков.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00927.

Как и в [1], нас интересует вопрос о возможности решить конкретную задачу дополнения посредством конечной последовательности рациональных операций. Если задача разрешима в этом смысле, то алгоритм, реализующий ее решение в какой-либо системе безошибочных вычислений, будет давать точные результаты в случае рациональных или целочисленных входных данных.

Ниже мы рассматриваем три конкретные задачи дополнения блочного типа. В них задаются соответственно:

- а) блок A_{12} ;
- б) блок A_{11} ;
- в) блоки A_{11} и A_{12} .

Для краткости будем говорить об A_{12} -задаче, A_{11} -задаче и (A_{11}, A_{12}) -задаче.

Пусть l – порядок блока A_{11} в (1.2). Тогда $m = n - l$ есть порядок блока A_{22} . В п. 2. показано:

- 1) A_{12} -задача рационально разрешима для любого l , $0 < l < n$;
- 2) A_{11} -задача рационально разрешима, если $l \geq n/2$; при $l > n/2$ задача все еще рационально разрешима, если в рациональной канонической форме (см. ниже) заданного блока A_{11} число k прямых слагаемых не превосходит m ;
- 3) (A_{11}, A_{12}) -задача рационально разрешима, если пара (A_{11}, A_{12}) вполне управляема. Последнее означает, что прямоугольная матрица

$$R(A_{11}, A_{12}) = (A_{12} \quad A_{11}A_{12} \quad A_{11}^2A_{12} \quad \dots \quad A_{11}^{l-1}A_{12})$$

имеет полный строчный ранг l .

В п. 3 обсуждается наш опыт реализации алгоритмов, решающих указанные задачи, в виде процедур системы символьных вычислений MAPLE.

Закончим данный раздел напомним некоторых определений и фактов из теории матриц, важных для дальнейшего.

Сопоставим $(n \times n)$ -матрице A над полем K *характеристическую матрицу* $\hat{A}(\lambda) = \lambda I_n - A$. Элементами последней являются (линейные) многочлены от λ , т.е. элементы кольца многочленов $K[\lambda]$. Выполняя в $K[\lambda]$ последовательность элементарных преобразований над строками и столбцами матрицы $\hat{A}(\lambda)$, можно получить матрицу вида

$$E(\lambda) = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где каждый из нормированных многочленов $e_i(\lambda)$ делит следующий многочлен $e_{i+1}(\lambda)$:

$$e_i \mid e_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Матрица (1.3) называется *нормальной формой Смита*, а многочлены $e_1(\lambda), \dots, e_n(\lambda)$ – *инвариантными множителями* (или *инвариантными многочленами*) матрицы A .

Описание алгоритма построения формы Смита можно найти, например, в [2, ч. 1, разд. 3.22]. Из этого описания следует, в частности, что

$$e_i(\lambda) = \frac{d_i(\lambda)}{d_{i-1}(\lambda)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

где $d_0(\lambda) = 1$, а $d_i(\lambda)$ при $i \geq 1$ есть наибольший общий делитель миноров порядка i матрицы $\hat{A}(\lambda)$. Для нескальной матрицы A , очевидно, $d_1(\lambda) = 1$ и, в общем случае, ряд младших многочленов $d_i(\lambda)$ также равен 1. Поэтому лишь некоторые из инвариантных многочленов $e_i(\lambda)$ не являются константами; число таких многочленов, из-за отсутствия общеупотребительного термина, будем называть *жордановым индексом* матрицы A . Многочлен $e_n(\lambda)$ — это *минимальный многочлен* матрицы A . Для простой матрицы минимальный многочлен совпадает с характеристическим, т.е. жорданов индекс такой матрицы равен 1.

Если $(n \times n)$ -матрицы A и B над полем K имеют одну и ту же форму Смита $E(\lambda)$, то они подобны. Матрицу T , трансформирующую B в $A = TBT^{-1}$, можно найти рациональным вычислением, если известны преобразования, переводящие характеристические матрицы $\hat{A}(\lambda)$, $\hat{B}(\lambda)$ в $E(\lambda)$ (см. [2, ч. I, разд. 3.24]).

Матрица

$$C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & -a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

называется (правой) *сопровождающей матрицей* многочлена $f(\lambda)$. Другое название матрицы (1.5) — (правая) *клетка Фробениуса*.

Пусть k — жорданов индекс матрицы A . Тогда $e_1(\lambda) = \dots = e_{n-k}(\lambda) = 1$. Положим

$$f_l(\lambda) = e_{n-k+l}(\lambda), \quad l = 1, \dots, k.$$

Нетрудно проверить, используя формулу (1.4), что матрица

$$F = C(f_1) \oplus C(f_2) \oplus \dots \oplus C(f_k) \quad (1.6)$$

имеет своей формой Смита матрицу $E(\lambda)$. Тем самым, матрицы A и F подобны. Матрица (1.6) называется в [3, гл. VI, § 6] *первой естественной нормальной формой* матрицы A . Однако мы будем вразрез с принятой (например, в [2]) и на наш взгляд ошибочной терминологией называть F *рациональной канонической формой* для A , желая подчеркнуть, что F можно получить из A посредством рациональных вычислений.

2. Рациональная разрешимость. Пусть K — произвольное поле характеристики нуль. В этом пункте показана (безусловная или при определенных условиях) рациональная разрешимость трех конкретных задач дополнения блочного типа. Каждой из них ниже отводится самостоятельный подпункт.

Сделаем несколько предварительных замечаний. Пусть P и Q — невырожденные матрицы порядка l и m соответственно. Если A_{12} -задача (рационально) разрешима для матрицы A_{12} , то она (рационально) разрешима и для матрицы $\tilde{A}_{12} = PAQ$; разумеется, верно и обратное утверждение. Действительно, если матрица (1.2) решает исходную задачу, то матрица

$$\tilde{A} = (P \oplus Q^{-1})A(P^{-1} \oplus Q) = \begin{pmatrix} PA_{11}P^{-1} & PA_{12}Q \\ Q^{-1}A_{12}P^{-1} & Q^{-1}A_{22}Q \end{pmatrix}$$

есть решение задачи с входным блоком $\tilde{A}_{12}$. Это наблюдение позволяет при исследовании разрешимости A_{12} -задачи заменять заданную матрицу A_{12} более простой (или в каком-то отношении более удобной) *эквивалентной* ей матрицей.

Точно так же в A_{11} -задаче заданную матрицу A_{11} можно заменить на *подобную* матрицу $\tilde{A}_{11} = PA_{11}P^{-1}$. Однако имеются и другие возможности.

Пусть матрица (1.2) есть решение A_{11} -задачи. Для *произвольной* $(m \times l)$ -матрицы G положим

$$F = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ G & I_m \end{pmatrix},$$

где I_l обозначает единичную матрицу порядка l , и

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= FAF^{-1} = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ G & I_m \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ -G & I_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}G & A_{12} \\ A_{21} - A_{22}G - GA_{12}G + GA_{11} & A_{22} + GA_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Таким образом, (рациональная) разрешимость исходной задачи переносится при *любой* матрице G на задачу с входным блоком $A_{11} - A_{12}G$; при этом блок A_{12} взят из решения (1.2) исходной задачи.

Сделанные замечания имеют силу и для (A_{11}, A_{12}) -задачи. В применении к ней первое замечание означает, что заданную пару (A_{11}, A_{12}) можно заменить парой вида $(PA_{11}P^{-1}, PA_{12}Q)$. Согласно второму замечанию вместо (A_{11}, A_{12}) может рассматриваться пара $(A_{11} - A_{12}G, A_{12})$ с *произвольной* $(m \times l)$ -матрицей G . В отличие от A_{11} -задачи, блок A_{12} известен с самого начала. Если задача решена для пары $(A_{11} - A_{12}G, A_{12})$ и $\tilde{A}$ – решение этой задачи, то, обращая преобразование (2.1), придем к искомой матрице A .

2а. A_{12} -задача. Если $A_{12} = 0$, то необходимым и достаточным условием разрешимости задачи является возможность разложить над K заданный многочлен $f(\lambda)$ в произведение

$$f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda) \quad (2.2)$$

многочленов степени l и m соответственно. Если разложение (2.2) известно, то в качестве решения можно взять прямую сумму клеток Фробениуса: $A = C(f_1) \oplus C(f_2)$.

Если же $A_{12} \neq 0$, то A_{12} -задача всегда разрешима рационально. Действительно, пользуясь сделанным выше замечанием, можно при необходимости заменить исходную задачу эквивалентной задачей, в которой входной $(l \times m)$ -блок $\tilde{A}_{12}$ имеет ненулевой элемент в позиции $(1, m)$. Окаймим $\tilde{A}_{12}$ блоками

$$\tilde{A}_{11} = J_l^T, \quad \tilde{A}_{22} = J_m^T, \quad \tilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Символ J_s – это стандартное обозначение (верхней) жордановой клетки порядка s с нулевыми собственными значениями.

Очевидно, что построенная матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

имеет верхнюю форму Хессенберга. Ее ведущая главная подматрица $\tilde{A}_{n-1}$ порядка $n-1$ и последний столбец (взятый без последней компоненты) составляют вполне управляемую пару

$$(\tilde{A}_{n-1} \quad b_{n-1}). \quad (2.4)$$

Поэтому прямоугольную матрицу (2.4) можно приписыванием последней строки достроить до квадратной $(n \times n)$ -матрицы $\hat{A}$ так, чтобы характеристическим многочленом $\hat{A}$ был заданный многочлен $f(\lambda)$. (Один из возможных методов достраивания был описан в [1, п. 2в].) Иначе говоря, изменяя элементы последней строки в матрице (2.3), можно получить решение A_{12} -задачи.

В изложенной конструкции блок $\tilde{A}_{12}$ был подчинен единственному требованию: неравенству нулю элемента $(1, m)$. Выбор той или иной формы для $\tilde{A}_{12}$ с соблюдением данного требования может оказать значительное влияние на трудоемкость всего процесса. Мы вернемся к этому вопросу в п. 3.

2б. A_{11} -задача. Содержанием этого раздела является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(\lambda)$ – произвольный нормированный многочлен степени n с коэффициентами из поля K . Пусть l и k – порядок и жорданов индекс блока A_{11} соответственно; $t = n - l$, причем $t > 0$. Если $l \leq t$ или $l > t$, но $k \leq t$, то A_{11} -задача разрешима для любой заданной матрицы A_{11} с элементами из K . При этом решение может быть построено конечными рациональными вычислениями в поле K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы будет получено адаптацией рассуждений в [4]. Заметим прежде всего, что при выдвинутых условиях на l и k существует $(l \times t)$ -матрица A_{12} такая, что A_{11} и A_{12} составляют вполне управляемую пару. Метод (рационального) построения A_{12} будет описан в п. 3.

Фиксируя одну из подходящих матриц A_{12} , будем с этого момента искать решение (A_{11}, A_{12}) -задачи. Замечание, сделанное в начале п. 2, позволяет заменить (A_{11}, A_{12}) парой $(A_{11} - A_{12}G, A_{12})$, где G – произвольная $(m \times l)$ -матрица.

Пусть x – произвольная линейная комбинация столбцов блока A_{12} :

$$x = A_{12}r, \quad r \in K^m. \quad (2.5)$$

Известно, что для вполне управляемой пары (A_{11}, A_{12}) матрицу G можно выбрать таким образом, чтобы матрично-векторная пара $(A_{11} - A_{12}G, x)$ была вполне управляемой. Это утверждение в [4] обосновывается ссылкой на [5]. Однако в п. 3 мы приведем явные формулы для элементов подходящей матрицы G .

Пусть матрица G построена указанным образом по выбранному вектору x . Полагая $\tilde{A}_{11} = A_{11} - A_{12}G$, перейдем от пары $(\tilde{A}_{11}, A_{12})$ к паре $(\tilde{A}_{11}, A_{12}R)$, где R – произвольная невырожденная $(m \times m)$ -матрица с первым столбцом r . В новом блоке $\tilde{A}_{12} = A_{12}R$ первым столбцом является вектор x .

Приведем вполне управляемую пару $(\tilde{A}_{11}, x)$ к канонической форме

$$(F, e_l) \quad (2.6)$$

посредством преобразования

$$F = P\tilde{A}_{11}P^{-1}, \quad e_l = Px. \quad (2.7)$$

В формулах (2.6), (2.7) e_l — это последний координатный вектор пространства K^l , а F — *нижняя* клетка Фробениуса:

$$C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_l & -a_{l-1} & -a_{l-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Способ вычисления матрицы P , представляющий собой модификацию метода Данилевского, описан в [1, п. 3].

Используем матрицу P для еще одного преобразования задачи: от пары $(\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{12})$ перейдем к паре $(P\tilde{A}_{11}P^{-1}, P\tilde{A}_{12}) = (F, \hat{A}_{12})$. Первым столбцом блока $\hat{A}_{12}$, очевидно, является вектор e_l . Новым переходом $(F, \hat{A}_{12}) \rightarrow (F - \hat{A}_{12}G_0, \hat{A}_{12})$ аннулируем в блоке $(1, 1)$ элементы нижней строки. Для этого достаточно взять матрицу G_0 вида

$$G_0 = \begin{pmatrix} \dot{g}_{11} & \dots & \dot{g}_{1l} \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

с подходящими элементами $\dot{g}_{11}, \dots, \dot{g}_{1l}$. Матрица $F - \hat{A}_{12}G_0$ есть не что иное, как жорданова клетка J_l .

Подведем промежуточный итог. Исходная (A_{11}, A_{12}) -задача разрешима, если разрешима задача для пары $(J_l, \hat{A}_{12})$.

Перейдем к решению последней. Недостающие блоки $\hat{A}_{21}$ и $\hat{A}_{22}$ для пары $(\hat{A}_{11}, \hat{A}_{12})$ будем искать в виде

$$\hat{A}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_l \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_m \end{pmatrix}$$

с неопределенными пока коэффициентами $y_1, y_2, \dots, y_l$ и $z_1, z_2, \dots, z_m$. В матрице

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} J_l & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{pmatrix}$$

ведущая главная подматрица порядка $n - 1$ и последний столбец (без последней компоненты z_m) составляют вполне управляемую пару. Поэтому завершить построение $\hat{A}$ (т.е. выбрать значения для $y_1, y_2, \dots, y_l, z_1, z_2, \dots, z_m$) можно так же, как в п. 2а. Теорема 1 доказана.

Мы стремились подчеркнуть конструктивность каждого этапа в предложенном доказательстве. Однако в рамках этой схемы эффективность процесса в целом можно значительно повысить, о чем будет сказано в п. 3.

2в. (A_{11}, A_{12}) -задача. По-прежнему все рассмотрения проводятся над полем K .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(l \times l)$ -матрица A_{11} и $(l \times m)$ -матрица A_{12} составляют вполне управляемую пару. Тогда (A_{11}, A_{12}) -задача рационально разрешима для любого нормированного многочлена $f(\lambda)$ степени n , $n = l + m$.

Это утверждение было установлено в ходе доказательства теоремы 1.

3. Программная реализация. Для каждой из задач 2а–2в нами составлена процедура на языке системы символьных вычислений MAPLE. Будем называть алгоритмы, реализованные этими процедурами, алгоритмами 1–3.

Алгоритмы 1–3, сохраняя схемы доказательств из п. 2, повышают численную эффективность отдельных этапов и существенно снижают трудоемкость процесса в целом.

Пусть r – ранг заданного блока A_{12} в задаче 2а. Исходная задача заменяется эквивалентной с блоком $\tilde{A}_{12} = P A_{12} Q$ вида

$$\tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{P}_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathcal{P}_r$ – это специальная матрица-перестановка:

$$\mathcal{P}_r = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \ddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Такой выбор блока $\tilde{A}_{12}$ значительно упрощает приведение пары (2.4) к канонической форме; это приведение (описываемое в [1, п. 2в]) является главным этапом в достраивании пары до матрицы с требуемым характеристическим многочленом.

Результаты численных экспериментов с алгоритмом 1 представлены в табл. 1. Для вычислений использовался персональный компьютер класса Intel Pentium Pro с тактовой частотой 166 Мг и оперативной памятью 32 Мб. Входными данными задач (т.е. элементами блока A_{12} и коэффициентами $a_1, a_2, \dots, a_n$ предписываемого характеристического многочлена) служили целые числа, (псевдо) случайным образом выбираемые из отрезка $[-9, 9]$. Значения порядка n , указываемые в первом столбце таблицы, менялись от 4 до 40 с шагом 4. Поскольку трудоемкость алгоритма зависит не только от n , но и от размера $l \times m$ блока A_{12} , то при каждом значении n решались задачи для значений $l = 1, n/4, n/2, 3n/4, n - 1$. Во втором–шестом столбцах таблицы приведено время (в секундах), полученное для различных пар (n, l) .

Число S_1 арифметических операций в алгоритме 1 выражается многочленом третьей степени от n, l и r ; старшие члены этого многочлена имеют вид

$$5n^3 + (n + lm + m^2)r - (n + m)\frac{r^2}{2}$$

(напомним, что $m = n - l$). Для псевдослучайной матрицы A_{12} , как правило, имеем $r = \min\{l, m\}$. Принимая это равенство и фиксируя n , можем показать, что график

n	l				
	1	$n/4$	$n/2$	$3n/4$	$n-1$
4	0.8	0.9	0.9	0.9	0.8
8	1.7	1.8	2.1	1.9	1.8
12	3.4	4.0	4.9	4.1	3.4
16	6.3	7.9	10.1	8.1	6.1
20	10.6	14.4	18.5	14.6	10.2
24	18.3	23.6	31.2	23.8	15.8
28	25.0	37.4	50.1	38.1	23.5
32	35.4	55.4	76.5	57.6	33.1
36	48.8	79.1	110.5	80.9	45.5
40	65.2	110.1	157.8	110.9	60.7

ТАБЛ. 1

функции $S_1 = S_1(l)$ приблизительно симметричен относительно прямой $l = n/2$; кроме того, прямая $l = n/2$ проходит вблизи точки глобального максимума S_1 . Обе эти закономерности очень точно отражены строками табл. 1.

Первым этапом алгоритма 2 является построение $(l \times m)$ -матрицы A_{12} , составляющей вместе с заданной матрицей A_{11} вполне управляемую пару. Это делается следующим образом. Матрица A_{11} приводится к (транспонированной) рациональной канонической форме:

$$A_{11} \longrightarrow \check{A}_{11} = PA_{11}P^{-1} = C^T(f_1) \oplus C^T(f_2) \oplus \dots \oplus C^T(f_k). \quad (3.1)$$

(Почему вместо правых клеток Фробениуса $C(f_i)$ нам нужны *нижние* клетки, будет ясно из дальнейшего.) Приведение (3.1) можно осуществить с помощью библиотечной функции `frobenius` системы MAPLE. Эта функция входит в состав пакета по линейной алгебре `linalg` и вычисляет обычную (т.е. правую) каноническую форму. Чтобы получить (3.1), нужно применить `frobenius` к транспонированной матрице A_{11}^T .

Обозначим через s_i ($1 \leq i \leq k$) порядок матрицы

$$C^T(f_1) \oplus C^T(f_2) \oplus \dots \oplus C^T(f_i).$$

Символ e_j ниже обозначает j -й координатный вектор размерности l . Легко видеть, что для матрицы

$$\check{A}_{12} = (e_{s_1} \ e_{s_2} \ \dots \ e_l \ 0 \ \dots \ 0),$$

где число столбцов равно m , пара $(\check{A}_{11}, \check{A}_{12})$ является вполне управляемой. Напомним, что по предположению $m \geq k$.

На втором этапе алгоритма полагаем $x = e_l$. Тогда $(m \times l)$ -матрицу $G = (g_{ij})$ можно определить так: для $t = 1, 2, \dots, k$

$$g_{tj} = \begin{cases} \{\check{A}_{11}\}_{s_t, j}, & s_{t-1} + 1 \leq j \leq s_t, \\ -1, & j = s_t + 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Все прочие элементы матрицы G равны нулю. В первой из формул (3.2) при $t = 1$ следует считать $s_0 = 0$; вторая формула (3.2) не применяется при $t = k$. В качестве примера предположим, что $l = 5$, $m = 3$, $k = 2$ и матрица $\check{A}_{11}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b_3 & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix}.$$

В таком случае

$$G = \begin{pmatrix} -a_2 & -a_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 & -b_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что матрица $\check{A}_{11} - \check{A}_{12}G$ есть жорданова клетка J_5 . Точно так же и в общем случае указанный выбор матрицы G обеспечивает равенство $\check{A}_{11} - \check{A}_{12}G = J_l$. Пара $(J_l, \check{A}_{12})$ соответствует по своей форме паре $(J_l, \hat{A}_{12})$ в доказательстве теоремы 1. Это означает, что преобразование (2.7) из п. 2б и два следующих за ним выполнять не нужно.

n	l				
	1	$n/4$	$n/2$	$3n/4$	$n - 1$
4	1.5	1.6	1.6	1.6	1.6
8	2.7	2.8	2.9	3.7	3.4
12	4.9	5.2	5.6	6.7	8.1
16	8.5	9.0	9.8	13.3	20.9
20	13.6	14.5	16.6	27.6	66.3
24	20.0	21.8	25.1	57.7	188.8
28	29.2	30.8	40.1	130.1	513.4
32	40.3	43.4	63.2	262.1	1256.7
36	54.2	57.8	93.8	546.1	2878.0
40	72.4	81.6	143.5	1069.7	6170.4

ТАБЛ. 2

Табл. 2 содержит результаты наших экспериментов с алгоритмом 2. Она построена аналогично табл. 1. Можно показать, что число S_2 арифметических операций в алгоритме 2 является многочленом третьей степени от n и l , причем два старших члена этого многочлена имеют вид

$$9n^3 + nl^2. \quad (3.3)$$

Таким образом, при фиксированном n функция $S_2 = S_2(l)$ монотонно возрастает. Строки табл. 2 отражают эту монотонность поведения. Вместе с тем при увеличении l от 1 до $n - 1$ коэффициент роста S_2 согласно (3.3) не должен превышать $10/9$. Совсем иной характер возрастания S_2 демонстрирует табл. 2. Это объясняется следующим образом:

формула (3.3) получена в предположении, что алгоритм приведения матрицы к рациональной канонической форме реализован “грамотно”; в таком случае его трудоемкость выражается величиной $O(l^3)$ (напомним, что в задаче 2б к рациональной форме приводится $(l \times l)$ -матрица A_{11}). К сожалению, процедура frobenius реализует указанный алгоритм весьма неэффективно. Мы установили экспериментально, что время обработки $(l \times l)$ -матрицы этой процедурой ведет себя как $O(l^4)$. С поправкой на данное обстоятельство и нужно воспринимать результаты в табл. 2.

В алгоритме 2 удалось существенно сократить объем вычислений за счет специального выбора блока A_{12} . Этого нельзя сделать в алгоритме 3, поскольку здесь блок A_{12} задан условиями задачи. В целом алгоритм 3 можно рассматривать как (почти) точную реализацию схемы, использованной в доказательстве теоремы 1. Введен только один дополнительный этап, на котором исходная пара (A_{11}, A_{12}) преобразуется к виду

$$\check{A}_{11} = Q A_{11} Q^{-1} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1u} \\ & F_{22} & \dots & F_{2u} \\ & & \dots & \\ & & & F_{uu} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\check{A}_{12} = Q A_{12} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1u} & f_{1,u+1} & \dots & f_{1m} \\ & f_{22} & \dots & f_{2u} & f_{2,u+1} & \dots & f_{2m} \\ & & \dots & & & & \\ & & & f_{uu} & f_{u,u+1} & \dots & f_{um} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

В этих формулах $F_{11}, F_{22}, \dots, F_{uu}$ суть правые клетки Фробениуса, порядки которых обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_u = l$); тогда $f_{11}, f_{22}, \dots, f_{uu}$ — это первые координатные векторы размерности $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u$ соответственно. Возможность приведения вполне управляемой пары (A_{11}, A_{12}) к форме (3.4), (3.5) показана, например, в [6, теорема 1.6]. Средством ее вычисления может быть алгоритм Данилевского. Для пары $(\check{A}_{11}, \check{A}_{12})$ в форме (3.4), (3.5) можно предложить простую матрицу G , отвечающую выбору в качестве вектора (2.5) первого столбца блока $\check{A}_{12}$, т.е. координатного l -мерного вектора e_1 . При таком векторе x не понадобится правостороннее преобразование с матрицей R (см. п. 2б).

Для $t = 1, 2, \dots, k-1$ положим $s_t = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_t$ и $g_{t+1, s_t} = -1$. Все остальные элементы матрицы G равны нулю. Легко проверить, что такому выбору G соответствует верхняя хессенбергова матрица $\tilde{A}_{11} = \check{A}_{11} - \check{A}_{12}G$. Очевидно, что матрично-векторная пара $(\tilde{A}_{11}, e_1)$ вполне управляема.

Результаты численных экспериментов с алгоритмом 3 показаны в табл. 3. Она устроена так же, как и две предыдущих.

При фиксированном n число $S_3 = S_3(l)$ арифметических операций в алгоритме 3 выражается формулой

$$S_3(l) = \begin{cases} \frac{7}{3}l^3 + nl^2 + 10\frac{1}{3}n^3 + O(n^2), & l < n-1, \\ 12\frac{1}{3}n^3 + O(n^2), & l = n-1. \end{cases}$$

Для $l < n-1$ функция $S_3(l)$ монотонно возрастает вместе с l . Это поведение отражено строками табл. 3. Однако, при $l = n-1$ происходит “скачок вниз”. Он связан с тем, что пара (3.4), (3.5) в этом случае представляет собой клетку Фробениуса порядка $n-1$

n	l				
	1	$n/4$	$n/2$	$3n/4$	$n-1$
4	1.6	1.5	1.6	1.6	1.6
8	2.8	3.0	3.6	4.8	4.1
12	5.4	6.0	8.4	25.9	13.4
16	9.0	11.3	25.8	168.2	56.3
20	14.5	20.1	91.9	923.5	224.1
24	21.4	34.7	347.9	3995.0	690.7
28	31.6	58.0	1075.3		2076.5
32	44.1	102.6	3320.1		
36	59.7	198.3	8480.8		
40	77.3	373.1			

ТАБЛ. 3

и единичный вектор e_1 размерности $n-1$. Построение матрицы G и соответствующее преобразование здесь не нужны, что и объясняет неравенство

$$S_3(n-1) < \lim_{l \rightarrow (n-1)-0} S_3(l).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н. Матричные задачи дополнения с произвольным расположением заданных элементов // ЖВМиМФ. 1999. Т. 39, № 9. С. 1427–1444.
- [2] Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
- [3] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
- [4] Wimmer H. K. Existenzsätze in der Theorie der Matrizen und lineare Kontrolltheorie // Monatsh. Math. 1974. V. 78. P. 256–263.
- [5] Wonham W. M., Morse A. S. Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: a geometric approach // SIAM J. Control. 1970. V. 8. P. 1–18.
- [6] Икрамов Х. Д. О размещении полюсов линейных стационарных систем // Вычисл. процессы и системы. Вып. 9. М.: Наука, 1993. С. 35–162.

(Х. Д. Икрамов) Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
(В. Н. Чугунов) Институт вычислительной математики РАН

Поступило
05.04.1999