Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Тхианван, Новые итерации с погрешностью для аппроксимации общих неподвижных точек двух обобщенных асимптотически квази-нерасширяемых отображений, не являющихся отображениями в себя, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 3, 410–423

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9051>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 18:15:25

Новые итерации с погрешностью для аппроксимации общих неподвижных точек двух обобщенных асимптотически квази-нерасширяемых отображений, не являющихся отображениями в себя

С. Тхианван

Пусть X – действительное равномерно выпуклое банахово пространство и C – непустой замкнутый выпуклый нерасширяемый ретракт пространства X относительно отображения нерасширяемого стягивания (ректракции) P . Пусть $T_1, T_2: C \rightarrow X$ – два равномерно L -липшицевых обобщенных асимптотически квази-нерасширяемых отображения ретракта C такие, что они не являются отображениями в себя и удовлетворяют условию A' относительно соответствующих последовательностей $\{k_n^{(i)}\}$ и $\{\delta_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$, $i = 1, 2$, таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(i)} < \infty$ и $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$. Пусть для любого $x_1 \in C$ $\{x_n\}$ – последовательность в C , определенная как

$$\begin{aligned} y_n &= P((1 - \beta_n - \gamma_n)x_n + \beta_n T_2(P T_2)^{n-1} x_n + \gamma_n v_n), \\ x_{n+1} &= P((1 - \alpha_n - \lambda_n)y_n + \alpha_n T_1(P T_1)^{n-1} x_n + \lambda_n u_n), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ – соответствующие действительные последовательности в $[0, 1)$ такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ и $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ – ограниченные последовательности в C . Тогда при определенных условиях $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ строго сходятся к общей неподвижной точке отображений T_1 и T_2 .

Библиография: 27 названий.

1. Введение. Пусть C – непустое замкнутое выпуклое подмножество действительного нормированного линейного пространства X . Отображение в себя $T: C \rightarrow C$ называется *нерасширяемым*, если $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ для всех $x, y \in C$. Отображение в себя $T: C \rightarrow C$ называется *асимптотически нерасширяемым*, если существует последовательность $\{k_n\} \subset [1, \infty)$, $k_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, такая, что

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\| \quad (1.1)$$

Автор благодарит Научный фонд Тайланда, Комиссию по высшему образованию (грант MRG5180036), и Университет Наресуан Пхаяо (Пхаяо, Тайланд) за финансовую поддержку при написании этой статьи.

для всех $x, y \in C$ и $n \geq 1$. Отображение $T: C \rightarrow C$ называется *равномерно L -липшицевым*, если существует постоянная $L > 0$ такая, что

$$\|T^n x - T^n y\| \leq L\|x - y\| \quad (1.2)$$

для всех $x, y \in C$ и $n \geq 1$.

Легко видеть, что если T – асимптотически нерасширяемое отображение, то оно будет равномерно L -липшицевым с равномерной константой Липшица $L = \sup\{k_n : n \geq 1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 (см. [1]). Отображение в себя $T: C \rightarrow C$ называется *обобщенным асимптотически нерасширяемым*, если существуют неотрицательные действительные последовательности $\{k_n\}$ и $\{\delta_n\}$, $k_n > 1$, $k_n \rightarrow 1$ и $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, такие, что

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n\|x - y\| + \delta_n \quad (1.3)$$

для всех $x, y \in C$ и $n \geq 1$. Отображение в себя $T: C \rightarrow C$ называется *обобщенным асимптотически квази-нерасширяемым*, если существуют неотрицательные действительные последовательности $\{k_n\}$ и $\{\delta_n\}$, $k_n > 1$, $k_n \rightarrow 1$ и $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, такие, что

$$\|T^n x - T^n p\| \leq k_n\|x - p\| + \delta_n \quad (1.4)$$

для всех $x \in C$, $p \in F(T)$ (здесь $F(T)$ – множество неподвижных точек отображения T) и $n \geq 1$.

Легко видеть, что это определение обобщенного асимптотически квази-нерасширяемого отображения объединяет различные определения классов отображений таких, как классы обобщенных асимптотически нерасширяемых отображений, классы отображений асимптотически нерасширяемого типа, классы асимптотически нерасширяемых отображений и классы нерасширяемых отображений.

Процесс итерации неподвижной точки в случае нерасширяемых отображений в себя, включая итерационные процессы Манна и Ишикавы, интенсивно изучались различными авторами (см. [2]–[5]). Для нерасширяемых отображений, не являющихся отображениями в себя, некоторые авторы (см. [6]–[10]) изучали теоремы строгой и слабой сходимости в Гильбертовом пространстве или в равномерно выпуклом банаховом пространстве. В 1972 г. Гёбель и Кирк [11] ввели класс асимптотически нерасширяемых отображений в себя, и доказали, что если C – непустое замкнутое выпуклое подмножество действительного равномерно выпуклого банахова пространства и T – асимптотически нерасширяемое отображение в себя на C , то T имеет неподвижную точку.

Итеративные методы аппроксимации неподвижных точек нерасширяемых отображений и их обобщения (асимптотически нерасширяемые отображения, и тому подобное) изучались многими авторами (см., например, [12]–[20] и ссылки, приведенные в этих работах).

В 1991 г. Шу [18] модифицировал итерационный процесс Манна для аппроксимации неподвижных точек асимптотически нерасширяемых отображений в себя в Гильбертовом пространстве. Точнее, он доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.1 (см. [18]). Пусть H – гильбертово пространство, и C – непустое замкнутое выпуклое ограниченное подмножество пространства H . Пусть

$T: C \rightarrow C$ – асимптотически нерасширяемое отображение относительно последовательности $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ при всех $n \geq 1$ и такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^2 - 1) < \infty$. Пусть $\{\alpha_n\}$ – последовательность в $[0, 1]$, удовлетворяющая условию $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1$, $n \geq 1$, для некоторых постоянных a, b . Тогда последовательность $\{x_n\}$, которая строится, начиная с некоторого произвольного $x_1 \in C$, как

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T^n x_n, \quad n \geq 1, \quad (1.5)$$

строго сходится к некоторой неподвижной точке отображения T .

С тех пор итерационный процесс Шу широко используется для аппроксимации неподвижных точек асимптотически нерасширяемых отображений в себя в гильбертовом или банаховом пространствах (см. [4], [17], [18], [20], [21]).

В 2000 г. Чидум, Офёду и Зегей [22] ввели понятие асимптотически нерасширяемых отображений, не являющихся отображениями в себя, как обобщение понятия асимптотически нерасширяемых отображений в себя. Асимптотически нерасширяемое отображение, не являющееся отображением в себя, определено следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 (см. [22]). Пусть C – непустое подмножество действительного нормированного линейного пространства X . Пусть $P: X \rightarrow C$ – нерасширяемая ретракция пространства X на C . Отображение $T: C \rightarrow X$, не являющееся отображением в себя, называется *асимптотически нерасширяемым*, если существует последовательность $\{k_n\} \subset [1, \infty)$, $k_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, такая, что

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq k_n \|x - y\| \quad (1.6)$$

для всех $x, y \in C$ и $n \geq 1$. Отображение T называется *равномерно L -липшицевым*, если существует постоянная $L > 0$ такая, что

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq L \|x - y\| \quad (1.7)$$

для всех $x, y \in C$ и $n \geq 1$.

Через $(PT)^0$ обозначим тождественное отображение пространства C на себя. В работе [22] изучалась следующая итерационная последовательность: $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = P((1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(PT)^{n-1}x_n), \quad (1.8)$$

аппроксимирующая неподвижные точки отображения T при выполнении некоторых подходящих условий.

Если T – некоторое отображение в себя, то P становится тождественным отображением и, таким образом, (1.6) и (1.7) сводятся соответственно к (1.1) и (1.2), а (1.8) сводится к (1.5).

В 2006 г. Ванг [23] обобщил итерационный процесс (1.8) следующим образом: $x_1 \in C$,

$$\begin{aligned} y_n &= P((1 - \beta_n)x_n + \beta_n T_2(PT_2)^{n-1}x_n), \\ x_{n+1} &= P((1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T_1(PT_1)^{n-1}y_n), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $T_1, T_2: C \rightarrow X$ – асимптотически нерасширяемые отображения, не являющиеся отображениями в себя, а $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – действительные последовательности в $[0, 1)$.

Он доказал строгую сходимость последовательности $\{x_n\}$, заданной (1.9), к общей неподвижной точке отображений T_1 и T_2 при выполнении некоторых подходящих условий. Заметим, что результаты работы [23] обобщают результаты, полученные в [22].

Обобщенные асимптотически нерасширяемые и обобщенные асимптотически квази-нерасширяемые отображения, не являющиеся отображениями в себя, определяются следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 (см. [24]). Пусть C – непустое подмножество действительного нормированного линейного пространства X . Пусть $P: X \rightarrow C$ – нерасширяемая ретракция пространства X на C . Отображение $T: C \rightarrow X$, не являющееся отображением в себя, называется *обобщенным асимптотически нерасширяемым*, если существуют неотрицательные действительные последовательности $\{k_n\}$ и $\{\delta_n\}$, $k_n > 1$, $k_n \rightarrow 1$ и $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, такие, что

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq k_n\|x - y\| + \delta_n \quad (1.10)$$

для всех $x, y \in C$ и $n \geq 1$. Отображение $T: C \rightarrow X$ называется *обобщенным асимптотически квази-нерасширяемым*, если существуют неотрицательные действительные последовательности $\{k_n\}$ и $\{\delta_n\}$, $k_n > 1$, $k_n \rightarrow 1$ и $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, такие, что

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}p\| \leq k_n\|x - p\| + \delta_n \quad (1.11)$$

для всех $x \in C$, $p \in F(T)$ и $n \geq 1$.

Если T – некоторое отображение в себя, то P становится тождественным отображением, и, таким образом, (1.10) и (1.11) сводятся соответственно к (1.3) и (1.4).

В 2008 г. Денг и Лиу [24] рассмотрели следующую итерационную последовательность, которую можно считать расширением итерационной схемы Ванга [23]: $x_i \in C$ ($i = 0, 1, 2, \dots, q$, $q \in \mathbb{N}$ – фиксированное число),

$$\begin{aligned} y_n &= P(\bar{\alpha}_n x_n + \bar{\beta}_n T_2(PT_2)^{n-1}x_n + \bar{\gamma}_n v_n), & n &= 0, 1, 2, \dots, \\ x_{n+1} &= P(\alpha_n x_n + \beta_n T_1(PT_1)^{n-1}y_{n-q} + \gamma_n u_n), & n &= q, q+1, q+2, \dots, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $T_1, T_2: C \rightarrow X$ – обобщенные асимптотически квази-нерасширяемые отображения, не являющиеся отображениями в себя, $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ – ограниченные последовательности в пространстве C , а $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\bar{\alpha}_n\}$, $\{\bar{\beta}_n\}$ и $\{\bar{\gamma}_n\}$ – действительные последовательности в $[0, 1]$ такие, что $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \bar{\alpha}_n + \bar{\beta}_n + \bar{\gamma}_n = 1$ для всех $n \geq 0$.

Напомним, что два отображения $T_1, T_2: C \rightarrow X$, где C – некоторое подмножество нормированного пространства X , называются *удовлетворяющими условию A'* (см. [26]), если существует неубывающая функция $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(0) = 0$ и $f(r) > 0$ для всех $r \in (0, \infty)$, такая, что либо

$$\|x - T_1x\| \geq f(d(x, F)),$$

либо

$$\|x - T_2x\| \geq f(d(x, F))$$

для всех $x \in C$, где $d(x, F) = \inf\{\|x - q\| : q \in F = F(T_1) \cap F(T_2)\}$.

Заметим, что условие A' сводится к условию (A) (см. [20]) при $T_1 = T_2 = T$. Маити и Гош [27], а также Тан и Ху [20], аппроксимировали неподвижные точки нерасширяемого отображения T с помощью итераций Ишикавы при условии (A) .

Денг и Лиу доказали следующую теорему о строгой сходимости.

ТЕОРЕМА 1.2 (см. [24]). Пусть X – действительное равномерно выпуклое банахово пространство, C – непустое замкнутое выпуклое подмножество пространства X , и $T_1, T_2: C \rightarrow X$ – два равномерно L -липшицевых обобщенных асимптотически квази-нерасширяемых отображения, не являющихся отображениями в себя, с соответствующими неотрицательными действительными последовательностями $\{k_n^{(i)}\}, \{\delta_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$, $i = 1, 2$, такими, что $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(i)} < \infty$. Пусть $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$. Пусть для любого $x_i \in C$, $i = 0, 1, \dots, q$, $q \in \mathbb{N}$ – фиксированное число, $\{x_n\}$ – последовательность, определенная соотношением (1.12) и удовлетворяющая условиям

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1, \quad 0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{\alpha}_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{\alpha}_n < 1,$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_n < \infty$. Если T_1 и T_2 удовлетворяют условию A' относительно последовательности $\{x_n\}$, то $\{x_n\}$ строго сходится к общей неподвижной точке отображений T_1 и T_2 .

Недавно Тхианван [25] определил и построил новую итерационную схему для двух асимптотически нерасширяемых отображений, не являющихся отображениями в себя. Схема имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} y_n &= P((1 - \beta_n)x_n + \beta_n T_2(PT_2)^{n-1}x_n), \\ x_{n+1} &= P((1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T_1(PT_1)^{n-1}x_n), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – соответствующие действительные последовательности в $[0, 1)$. Он изучил схему для двух асимптотически нерасширяемых отображений, не являющихся отображениями в себя, и доказал строгую сходимость последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ к общей неподвижной точке отображений T_1 и T_2 при некоторых подходящих условиях в равномерно выпуклом банаховом пространстве.

Если $T_1 = T_2$ и $\beta_n = 0$ для всех $n \geq 1$, то (1.13) сводится к (1.8).

Недавние работы послужили толчком для рассмотрения и изучения в данной статье новых классов двухступенчатых итерационных схем с погрешностями. Такая схема определяется следующим образом.

Пусть X – нормированное пространство, C – непустое выпуклое подмножество пространства X , $P: X \rightarrow C$ – нерасширяемая ретракция пространства X на C , а $T_1, T_2: C \rightarrow X$ – некоторые заданные отображения. Тогда для любого $x_1 \in C$ будем рассматривать итерационную схему

$$\begin{aligned} y_n &= P((1 - \beta_n - \gamma_n)x_n + \beta_n T_2(PT_2)^{n-1}x_n + \gamma_n v_n), \\ x_{n+1} &= P((1 - \alpha_n - \lambda_n)y_n + \alpha_n T_1(PT_1)^{n-1}x_n + \lambda_n u_n), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ – соответствующие действительные последовательности в $[0, 1)$, а $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ – ограниченные последовательности в C .

Если $\gamma_n = \lambda_n = 0$ для всех $n \geq 1$, то (1.14) сводится к (1.13).

Цель данной работы состоит в построении итерационной схемы для аппроксимации общих неподвижных точек двух обобщенных асимптотически квази-нерасширяемых отображений, не являющихся отображениями в себя, и доказать некоторую теорему строгой сходимости для таких отображений в действительном равномерно выпуклом банаховом пространстве.

Теперь напомним некоторые хорошо известные понятия и результаты.

Пусть X – банахово пространство размерности $\dim X \geq 2$. Модуль пространства X – это функция $\delta_X: (0, 2] \rightarrow [0, 1]$ такая, что

$$\delta_X(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1, \epsilon = \|x - y\| \right\}.$$

Банахово пространство X будет равномерно выпуклым тогда и только тогда, когда $\delta_X(\epsilon) > 0$ для всех $\epsilon \in (0, 2]$.

Подмножество C пространства X называется *ретрактом*, если существует непрерывное отображение $P: X \rightarrow C$ такое, что $Px = x$ для всех $x \in C$. Всякое замкнутое выпуклое подмножество равномерно выпуклого банахова пространства является ретрактом. Отображение $P: X \rightarrow X$ называется *ретракцией*, если $P^2 = P$. Следовательно, если отображение P является ретракцией, то $Pz = z$ для любого $z \in R(P)$, где $R(P)$ – множество значений отображения P .

В дальнейшем для доказательства наших утверждений нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 1.3 (см. [20]). Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{\delta_n\}$ – последовательности неотрицательных действительных чисел, удовлетворяющих неравенству

$$a_{n+1} \leq (1 + \delta_n)a_n + b_n \quad \text{для всех } n \geq 1.$$

Если $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ существует. В частности, если $\{a_n\}$ имеет сходящуюся к нулю подпоследовательность, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ЛЕММА 1.4 (см. [18]). Пусть X – действительное равномерно выпуклое банахово пространство и $0 \leq p \leq t_n \leq q < 1$ для всех положительных целых чисел $n \geq 1$. Предположим, что $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – две последовательности в пространстве X такие, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq r$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq r$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n x_n + (1 - t_n) y_n\| = r$$

для некоторого $r \geq 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

2. Основные результаты. В этом разделе будет доказана строгая сходимость схемы (1.14) к общей неподвижной точке двух равномерно L -липшицевых обобщенных асимптотически квази-нерасширяемых отображений, не являющихся отображениями в себя, при условии A' (см. [26]), которое слабее, чем условие компактности области определения этих отображений. Для доказательства наших основных результатов, нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 2.1. Пусть X – действительное банахово пространство, и C – непустой замкнутый выпуклый нерасширяемый ретракт пространства X относительно нерасширяемой ретракции P . Пусть $T_1, T_2: C \rightarrow X$ – два обобщенных асимптотически квази-нерасширяемых отображения ретракта C такие, что они не

являются отображениями в себя и соответствуют последовательностям $\{k_n^{(i)}\}$, $\{\delta_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$, $i = 1, 2$, таким, что $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(i)} < \infty$ и $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$. Пусть $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ – действительные последовательности в $[0, 1)$ такие, что $\alpha_n + \lambda_n$ и $\beta_n + \gamma_n$ лежат в $[0, 1)$ для всех $n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$, а $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ – ограниченные последовательности в C . Начиная с некоторого произвольного $x_1 \in C$, последовательность $\{x_n\}$ определена по формуле (1.14). Если $q \in F$, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q \in F$. В силу ограниченности последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ можно считать, что

$$M = \max \left\{ \sup_{n \geq 1} \|u_n - q\|, \sup_{n \geq 1} \|v_n - q\| \right\}.$$

Положим $k_n^{(1)} = 1 + r_n^{(1)}$ и $k_n^{(2)} = 1 + r_n^{(2)}$. Так как $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$, $i = 1, 2$, то $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{(1)} < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{(2)} < \infty$. Применяя (1.14), получим

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\| &= \|P((1 - \alpha_n - \lambda_n)y_n + \alpha_n T_1(PT_1)^{n-1}x_n + \lambda_n u_n) - P(q)\| \\ &\leq \|(1 - \alpha_n - \lambda_n)(y_n - q) + \alpha_n(T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q) + \lambda_n(u_n - q)\| \\ &\leq (1 - \alpha_n - \lambda_n)\|y_n - q\| + \alpha_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\| + \lambda_n\|u_n - q\| \\ &\leq (1 - \alpha_n - \lambda_n)\|y_n - q\| + \alpha_n(1 + r_n^{(1)})\|x_n - q\| + \delta_n^{(1)} + \lambda_n M \\ &= (1 - \alpha_n - \lambda_n)\|y_n - q\| + (\alpha_n + \alpha_n r_n^{(1)})\|x_n - q\| + \delta_n^{(1)} + \lambda_n M, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \|y_n - q\| &= \|P((1 - \beta_n - \gamma_n)x_n + \beta_n T_2(PT_2)^{n-1}x_n + \gamma_n v_n) - P(q)\| \\ &\leq \|(1 - \beta_n - \gamma_n)(x_n - q) + \beta_n(T_2(PT_2)^{n-1}x_n - q) + \gamma_n(v_n - q)\| \\ &\leq (1 - \beta_n - \gamma_n)\|x_n - q\| + \beta_n\|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - q\| + \gamma_n\|v_n - q\| \\ &\leq (1 - \beta_n - \gamma_n)\|x_n - q\| + \beta_n(1 + r_n^{(2)})\|x_n - q\| + \delta_n^{(2)} + \gamma_n M \\ &= (1 - \beta_n - \gamma_n)\|x_n - q\| + (\beta_n + \beta_n r_n^{(2)})\|x_n - q\| + \delta_n^{(2)} + \gamma_n M \\ &\leq \|x_n - q\| + r_n^{(2)}\|x_n - q\| + \delta_n^{(2)} + \gamma_n M \\ &= (1 + r_n^{(2)})\|x_n - q\| + \delta_n^{(2)} + \gamma_n M. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получим

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\| &\leq (1 - \alpha_n - \lambda_n)((1 + r_n^{(2)})\|x_n - q\| + \delta_n^{(2)} + \gamma_n M) \\ &\quad + (\alpha_n + \alpha_n r_n^{(1)})\|x_n - q\| + \delta_n^{(1)} + \lambda_n M \\ &= (1 + r_n^{(2)})\|x_n - q\| - \alpha_n(1 + r_n^{(2)})\|x_n - q\| - \lambda_n(1 + r_n^{(2)})\|x_n - q\| \\ &\quad + (1 - \alpha_n - \lambda_n)\delta_n^{(2)} + (1 - \alpha_n - \lambda_n)\gamma_n M + (\alpha_n + \alpha_n r_n^{(1)})\|x_n - q\| \\ &\quad + \delta_n^{(1)} + \lambda_n M \\ &\leq (1 + r_n^{(2)})\|x_n - q\| + r_n^{(1)}\|x_n - q\| + \delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)} + \lambda_n M + \gamma_n M \\ &= (1 + r_n^{(1)} + r_n^{(2)})\|x_n - q\| + \varepsilon_n^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\varepsilon_n^{(1)} = \delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)} + \lambda_n M + \gamma_n M$. Заметим, что здесь $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(1)} < \infty$, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(1)} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(2)} < \infty.$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} (r_n^{(1)} + r_n^{(2)}) < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n^{(1)} < \infty$, то из (2.3) и леммы 1.3 следует, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\|$, что и завершает доказательство.

ЛЕММА 2.2. Пусть X – действительное равномерно выпуклое банахово пространство и C – непустой замкнутый выпуклый нерасширяемый ретракт пространства X относительно нерасширяемой ретракции P . Пусть $T_1, T_2: C \rightarrow X$ – два равномерно L -липшицевых обобщенных асимптотически квази-нерасширяемых отображения ретракта C такие, что они не являются отображениями в себя и соответствуют последовательностям $\{k_n^{(i)}\}, \{\delta_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$, $i = 1, 2$, таким, что $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(i)} < \infty$ и $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – действительные последовательности в $[\epsilon, 1 - \epsilon]$ при некотором $\epsilon \in (0, 1)$ и $\{\gamma_n\}, \{\lambda_n\} \subset [0, 1)$ такие, что $\alpha_n + \lambda_n$ и $\beta_n + \gamma_n$ лежат в $[0, 1)$ при всех $n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$, а $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ – ограниченные последовательности в C . Начиная с некоторого произвольного $x_1 \in C$, последовательность $\{x_n\}$ определена по формуле (1.14). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_1 x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_2 x_n\| = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q \in F$. Положим $k_n^{(1)} = 1 + r_n^{(1)}$ и $k_n^{(2)} = 1 + r_n^{(2)}$. В силу леммы 2.1 существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\|$, откуда следует, что $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены. Таким образом, $\{u_n - y_n\}$ и $\{v_n - x_n\}$ ограничены. Теперь положим

$$C = \max \left\{ \sup_{n \geq 1} \|u_n - y_n\|, \sup_{n \geq 1} \|v_n - x_n\| \right\}.$$

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\| = c$. Из (2.2) следует, что

$$\|y_n - q\| \leq (1 + r_n^{(2)}) \|x_n - q\| + \delta_n^{(2)} + \gamma_n M.$$

Вычисляя верхний предел от обеих сторон этого неравенства, получим

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n - q\| \leq c. \quad (2.4)$$

Заметим, что из неравенства $\|y_n - q + \lambda_n(u_n - y_n)\| \leq \|y_n - q\| + \lambda_n C$ следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n - q + \lambda_n(u_n - y_n)\| \leq c. \quad (2.5)$$

Кроме того,

$$\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q + \lambda_n(u_n - y_n)\| \leq k_n^{(1)} \|x_n - q\| + \delta_n^{(1)} + \lambda_n C,$$

и вычисляя верхний предел от обеих сторон этого неравенства, получим

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q + \lambda_n(u_n - y_n)\| \leq c. \quad (2.6)$$

Из (2.3) получим

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\| &\leq \|(1 - \alpha_n - \lambda_n)(y_n - q) + \alpha_n(T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q) + \lambda_n(u_n - q)\| \\ &\leq (1 + r_n^{(1)} + r_n^{(2)}) \|x_n - q\| + \epsilon_n^{(1)}. \end{aligned}$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} (r_n^{(1)} + r_n^{(2)}) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n^{(1)} < \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - q\| = c$, устремляя $n \rightarrow \infty$ в предыдущем неравенстве, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n - \lambda_n)(y_n - q) + \alpha_n(T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q) + \lambda_n(u_n - q)\| = c. \quad (2.7)$$

Из соотношения

$$\begin{aligned} & \|(1 - \alpha_n)(y_n - q + \lambda_n(u_n - y_n)) + \alpha_n(T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q + \lambda_n(u_n - y_n))\| \\ &= \|(1 - \alpha_n - \lambda_n)(y_n - q) + \alpha_n(T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q) + \lambda_n(u_n - q)\| \end{aligned}$$

и (2.7) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)(y_n - q + \lambda_n(u_n - y_n)) + \alpha_n(T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q + \lambda_n(u_n - y_n))\| = c. \quad (2.8)$$

Применяя (2.5), (2.6), (2.8) и лемму 1.4, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - y_n\| = 0. \quad (2.9)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - q + \gamma_n(v_n - x_n)\| &\leq \|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - q\| + \gamma_n\|v_n - x_n\| \\ &\leq k_n^{(2)}\|x_n - q\| + \delta_n^{(2)} + \gamma_n C, \end{aligned}$$

и, вычисляя верхний предел от обеих сторон этого неравенства, получим

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - q + \gamma_n(v_n - x_n)\| \leq c. \quad (2.10)$$

Применяя (1.14), получим

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - q\| &\leq (1 - \alpha_n - \lambda_n)\|y_n - q\| + \alpha_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\| + \lambda_n\|u_n - q\| \\ &= (1 - \alpha_n - \lambda_n)\|y_n - q\| + \alpha_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - y_n + y_n - q\| \\ &\quad + \lambda_n\|u_n - y_n + y_n - q\| \\ &\leq (1 - \alpha_n - \lambda_n)\|y_n - q\| + \alpha_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - y_n\| \\ &\quad + \alpha_n\|y_n - q\| + \lambda_n\|u_n - y_n\| + \lambda_n\|y_n - q\| \\ &\leq \|y_n - q\| + \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - y_n\| + \lambda_n C. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Вычисляя верхний предел от обеих сторон неравенства (2.11) и применяя (2.9), $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ и равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - q\| = c$, получим

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|y_n - q\| \geq c. \quad (2.12)$$

Из (2.4) и (2.12) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - q\| = c$. Таким образом,

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - q\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \beta_n - \gamma_n)(x_n - q) + \beta_n(T_2(PT_2)^{n-1}x_n - q) + \gamma_n(v_n - q)\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\| = c, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \beta_n - \gamma_n)(x_n - q) + \beta_n(T_2(PT_2)^{n-1}x_n - q) + \gamma_n(v_n - q)\| = c. \quad (2.13)$$

Из

$$\begin{aligned} & \|(1 - \beta_n)(x_n - q + \gamma_n(v_n - x_n)) + \beta_n(T_2(PT_2)^{n-1}x_n - q + \gamma_n(v_n - x_n))\| \\ &= \|(1 - \beta_n - \gamma_n)(x_n - q) + \beta_n(T_2(PT_2)^{n-1}x_n - q) + \gamma_n(v_n - q)\| \end{aligned}$$

и (2.13), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \beta_n)(x_n - q + \gamma_n(v_n - x_n)) + \beta_n(T_2(PT_2)^{n-1}x_n - q + \gamma_n(v_n - x_n))\| = c. \quad (2.14)$$

Заметим, что из неравенства $\|x_n - q + \gamma_n(v_n - x_n)\| \leq \|x_n - q\| + \gamma_n C$ следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q + \gamma_n(v_n - x_n)\| \leq c. \quad (2.15)$$

Применяя (2.10), (2.14), (2.15) и лемму 1.4, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - x_n\| = 0. \quad (2.16)$$

Из $y_n = P((1 - \beta_n - \gamma_n)x_n + \beta_n T_2(PT_2)^{n-1}x_n + \gamma_n v_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$ и (2.16) следует, что

$$\begin{aligned} \|y_n - x_n\| &= \|P((1 - \beta_n - \gamma_n)x_n + \beta_n T_2(PT_2)^{n-1}x_n + \gamma_n v_n) - x_n\| \\ &\leq \|(1 - \beta_n - \gamma_n)(x_n - x_n) + \beta_n(T_2(PT_2)^{n-1}x_n - x_n) + \gamma_n(v_n - x_n)\| \\ &\leq \beta_n \|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - x_n\| + \gamma_n \|v_n - x_n\| \\ &\leq \|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - x_n\| + \gamma_n C \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| &= \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - y_n + y_n - x_n\| \\ &\leq \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - y_n\| + \|y_n - x_n\|. \end{aligned}$$

Таким образом, из (2.9) и (2.17) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| = 0. \quad (2.18)$$

Применяя (1.14), получим

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &\leq (1 - \alpha_n - \lambda_n)\|y_n - x_n\| + \alpha_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \lambda_n\|u_n - x_n\| \\ &\leq \|y_n - x_n\| + \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| + \lambda_n C. \end{aligned}$$

Из (2.17), (2.18) и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \quad (2.19)$$

Так как отображения T_i , $i = 1, 2$, равномерно L -липшицевы с липшицевой постоянной $L = \max_{1 \leq i \leq 2} \{L_i\} > 0$, применяя (2.18) и (2.19), получим

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1}\| \\ &= \|x_{n+1} - x_n + x_n - T_1(PT_1)^{n-1}x_n + T_1(PT_1)^{n-1}x_n - T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1}\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-1}x_n\| + \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + L\|x_{n+1} - x_n\| + \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Кроме того, при $n \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} & \|x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-2}x_{n+1}\| \\ &= \|x_{n+1} - x_n + x_n - T_1(PT_1)^{n-2}x_n + T_1(PT_1)^{n-2}x_n - T_1(PT_1)^{n-2}x_{n+1}\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|T_1(PT_1)^{n-2}x_n - x_n\| + \|T_1(PT_1)^{n-2}x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-2}x_n\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|T_1(PT_1)^{n-2}x_n - x_n\| + L\|x_{n+1} - x_n\|. \end{aligned}$$

Из (2.19) и (2.20) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-2}x_{n+1}\| = 0. \quad (2.21)$$

Таким образом, в силу неравенств (2.20) и (2.21) получим

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - T_1x_{n+1}\| &= \|x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1} + T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1} - T_1x_{n+1}\| \\ &\leq \|x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1}\| + \|T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1} - T_1x_{n+1}\| \\ &\leq \|x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1}\| + L\|(PT_1)^{n-1}x_{n+1} - x_{n+1}\| \\ &= \|x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1}\| + L\|(PT_1)(PT_1)^{n-2}x_{n+1} - P(x_{n+1})\| \\ &\leq \|x_{n+1} - T_1(PT_1)^{n-1}x_{n+1}\| \\ &\quad + L\|T_1(PT_1)^{n-2}x_{n+1} - x_{n+1}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_1x_n\| = 0$. Аналогично можно показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_2x_n\| = 0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть X – действительное равномерно выпуклое банахово пространство и C – непустой замкнутый выпуклый нерасширяемый ретракт пространства X относительно нерасширяемой ретракции P . Пусть $T_1, T_2: C \rightarrow X$ – два равномерно L -липшицевых обобщенных асимптотически квази-нерасширяемых отображения ретракта C такие, что они не являются отображениями в себя, удовлетворяют условию A' и соответствуют последовательностям $\{k_n^{(i)}\}$ и $\{\delta_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$, $i = 1, 2$, таким, что $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(i)} < \infty$ и $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – действительные последовательности в $[\epsilon, 1 - \epsilon]$ при некотором $\epsilon \in (0, 1)$ и $\{\gamma_n\}, \{\lambda_n\} \subset [0, 1)$ такие, что $\alpha_n + \lambda_n$ и $\beta_n + \gamma_n$ лежат в $[0, 1)$ для всех $n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$, а $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ – ограниченные последовательности в C . Тогда последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, определяемые итерационной схемой (1.14), строго сходятся к общей неподвижной точке отображений T_1 и T_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2.2 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_1x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_2x_n\| = 0.$$

Из условия A' следует, что либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_1x_n\| = 0,$$

либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_2x_n\| = 0.$$

В обоих случаях $\lim_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F)) = 0$. Так как $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – неубывающая функция такая, что $f(0) = 0$ и $f(r) > 0$ для всех $r \in (0, \infty)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$, т.е.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{y^* \in F} \|x_n - y^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0,$$

откуда следует, что

$$\inf_{y^* \in F} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y^*\| = 0.$$

Итак, для любого заданного $\varepsilon > 0$ существуют $p \in F$ и $N > 0$ такие, что $\|x_n - p\| < \varepsilon/2$ для всех $n \geq N$. Следовательно,

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \|x_{n+m} - p\| + \|x_n - p\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $n \geq N$ и $m \geq 1$. Таким образом, $\{x_n\}$ является последовательностью Коши и сходится, поскольку X – полное пространство. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u$. Теперь из $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ следует, что $d(u, F) = 0$. Множество F замкнуто; следовательно, $u \in F$. В силу (2.17) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = 0,$$

откуда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - u\| = 0$. Доказательство теоремы завершено.

Следующий результат является следствием теоремы 2.3.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть X – действительное равномерно выпуклое банахово пространство и C – непустой замкнутый выпуклый нерасширяемый ретракт пространства X относительно нерасширяемой ретракции P . Пусть $T_1, T_2: C \rightarrow X$ – два асимптотически нерасширяемых отображения ретракта C такие, что они не являются отображениями в себя, удовлетворяют условию A' и соответствуют последовательностям $\{k_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$, $i = 1, 2$, таким, что $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ и $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – действительные последовательности в $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ для некоторого $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\{\gamma_n\}, \{\lambda_n\} \subset [0, 1)$ такие, что $\alpha_n + \lambda_n$ и $\beta_n + \gamma_n$ лежат в $[0, 1)$ для всех $n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$, а $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ – ограниченные последовательности в C . Тогда последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, определяемые итерационной схемой (1.14), строго сходятся к общей неподвижной точке отображений T_1 и T_2 .

При $\gamma_n = \lambda_n = 0$ итерационная схема (1.14) сводится к схеме (1.13) для равномерно L -липшицевых обобщенных асимптотически квази-нерасширяемых отображений, не являющихся отображениями в себя, и следующее утверждение вытекает из теоремы 2.3.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть X – действительное равномерно выпуклое банахово пространство и C – непустой замкнутый выпуклый нерасширяемый ретракт пространства X относительно нерасширяемой ретракции P . Пусть $T_1, T_2: C \rightarrow X$ – два равномерно L -липшицевых обобщенных асимптотически квази-нерасширяемых отображения ретракта C такие, что они не являются отображениями в себя, удовлетворяют условию A' и соответствуют последовательностям $\{k_n^{(i)}\}, \{\delta_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$, $i = 1, 2$, таким, что $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(i)} < \infty$ и $F =$

$F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – действительные последовательности в $[\epsilon, 1 - \epsilon]$ для некоторого $\epsilon \in (0, 1)$. Тогда последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, определяемые итерационной схемой (1.13), строго сходятся к общей неподвижной точке отображений T_1 и T_2 .

Следующее утверждение является следствием теоремы 2.5.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть X – действительное равномерно выпуклое банахово пространство и C – непустой замкнутый выпуклый нерасширяемый ретракт пространства X относительно нерасширяемой ретракции P . Пусть $T_1, T_2: C \rightarrow X$ – два асимптотически нерасширяемых отображения ретракта C такие, что они не являются отображениями в себя, удовлетворяют условию A' и соответствуют последовательностям $\{k_n^{(i)}\} \subset [1, \infty)$, $i = 1, 2$, таким, что $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^{(i)} - 1) < \infty$ и $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – действительные последовательности в $[\epsilon, 1 - \epsilon]$ для некоторого $\epsilon \in (0, 1)$. Тогда последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, определяемые итерационной схемой (1.13), строго сходятся к общей неподвижной точке отображений T_1 и T_2 .

Автор благодарен анонимным рецензентам за полезные замечания, которые позволили значительно улучшить данную работу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Shahzad, H. Zegeye, “Strong convergence of an implicit iteration process for a finite family of generalized asymptotically quasi-nonexpansive maps”, *Appl. Math. Comput.*, **189**:2 (2007), 1058–1065.
- [2] S. Ishikawa, “Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **59**:1 (1976), 65–71.
- [3] S. H. Khan, H. Fukhar-ud-din, “Weak and strong convergence of a scheme with errors for two nonexpansive mappings”, *Nonlinear Anal.*, **61**:8 (2005), 1295–1301.
- [4] M. O. Osilike, S. C. Aniagbosor, “Weak and strong convergence theorems for fixed points of asymptotically nonexpansive mappings”, *Math. Comput. Modelling*, **32**:10 (2000), 1181–1191.
- [5] J. Schu, “Iterative construction of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings”, *J. Math. Anal. Appl.*, **158**:2 (1991), 407–413.
- [6] J. S. Jung, S. S. Kim, “Strong convergence theorems for nonexpansive nonself-mappings in Banach spaces”, *Nonlinear Anal.*, **33**:3 (1998), 321–329.
- [7] S. Matsushita, D. Kuroiwa, “Strong convergence of averaging iterations of nonexpansive nonself-mappings”, *J. Math. Anal. Appl.*, **294**:1 (2004), 206–214.
- [8] N. Shahzad, “Approximating fixed points of non-self nonexpansive mappings in Banach spaces”, *Nonlinear Anal.*, **61**:6 (2005), 1031–1039.
- [9] W. Takahashi, G.-E. Kim, “Strong convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonself-mappings in Banach spaces”, *Nonlinear Anal.*, **32**:3 (1998), 447–454.
- [10] H.-K. Xu, X.-M. Yin, “Strong convergence theorems for nonexpansive nonself-mappings”, *Nonlinear Anal.*, **24**:2 (1995), 223–228.
- [11] K. Goebel, W. A. Kirk, “A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **35** (1972), 171–174.
- [12] C. E. Chidume, “Iterative algorithms for nonexpansive mappings and some of their generalizations”, *Nonlinear Analysis and Applications*, v.1, To V. Lakshmikantham on his 80th birthday, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003, 383–429.
- [13] C. E. Chidume, B. Ali, “Convergence theorems for finite families of asymptotically quasi-nonexpansive mappings”, *J. Inequal. Appl.*, **2007** (2007), Article ID 68616.

- [14] Y. J. Cho, H. Zhou, G. Guo, “Weak and strong convergence theorems for three-step iterations with errors for asymptotically nonexpansive mappings”, *Comput. Math. Appl.*, **47**:4-5 (2004), 707–717.
- [15] X. Qin, Y. Su, M. Shang, “Strong convergence for three classes of uniformly equi-continuous and asymptotically quasi-nonexpansive mappings”, *J. Korean Math. Soc.*, **45**:1 (2008), 29–40.
- [16] J. Quan, S.-S. Chang, X. J. Long, “Approximation common fixed point of asymptotically quasi-nonexpansive-type mappings by the finite steps iterative sequences”, *Fixed Point Theory Appl.*, **2006** (2006), Article ID 70830.
- [17] B. E. Rhoades, “Fixed point iterations for certain nonlinear mappings”, *J. Math. Anal. Appl.*, **183**:1 (1994), 118–120.
- [18] J. Schu, “Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **43**:1 (1991), 153–159.
- [19] N. Shahzad, A. Udomene, “Approximating common fixed points of two asymptotically quasi-nonexpansive mappings in Banach spaces”, *Fixed Point Theory Appl.*, **2006** (2006), Article ID 18909.
- [20] K.-K. Tan, H. K. Xu, “Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process”, *J. Math. Anal. Appl.*, **178**:2 (1993), 301–308.
- [21] S. Reich, “Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, **67**:2 (1979), 274–276.
- [22] C. E. Chidume, E. U. Ofoedu, H. Zegeye, “Strong and weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings”, *J. Math. Anal. Appl.*, **280**:2 (2003), 364–374.
- [23] L. Wang, “Strong and weak convergence theorems for common fixed point of nonself asymptotically nonexpansive mappings”, *J. Math. Anal. Appl.*, **323**:1 (2006), 550–557.
- [24] L. Deng, Q. Liu, “Iterative scheme for nonself generalized asymptotically quasi-nonexpansive mappings”, *Appl. Math. Comput.*, **205**:1 (2008), 317–324.
- [25] S. Thianwan, “New iterations for approximation of common fixed points of two asymptotically nonexpansive nonself-mappings”, *Lobachevskii J. Math.*, **30**:1 (2009), 89–95.
- [26] H. Fukhar-ud-din, S. H. Khan, “Convergence of iterates with errors of asymptotically quasi-nonexpansive mappings and applications”, *J. Math. Anal. Appl.*, **328**:2 (2007), 821–829.
- [27] M. Maiti, M. K. Ghosh, “Approximating fixed points by Ishikawa iterates”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **40**:1 (1989), 113–117.

С. Тхианван

Naresuan University, Тайланд

E-mail: sornsakt@nu.ac.th

Поступило

02.09.2009