Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Вьлов, Экстендеры и κ -метризуемые компакты,
Матем. заметки, 2011, том 89, выпуск 3, 331–341

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9052>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:23:23

Экстендеры и $\mathcal{K}$ -метризуемые компакты

В. Вьлов

Получена характеристика $\mathcal{K}$ -метризуемых компактов в терминах расширений функций и полунепрерывных сверху компактно-значных ретракций в суперрасширениях.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. В этой работе мы предполагаем, что все топологические пространства компактны и хаусдорфовы и все однозначные отображения непрерывны.

Наш основной результат состоит в характеристике $\mathcal{K}$ -метризуемых компактов (см. теорему 1.1 ниже), подобной изначальному определению пространств Дугунжи, данному Пелчинским [1] (напомним, что класс $\mathcal{K}$ -метризуемых пространств был введен Щепиным [2] и этот класс содержит пространства Дугунжи). Идея такой характеристики вызвана результатом Шапиро [3; теорема 3], состоящем в том, что компакт X является $\mathcal{K}$ -метризуемым тогда и только тогда, когда для любого вложения X в компакт Y существует *монотонный экстендер* $u: C_+(X) \rightarrow C_+(Y)$, т.е. $u(f)|_X = f$ для любого $f \in C_+(X)$ и $f \leq g$ влечет $u(f) \leq u(g)$. Здесь через $C(X)$ и $C_+(X)$ мы обозначаем соответственно все непрерывные и непрерывные неотрицательные функции на X . Следуя [3], скажем, что отображение $u: C(X) \rightarrow C(Y)$ является: (i) *монотонным*; (ii) *однородным*; (iii) *слабо аддитивным*, если для любых $f, g \in C(X)$ и любого действительного числа k имеем

(i) $u(f) \leq u(g)$ при условии, что $f \leq g$;

(ii) $u(k \cdot f) = k \cdot u(f)$;

(iii) $u(f + k) = u(f) + k$.

Из свойств (i), (ii) и (iii) следует, что для любого $f \in C(X)$ и $g \in C_+(X)$ выполнено следующее: $u(1) = 1$, $u(0) = 0$ и $u(g) \geq 0$ для любого $g \in C_+(X)$.

Мы будем говорить, что отображение $\varphi: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ монотонное, однородное или слабо аддитивное, если φ удовлетворяет вышеуказанным условиям (i), (ii) и (iii), соответственно, в формулировке которых $C(Y)$ следует заменить на $\mathbb{R}$. Мы вводим в рассмотрение и исследуем ковариантный функтор S , где $S(X)$ – пространство всех монотонных, однородных и слабо аддитивных отображений $\varphi: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ с топологией поточечной сходимости. Легко видеть, что отображение $x \rightarrow \delta_x$, $x \in X$, где каждое δ_x определяется соотношением $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in C(X)$, есть вложение X в $S(X)$. Получается, что $\mathcal{K}$ -метризуемые компакты – это в точности S -инъективные

Работа выполнена при частичной поддержке NSERC (грант 261914-08.2010).

компакты в смысле Щепина [4]. Функтор S , будучи подфунктором функтора O , введенного Радулом [5], имеет замечательные свойства. Например, S открыт и слабо нормален (см. п. 2).

Сформулируем характеризацию κ -метризуемых компактов, о которой мы говорили выше.

ТЕОРЕМА 1.1. *Для компактного пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (i) X является κ -метризуемым;
- (ii) для любого вложения X в компакт Y существует монотонный, однородный и слабо аддитивный экстендер $u: C(X) \rightarrow C(Y)$;
- (iii) для любого вложения X в компакт Y существует непрерывное отображение $r: Y \rightarrow S(X)$ такое, что $r(x) = \delta_x$ для всех $x \in X$.
- (iv) для любого вложения X в компакт Y существует полунепрерывное сверху компактнозначное отображение $r: Y \rightarrow \lambda X$ такое, что $r(x) = \eta_x$ для всех $x \in X$.

Теорема 1.1 остается справедливой в случае, если вместо S подставить функтор O , см. теорему 4.2.

Напомним, что суперкомпактные пространства и суперрасширения были введены де Гроотом [6]. Пространство называется *суперкомпактным*, если в нем существует бинарная предбаза для его замкнутых подмножеств. Здесь набор $\mathcal{S}$ замкнутых подмножеств X называется *бинарным*, если любое сцепленное подсемейство $\mathcal{S}$ имеет непустое пересечение (мы говорим, что система подмножеств множества является X *сцепленной*, если любые два элемента этой подсистемы пересекаются). Нам будут особенно интересны суперкомпактные пространства с бинарной *нормальной* предбазой. Предбаза $\mathcal{S}$ называется *нормальной*, если для любых $S_0, S_1 \in \mathcal{S}$ таких, что $S_0 \cap S_1 = \emptyset$, существуют $T_0, T_1 \in \mathcal{S}$ такие, что $S_0 \cap T_1 = \emptyset = T_0 \cap S_1$ и $T_0 \cup T_1 = X$. Пространство X , имеющее бинарную нормальную предбазу $\mathcal{S}$, называется *нормально суперкомпактным* [7] и обозначается $(X, \mathcal{S})$.

Суперрасширение λX множества X состоит из всех максимальных сцепленных систем закрытых множеств в X . Семейство

$$U^+ = \{\eta \in \lambda X : F \subset U \text{ для некоторого } F \in \eta\},$$

$U \subset X$ открыто, является предбазой топологии λX . Хорошо известно, что λX нормально суперкомпактно. Пусть η_x , $x \in X$, – максимальная сцепленная система всех закрытых множеств в X , содержащих x . Отображение $x \rightarrow \eta_x$ является вложением X в λX . Книга ван Милла [7] содержит больше информации о нормально суперкомпактном пространстве и суперрасширениях, см. также книгу Федорчука и Филиппова [8].

Настоящая статья организована следующим образом. Пункт 2 посвящен функтору S . В п. 3 мы исследуем связь между κ -метризуемыми компактами и пространствами с бинарной предбазой замкнутых подмножеств. В качестве следствий мы получаем результаты Иванова из [9] и [10], касающиеся суперрасширений κ -метризуемых компактов, а также результаты Моисеева [11] о замкнутых гиперпространствах включений. Доказательство теоремы 1.1 проводится в последнем пункте 4.

2. Монотонные однородные слабо аддитивные функционалы. Пространство $S(X)$ есть подмножество пространства произведений $\mathbb{R}^{C(X)}$: каждому элементу $\varphi \in S(X)$ можно поставить в соответствие $(\varphi(f))_{f \in C(X)} \in \mathbb{R}^{C(X)}$. Заметим также, что в силу [5; лемма 1] любой монотонный слабо аддитивный функционал является нерастягивающим. Таким образом, все $\mu \in S(X)$ являются непрерывными отображениями на $C(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть X – компактное пространство. Тогда $S(X)$ – компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{C(X)}$, содержащее пространство $P(X)$ всех регулярных вероятностных мер на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стандартным образом можно показать, что $S(X)$ – выпуклое компактное подмножество $\mathbb{R}^{C(X)}$. Поскольку $P(X)$ – это пространство всех монотонных линейных отображений $\mu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $\mu(1) = 1$, снабженное топологией поточечной сходимости, $P(X)$ является подпространством в $S(X)$.

Очевидно, для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ между компактными пространствами формула $(S(f)(\mu))(h) = \mu(h \circ f)$, где $\mu \in S(X)$ и $h \in C(Y)$, задает отображение $S(f): S(X) \rightarrow S(Y)$. Более того, $S(g \circ f) = S(g) \circ S(f)$. Таким образом, S есть ковариантный функтор в категории COMP компактных пространств и (непрерывных) отображений.

Скажем, что ковариантный функтор F в категории COMP *слабо нормален*, если он удовлетворяет следующим условиям:

- (a) F сохраняет инъективные отображения (F мономорфный);
- (b) F сохраняет сюръективные отображения (F эпиморфный);
- (c) F сохраняет пересечения $(F(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} F(X_\alpha))$ для любого семейства замкнутых подмножеств X_α данного компакта X ;
- (d) F непрерывен (F сохраняет пределы обратных спектров);
- (e) F сохраняет вес бесконечных компактов;
- (f) F сохраняет точки и пустое множество.

Приведенные выше свойства рассматривались Щепиным [4], который ввел важное понятие *нормального функтора* как слабо нормального функтора, сохраняющего прообразы множеств. Мы уже упоминали, что функтор S является подфунктором функтора O сохраняющих порядок функционалов, введенного Радулом [5]. Поскольку O слабо нормален [5], мы заключаем, что S инъективен, сохраняет вес, точки и пустое множество.

ТЕОРЕМА 2.2. Функтор S является слабо нормальным, но не нормальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы следуем соответствующему доказательству [5] для функтора O . Сначала покажем, что S сюръективен. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – сюръективное отображение между компактами и $\nu \in S(Y)$. Обозначим через A подпространство в $C(X)$, состоящее из всех функций $h \circ f$, $h \in C(Y)$. A обладает следующими свойствами: $0_X \in A$ и A содержит $\varphi + k$ и $k\varphi$ для любой константы $k \in \mathbb{R}$, если $\varphi \in A$ (такое A называется *слабо аддитивным однородным подпространством* в $C(X)$). Определим монотонный слабо аддитивный однородный функционал $\mu': A \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $\mu'(f \circ h) = \nu(h)$. Если μ' может быть продолжен до функционала $\mu \in S(X)$, то $S(f)(\mu) = \nu$. Таким образом, следующее утверждение завершает доказательство того, что S эпиморфен.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\mu': A \rightarrow \mathbb{R}$ – монотонный, слабо аддитивный однородный функционал. Тогда μ' может быть продолжен до монотонного слабо аддитивного однородного функционала $\mu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$.

Следуя доказательству [5; лемма 2], мы рассматриваем пары (B, μ_B) , где $B \supset A$ и μ_B являются соответственно слабо аддитивным однородным подпространством в $C(X)$ и монотонным слабо аддитивным однородным функционалом на B . Мы вводим частичный порядок на этих парах следующим образом: $(B, \mu_B) \leq (C, \mu_C)$ тогда и только тогда, когда $B \subset C$ и μ_C является продолжением μ_B . Тогда в силу леммы Цорна существует максимальная пара (B_0, μ_0) . Если $B_0 \neq C(X)$, зафиксируем произвольный $\varphi_0 \in C(X) \setminus B_0$ и обозначим через B_0^+ (соответственно B_0^-) множество всех $\varphi \in B_0$ таких, что $\varphi \geq \varphi_0$ (соответственно $\varphi \leq \varphi_0$). Поскольку μ_0 монотонный, существует $p \in \mathbb{R}$ такое, что $\mu_0(B_0^-) \leq p \leq \mu_0(B_0^+)$. Тогда B_0 дизъюнктно с множеством $\{k\varphi + c : k, c \in \mathbb{R}\}$, и $D = B_0 \cup \{k\varphi + c : k, c \in \mathbb{R}\}$ является слабо аддитивным однородным подпространством в $C(X)$. Определим функционал $\mu: D \rightarrow \mathbb{R}$ соотношениями $\mu|_{B_0} = \mu_0$ и $\mu(k\varphi + c) = kp + c$ для любых констант k, c . Легко видеть, что μ – монотонный слабо аддитивный однородный функционал на D , являющийся продолжением μ_0 . Это противоречит максимальной пара (B_0, μ_0) . Следовательно, $B_0 = C(X)$.

Таким образом, S эпиморфен. Из этого факта и непрерывности функтора O (см. [5]) мы получаем, что S также непрерывен. Из рассуждений в доказательстве [5; лемма 5 и предложение 5] следует, что S сохраняет пересечения. Значит, S слабо нормален. Пример из [5], показывающий, что O не сохраняет прообразы, показывает также (без каких-либо модификаций), что S не сохраняет пересечения.

Поскольку S мономорфен, для любого $\mu \in S(X)$ множество

$$\text{supp}(\mu) = \bigcap \{H \subset X : H \text{ – замкнутое множество и } \mu \in S(H)\}$$

корректно определено и называется носителем μ . Поскольку S непрерывный и эпиморфный, следующее утверждение вытекает из [4; предложение 3.5].

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Множество $S_\omega(X) = \{\mu \in S(X) : \text{supp}(\mu) \text{ конечен}\}$ плотно в $S(X)$ для любого компакта X .

ТЕОРЕМА 2.4. Сюръективное отображение $f: X \rightarrow Y$ открыто тогда и только тогда, когда отображение $S(f): S(X) \rightarrow S(Y)$ открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Скажем, что подмножество $A \subset S(X)$ является S -выпуклым, если A содержит все $\mu \in S(X)$, обладающие свойством $\inf A \leq \mu \leq \sup A$. Здесь функционал $\inf A: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ определяется соотношением $(\inf A)(h) = \inf \{\nu(h) : \nu \in S(X)\}$, и аналогично определяется $\sup A$. Заметим, что $\inf A$ и $\sup A$ монотонны и слабо аддитивны, но не однородны. Следовательно, они не являются элементами $S(X)$.

Теперь, используя понятие S -непрерывности, можно доказать эту теорему, следуя рассуждениям из доказательства [12; теорема 1].

Поскольку $\mathcal{K}$ -метризуемые компакты – это в точности те компакты, которые могут быть представлены как предел обратного сигма-спектра с открытыми проекциями в спектре [4], мы получаем такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Компакт X является κ -метризуемым тогда и только тогда, когда $S(X)$ κ -метризуем.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Для каждого компактного пространства X существует вложение $i: \lambda X \rightarrow S(X)$ такое, что $i(\eta_x) = \delta_x$, $x \in X$. Более того, $i(\lambda X) \neq S(X)$ при условии, что X несвязное.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя доказательству [3; теорема 3], можно показать, что для любого $\eta \in \lambda X$ и $f \in C(X)$ выполнено

$$\max_{F \in \eta} \min_{x \in F} f(x) = \min_{F \in \eta} \max_{x \in F} f(x) \quad (1)$$

и равенство $\varphi_\eta(f) = \max_{F \in \eta} \min_{x \in F} f(x)$ задает монотонное однородное слабо аддитивное отображение $\varphi_\eta: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$. Значит, $\varphi_\eta \in S(X)$ для любого $\eta \in \lambda X$. Более того, $\varphi_{\eta_x}(f) = \max_{F: x \in F} \min_{y \in F} f(y) = f(x)$ для любого $x \in X$. Следовательно, мы получаем отображение $i: \lambda X \rightarrow S(X)$, $i(\eta) = \varphi_\eta$, обладающее свойством $i(\eta_x) = \delta_x$, $x \in X$. Для доказательства первой части утверждения нам необходимо показать, что i является инъективным и непрерывным.

Пусть $\eta \in \lambda X$ и W – окрестность φ_η в $S(X)$. Мы можем предположить, что W состоит из всех $\varphi \in S(X)$ таких, что $|\varphi_\eta(f_i) - \varphi(f_i)| < \epsilon_i$ для некоторых функций $f_i \in C(X)$ и $\epsilon_i > 0$, $i = 1, \dots, k$. Пусть

$$U_i = \{x \in X : f_i(x) > \varphi_\eta(f_i) - \epsilon_i\}, \quad V_i = \{x \in X : f_i(x) < \varphi_\eta(f_i) + \epsilon_i\}.$$

В силу (1) для любого $i \leq k$ существуют $F_i, H_i \in \eta$ такие, что $F_i \subset U_i$ и $H_i \subset V_i$. Тогда $G = \bigcap_{i=1}^k (U_i^+ \cap V_i^+)$ есть окрестность η в λX , и $i(\xi) \in W$ для всех $\xi \in G$. Таким образом, i непрерывно.

Пусть $\eta \neq \xi$ – два элемента из λX . Тогда существует $F_0 \in \eta$ и $H_0 \in \xi$ такие, что $F_0 \cap H_0 = \emptyset$. Пусть $f \in C_+(X)$ – функция такая, что $f \leq 1$, $f(F_0) = 1$ и $f(H_0) = 0$. Следовательно, $\varphi_\eta(f) = \max_{F \in \eta} \min_{x \in F} f(x) = 1$ и $\varphi_\xi(f) = \min_{H \in \xi} \max_{x \in H} f(x) = 0$. Отсюда получаем, что i инъективно.

Вторая часть доказываемого утверждения получается непосредственно, поскольку $S(X)$ всегда связное (как выпуклое множество в $\mathbb{R}^{C(X)}$), в то время как λX несвязно, если несвязно X .

3. κ -метризуемые компакты и суперрасширения. Напомним, что компакт X является открыто порожденным [4], если X есть предельное пространство обратного сигма-спектра с открытыми проекциями. Щепин [2] доказал, что любой κ -метризуемый компакт является открыто порожденным. С другой стороны, любой открыто порожденный компакт κ -метризуем (см. [4]), что вытекает из результата Иванова [9], состоящего в том, что λX является пространством Дугунджи, если X открыто порожденный. Мы воспользуемся теоремой Иванова для доказательства теоремы 1.1 в следующем пункте. По этой причине мы решили в этом пункте привести независимое доказательство более общего утверждения, см. предложение 3.2. Частью этого доказательства является лемма 3.1 ниже. Напомним, что лемма 3.1 была получена Широковым [13], но его доказательство основано на вышеупомянутом результате Иванова. Наше доказательство леммы 3.1 основано на результатах Щепина [14] об обратных спектрах с открытыми проекциями.

Скажем, что подмножество X множества Y является *регулярно вложенным* в Y , если существует отображение e из топологии X в топологию Y такое, что $e(\emptyset) = \emptyset$, $e(U) \cap X = U$, и $e(U) \cap e(V) = \emptyset$, если $U \cap V = \emptyset$.

ЛЕММА 3.1. *Пусть X – открыто порожденный компакт. Тогда любое вложение X в пространство Y регулярно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что существует регулярное вложение X в тихоновский куб $\mathbb{I}^A$ для некоторого A . Это выполнено, если X метризуем, см. [15; § 21, XI, теорема 2]. Предположим, что это утверждение выполнено для любого открыто порожденного компакта веса $< \tau$, и пусть X – открыто порожденный компакт веса τ . Тогда X является предельным пространством вполне упорядоченной обратной системы $S = \{X_\alpha, p_\alpha^\beta, \beta < \alpha < \omega(\tau)\}$ такой, что все проекции $p_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ суть открытые сюръекции и все X_α суть открыто порожденные компакты веса $< \tau$, см. [4]. Здесь $\omega(\tau)$ – мощность τ . Согласно нашему предположению для любого $\alpha < \omega(\tau)$ существует регулярное вложение X_α в куб $\mathbb{I}^{A(\alpha)}$. В силу [14] X имеет базу $\mathcal{B}$, состоящую из открытых множеств $U \subset X$ конечного ранга $d(U)$. Здесь

$$d(U) = \{\alpha : p_{\alpha+1}(U) \neq (p_\alpha^{\alpha+1})^{-1}(p_\alpha(U))\}.$$

Для произвольного $U \in \mathcal{B}$ положим $\Gamma(U) = \{\alpha_0, \alpha, \alpha + 1 : \alpha \in d(U)\}$, где $\alpha_0 \in A$ фиксировано. Очевидно, X есть подмножество $\prod\{X_\alpha : \alpha < \omega(\tau)\}$. Для любого $U \in \mathcal{B}$ рассмотрим открытое множество $\gamma_1(U) \subset \prod\{X_\alpha : \alpha < \omega(\tau)\}$, определяемое соотношением

$$\gamma_1(U) = \prod\{p_\alpha(U) : \alpha \in \Gamma(U)\} \times \prod\{X_\alpha : \alpha \notin \Gamma(U)\}.$$

Далее, положим

$$\gamma(W) = \bigcup\{\gamma_1(U) : U \in \mathcal{B} \text{ и } \overline{U} \subset W\}, \quad W \in \mathcal{T}_X.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Выполнены следующие условия:*

- (i) $\gamma(W_1) \cap \gamma(W_2) = \emptyset$ как только W_1 и W_2 суть дизъюнктные открытые множества в X ;
- (ii) $\gamma(W) \cap X = W$, $W \in \mathcal{T}_X$.

Предположим, что $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Чтобы доказать условие (i), достаточно показать, что $\gamma_1(U_1) \cap \gamma_1(U_2) = \emptyset$ для любой пары $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ такой, что $\overline{U_i} \subset W_i$, $i = 1, 2$. Действительно, зафиксируем такую пару и положим $\beta = \max\{\Gamma(U_1) \cap \Gamma(U_2)\}$. Тогда β есть либо α_0 , либо $\max\{d(U_1) \cap d(U_2)\} + 1$. В обоих случаях $d(U_1) \cap d(U_2) \cap [\beta, \omega(\tau)) = \emptyset$. В соответствии с [14; п. 5, лемма 3] $p_\beta(U_1) \cap p_\beta(U_2) = \emptyset$. Поскольку $\beta \in \Gamma(U_1) \cap \Gamma(U_2)$, $\gamma_1(U_1) \cap \gamma_1(U_2) = \emptyset$.

Очевидно, $W \subset \gamma(W) \cap X$ для всех $W \in \mathcal{T}_X$. Таким образом, условие (ii) будет доказано, как только мы покажем, что $\gamma(W) \cap X \subset W$. Зафиксируем $x \in \gamma(W) \cap X$, и пусть $U \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in \gamma_1(U)$ и $\overline{U} \subset W$. Определим $\beta(U) = \max d(U) + 1$. Тогда $p_\alpha(x) \in p_\alpha(U)$ для всех $\alpha \leq \beta(U)$. Поскольку $\alpha \notin d(U)$ для всех $\alpha \geq \beta(U)$, имеем $(p_\beta^\alpha)^{-1}(p_\beta(U)(x)) \subset p_\alpha(U)$ для $\alpha > \beta(U)$. Следовательно, $p_\alpha(x) \in p_\alpha(U)$ для всех α . Из последнего соотношения вытекает $x \in \overline{U}$; следовательно, $x \in W$. Утверждение доказано.

Мы хотим показать, что множество $\prod\{X_\alpha : \alpha < \omega(\tau)\}$ регулярно вложено в $\prod\{\mathbb{I}^{A(\alpha)} : \alpha < \omega(\tau)\}$. Поскольку каждое X_α регулярно вложено в $\mathbb{I}^{A(\alpha)}$, существует регулярный оператор $e_\alpha : \mathcal{T}_{X_\alpha} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{I}^{A(\alpha)}}$. Пусть $\mathcal{B}_1$ – база для $\prod\{X_\alpha : \alpha < \omega(\tau)\}$, состоящая из множеств вида $V = \prod\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda(V)\} \times \prod\{X_\alpha : \alpha \notin \Lambda(V)\}$, где $\Lambda(V)$ – конечное множество. Каждому $V \in \mathcal{B}_1$ поставим в соответствие открытое множество $\theta_1(V) \subset \prod\{\mathbb{I}^{A(\alpha)} : \alpha < \omega(\tau)\}$,

$$\theta_1(V) = \prod\{e_\alpha(U_\alpha) : \alpha \in \Lambda(V)\} \times \prod\{\mathbb{I}^{A(\alpha)} : \alpha \notin \Lambda(V)\}.$$

Далее, определим регулярный оператор θ между топологиями $\prod\{X_\alpha : \alpha < \omega(\tau)\}$ и $\prod\{\mathbb{I}^{A(\alpha)} : \alpha < \omega(\tau)\}$ соотношением

$$\theta(G) = \bigcup\{\theta_1(V) : V \in \mathcal{B}_1 \text{ и } V \subset G\}.$$

Поскольку в силу утверждения 2 X регулярно вложен в $\prod\{X_\alpha : \alpha < \omega(\tau)\}$ и γ – соответствующий регулярный оператор, равенство $e_1(W) = \theta(\gamma(W))$, $W \in \mathcal{T}_X$, задает регулярный оператор из топологии X в топологию $\prod\{\mathbb{I}^{A(\alpha)} : \alpha < \omega(\tau)\}$. Таким образом, X регулярно вложен в $\mathbb{I}^A$, где $A = \bigcup\{A(\alpha) : \alpha < \omega(\tau)\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть X – открыто порожденное компактное пространство с бинарной предбазой $\mathcal{S}$ для замкнутых подмножеств. Тогда X является пространством Дугунджи. Кроме того, если при этом X связно и $\mathcal{S}$ нормально, то X является абсолютным ретрактом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – открыто порожденный компакт с бинарной предбазой $\mathcal{S}$ для замкнутых подмножеств и X вложен в $\mathbb{I}^\tau$ для некоторого τ . По лемме 3.1 X регулярно вложен в $\mathbb{I}^\tau$; следовательно, существует регулярный оператор $e : \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{I}^\tau}$. Определим отображение $r : \mathbb{I}^\tau \rightarrow X$ (значения которого суть множества) соотношением

$$r(y) = \begin{cases} \bigcap\{I_{\mathcal{S}}(\overline{U}) : y \in e(U), U \in \mathcal{T}_X\} & \text{если } y \in \bigcup\{e(U) : U \in \mathcal{T}_X\} \\ X & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2)$$

где $\overline{U}$ – замыкание U в X и $I_{\mathcal{S}}(\overline{U}) = \bigcap\{S \in \mathcal{S} : \overline{U} \subset S\}$. Так как e регулярно, для любого $y \in \mathbb{I}^\tau$ система $\gamma_y = \{U \in \mathcal{T}_X : y \in e(U)\}$ сцепленная. Следовательно, $\omega_y = \{S \in \mathcal{S} : \overline{U} \subset S \text{ для некоторого } U \in \gamma_y\}$ также сцепленная, поэтому $r(y) = \bigcap\{S : S \in \omega_y\} \neq \emptyset$.

Легко видеть, что $r(x) = x$ для всех $x \in X$. Более того, r полунепрерывно сверху. Действительно, пусть $r(y) \subset W$, где $y \in \mathbb{I}^\tau$ и $W \in \mathcal{T}_X$. Тогда найдется конечное число таких $U_i \in \mathcal{T}_X$, $i = 1, 2, \dots, k$, что $y \in \bigcap_{i=1}^{i=k} e(U_i)$ и $\bigcap_{i=1}^{i=k} I_{\mathcal{S}}(\overline{U}_i) \subset W$. Очевидно, $r(y') \subset W$ для всех $y' \in \bigcap_{i=1}^{i=k} e(U_i)$. Таким образом, r является полунепрерывной сверху компактно-значной ретракцией из $\mathbb{I}^\tau$ на X . В силу [16] X есть пространство Дугунджи.

Далее, предположим, что X связно и $\mathcal{S}$ – бинарная нормальная предбаза X . В силу [7] любое множество вида $I_{\mathcal{S}}(F)$ является $\mathcal{S}$ -выпуклым (множество $A \subset X$ называется $\mathcal{S}$ -выпуклым, если $I_{\mathcal{S}}(x, y) \subset A$ для любых $x, y \in A$). Таким образом, каждое $r(y)$ есть $\mathcal{S}$ -выпуклое множество. В силу [7; следствие 1.5.8] все замкнутые $\mathcal{S}$ -выпуклые подмножества в X также являются связными. Отсюда отображение r ,

определенное в (2), имеет в качестве значений только связные множества. Следовательно, в силу [16] X есть абсолютный экстензор в размерности 1, и существует отображение $r_1: \mathbb{I}^\tau \rightarrow \text{exr } X$ такое, что $r_1(x) = \{x\}$ для всех $x \in X$, см. [17; теорема 3.2]. Здесь, $\text{exr } X$ – пространство всех замкнутых подмножеств в X с топологией Виеториса. С другой стороны, поскольку X – нормальный суперкомпакт, существует ретракция r_2 из $\text{exr } X$ на X , см. [7; следствие 1.5.20]. Тогда композиция $r_2 \circ r_1: \mathbb{I}^\tau \rightarrow X$ есть (однозначная) ретракция. Отсюда $X \in AR$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3 ([9], [10]). λX – пространство Дугунджи, если X – открыто порожденный компакт. Если при этом X связно, то λX – абсолютный ретракт.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что λ есть непрерывный функтор, сохраняющий открытые отображения, см. [8]. Поэтому λX открыто порожденный. Поскольку λX имеет бинарную нормальную предбазу, предложение 3.2 завершает доказательство.

Замкнутое подмножество $\mathcal{A}$ множества $\text{exr } X$ называется *гиперпространством вложений*, если для любых $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \text{exr } X$ вложение $A \subset B$ влечет $B \in \mathcal{A}$. Пространство всех гиперпространств вложений с индуцированной топологией из $\text{exr}^2 X$ замкнуто в $\text{exr}^2 X$ и обозначается GX [11].

СЛЕДСТВИЕ 3.4 [11]. GX – пространство Дугунджи, если X – открыто порожденный компакт. Если при этом X связно, то GX абсолютный ретракт.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку G – непрерывный функтор, сохраняющий открытые отображения [18], GX является открыто порожденным, если X открыто порожден. С другой стороны, в GX существует бинарная предбаза [19]. Отсюда в силу предложения 3.2 GX является пространством Дугунджи. Предположим, что X связное и открыто порожденное. Тогда GX связное пространство Дугунджи. Следовательно, $\lambda(GX)$ – абсолютный ретракт. Более того, существуют естественные включения $GX \subset \lambda(GX) \subset G^2X = G(GX)$ и ретракция из G^2X на GX , см. [19; лемма 2]. Следовательно, $GX \in AR$ как ретракт $\lambda(GX)$.

4. Доказательство теоремы 1.1. Мы начнем этот пункт со следующей леммы.

ЛЕММА 4.1. Пусть X – компактное регулярно вложенное подмножество пространства Y . Тогда существует полунепрерывное сверху компактнозначное отображение $r: Y \rightarrow \lambda X$ такое, что $r(x) = \eta_x$ для всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e: \mathcal{T}_X \rightarrow \mathcal{T}_Y$ – регулярный оператор из топологии X в топологию Y . Определим $r: Y \rightarrow \lambda X$ соотношением

$$r(y) = \begin{cases} \bigcap \{(\overline{U})^+ : y \in e(U), U \in \mathcal{T}_X\}, & \text{если } y \in \bigcup \{e(U) : U \in \mathcal{T}_X\}, \\ \lambda X & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\overline{U}$ – замыкание U в X и $(\overline{U})^+ \subset \lambda X$ состоит из всех $\eta \in \lambda X$ таких, что $\overline{U} \in \eta$. Поскольку e регулярно, для любого $y \in Y$ система $\{U \in \mathcal{T}_X : y \in e(U)\}$ является сцепленной. Следовательно, $\{\overline{U} : y \in e(U)\}$ тоже сцепленная и состоит из замкнутых множеств в X . Отсюда, $\bigcap \{(\overline{U})^+ : y \in e(U), U \in \mathcal{T}_X\} \neq \emptyset$. Таким образом,

значения r суть непустые компактные множества. Легко видеть, что $r(x) = \eta_x$ для всех $x \in X$. Можно показать (как при доказательстве предложения 3.2) что r полунепрерывно сверху.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. (i) $\Rightarrow$ (ii). Мы следуем доказательству [3; теорема 3]. Равенство (1) задает однородный и слабо аддитивный экстендер $u_1: C(X) \rightarrow C(\lambda X)$. Рассмотрим пространство Z , получаемое присоединением λX к Y в точках множества X . Тогда λX – замкнутое подмножество Z и, поскольку λX – пространство Дугунджи (см. следствие 3.3), существует линейный монотонный оператор продолжения $u_2: C(\lambda X) \rightarrow C(Z)$ такой, что $u_2(1) = 1$. Тогда $u(f) = u_2(u_1(f))|_Y$, $f \in C(X)$, задает монотонный однородный слабо аддитивный экстендер $u: C(X) \rightarrow C(Y)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть X есть подмножество множества Y и $u: C(X) \rightarrow C(Y)$ монотонный однородный слабо аддитивный экстендер. Определим $r: Y \rightarrow S(X)$ соотношением $r(y)(f) = u(f)(y)$, где $y \in Y$ и $f \in C(X)$. Легко видеть, что r непрерывно и $r(x) = \delta_x$ для всех $x \in X$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Пусть $r_2: Y \rightarrow S(X)$ – непрерывное отображение такое, что $r_2(x) = \delta_x$ для всех $x \in X$. Равенство $u(f)(\varphi) = \varphi(f)$ задает монотонный экстендер $u: C(X) \rightarrow C(S(X))$. Тогда в силу [20; теорема 4.1] X регулярно вложено в $S(X)$. Таким образом, по лемме 4.1 существует полунепрерывное сверху компактнозначное отображение $r_1: S(X) \rightarrow \lambda X$ такое, что $r_1(\delta_x) = \eta_x$, $x \in X$. Тогда $r = r_1 \circ r_2: Y \rightarrow \lambda X$ – требуемое отображение.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Пусть X вложено в $\mathbb{I}^A$ для некоторого A и $r: \mathbb{I}^A \rightarrow \lambda X$ есть полунепрерывное сверху компактнозначное отображение такое, что $r(x) = \eta_x$, $x \in X$. Для любого открытого $U \subset X$ определим $e(U) = \{y \in \mathbb{I}^A : r(y) \subset U^+\}$. Поскольку U^+ открыто в λX и r является полунепрерывным сверху, $e(U)$ открыто в $\mathbb{I}^A$. Более того, $e(U) \cap X = U$ и $e(U) \cap e(V) = \emptyset$, если U и V дизъюнкты. Таким образом, X регулярно вложено в $\mathbb{I}^A$. Наконец, в силу [13] X κ -метризуемо.

Теперь, рассмотрим функтор O сохраняющих порядок функционалов, введенный Радулум [5]. Напомним, что отображение $\varphi: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *сохраняющим порядок*, если оно монотонно, слабо аддитивно и $\varphi(1_X) = 1$. Теорема 4.2 ниже следует из теоремы 1.1. Действительно, поскольку S есть подфунктор функтора O , имеем вложения $X \subset S(X) \subset O(X)$ для любого компакта X . Из этого следуют импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) и (ii) $\Rightarrow$ (iii) теоремы 4.2. Доказательства (iii) $\Rightarrow$ (vi) и (vi) $\Rightarrow$ (i) аналогичны.

ТЕОРЕМА 4.2. *Для компактного пространства X следующие условия эквивалентны:*

- (i) X κ -метризуемо;
- (ii) для любого вложения X в компакт Y существует монотонный и слабо аддитивный экстендер $u: C(X) \rightarrow C(Y)$ такой, что $u(1_X) = 1_Y$;
- (iii) для любого вложения X в компакт Y существует непрерывное отображение $r: Y \rightarrow O(X)$ такое, что $r(x) = \delta_x$ для всех $x \in X$;
- (iv) для любого вложения X в компакт Y существует полунепрерывное сверху компактнозначное отображение $r: Y \rightarrow \lambda X$ такое, что $r(x) = \eta_x$ для всех $x \in X$.

Пусть F – ковариантный функтор в категории компактных пространств и непрерывных отображений. Компакт X называется F -инъективным [4], если для любого отображения $f: Y \rightarrow X$ и любого вложения $i: Y \rightarrow Z$ существует отображение $g: F(Z) \rightarrow F(X)$ такое, что $F(f) = g \circ F(i)$. Легко видеть, что если F обладает тем свойством, что для любого X существует вложение $j_X: X \rightarrow F(X)$, то выполнено следующее: X является F -инъективным тогда и только тогда, когда для любого вложения X в другой компакт Y существует отображение $h: Y \rightarrow F(X)$ такое, что $h(x) = j_X(x)$ для всех $x \in X$. Из теоремы 1.1 (iii) следует, что $\mathfrak{K}$ -метризуемые компакты – это в точности S -инъективные компакты.

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания и предложения, которые полностью изменили первоначальную версию статьи. Автор также благодарен Тарасу Радулу за указание на то, что S есть подфунктор функтора O , и за предоставление своих статей о свойствах функтора O .

Первоначальная версия этой статьи была подготовлена во время визита автора на Факультет математики и информатики (ФМИ) Университета г. Софии в июне–июле 2009 г. Автор выражает благодарность ФМИ за гостеприимство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Pelczyński, “Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions”, *Dissertationes Math.*, **58** (1968).
- [2] Е. В. Щепин, “Топология предельных пространств несчетных обратных спектров”, *УМН*, **31**:5 (1976), 191–226.
- [3] Л. Б. Шапиро, “Об операторах продолжения функции и нормальных функторах”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1992, №1, 35–42.
- [4] Е. В. Щепин, “Функторы и несчетные степени компактов”, *УМН*, **36**:3 (1981), 3–62.
- [5] T. Radul, “On the functor of order-preserving functionals”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **39**:3 (1998), 609–615.
- [6] J. de Groot, “Supercompactness and superextensions”, *Contributions to Extension Theory of Topological Structures*, Proceedings of the Symposium held in Berlin (August 14–19, 1967), Deutscher Verlag Wiss., Berlin, 1969, 89–90.
- [7] J. van Mill, *Supercompactness and Wallman Spaces*, Math. Centre Tracts, **85**, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1977.
- [8] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988.
- [9] А. В. Иванов, “Суперрасширения открыто порожденных компактов”, *Докл. АН СССР*, **259**:2 (1981), 275–278.
- [10] А. В. Иванов, “Решение проблемы ван Милла о характеристизации бикомпактов, суперрасширения которых являются абсолютными реграктами”, *Докл. АН СССР*, **262**:3 (1982), 526–528.
- [11] Е. В. Моисеев, “О пространствах замкнутых гиперпространств роста и включения”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1988, №3, 54–57.
- [12] T. Radul, “Topology of the space of order-preserving functionals”, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, **47**:1 (1999), 53–60.
- [13] Л. В. Широков, “Внешняя характеристика пространств Дугунджи и $\mathfrak{K}$ -метризуемых компактов”, *Докл. АН СССР*, **263**:5 (1982), 1073–1077.
- [14] Е. В. Щепин, “О $\mathfrak{K}$ -метризуемых пространствах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:2 (1979), 442–478.

- [15] K. Kuratowski, *Topology*, v. I, PWN, Warsaw, 1966.
- [16] А. Н. Дранишников, “Многозначные абсолютные ретракты и абсолютные экстензоры в размерности 0 и 1”, *УМН*, **39**:5 (1984), 241–242.
- [17] В. В. Федорчук, “О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов”, *УМН*, **39**:5 (1984), 169–208.
- [18] A. Teleiko, M. Zarichnyi, *Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces*, Math. Stud. Monogr. Ser., **5**, VNTL Publ., Lviv, 1999.
- [19] Т. Н. Радул, “Монада гиперпространств включения и ее алгебры”, *Укр. матем. журн.*, **42**:6 (1990), 806–811.
- [20] E. K. van Douwen, *Simultaneous Extension of Continuous Functions*, Ph.D. thesis, Vrije Univ., Amsterdam, 1975.

В. Вълков

Nipissing University, Канада

E-mail: veskov@nipissingu.ca

Поступило

06.08.2009