Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Жабицкая, Среднее значение сумм неполных частных непрерывной дроби, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 3, 472–476

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9054>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 04:35:43

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Среднее значение сумм неполных частных непрерывной дроби

Е. Н. Жабицкая

Любое рациональное число $x \in [0; 1]$ можно представить в виде обычной непрерывной дроби

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}, \quad a_i \in \mathbb{N}, \quad a_n \geq 2, \quad (1)$$

и в виде приведенной регулярной непрерывной дроби (см., например, [1])

$$x = \langle 1; b_1, b_2, \dots, b_m \rangle = 1 - \frac{1}{b_1 - \frac{1}{b_2 - \dots - \frac{1}{b_m}}}, \quad b_i \in \mathbb{N}, \quad b_i \geq 2. \quad (2)$$

Числа a_i, b_i называются *неполными частными* дробей (1), (2) соответственно.

Обозначим сумму неполных частных обычной непрерывной дроби числа x через $s(x)$, сумму нечетных неполных частных этой дроби через $s_1(x)$, а сумму четных неполных частных через $s_2(x)$:

$$s(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i, \quad s_1(x) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \equiv 1 \pmod{2}}} a_i, \quad s_2(x) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \equiv 0 \pmod{2}}} a_i.$$

Количество неполных частных в представлении (2) числа x обозначим через $l'(x)$, а сумму неполных частных – через $s'(x)$:

$$l'(x) = m, \quad s'(x) = \sum_{1 \leq i \leq m} b_i.$$

Отметим, что для среднего значения $s(a/b)$ по промежутку $1 \leq a \leq b$ Кнутом в работе [2] была получена следующая асимптотическая формула:

$$\frac{1}{b} \sum_{a \leq b} s\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{6}{\pi^2} \log^2 b + O(\log b (\log \log b)^2).$$

Позднее Панов в работе [3] получил асимптотическую формулу с тремя значащими членами для среднего по взаимно простым a и b из той же области:

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{a \leq b, (a,b)=1} s\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{6}{\pi^2} \log^2 b + A_1 \log b$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00371-а).

$$+ A_2 \sum_{p|b} p(p-1)^2(1-p^{-\alpha(p)}) \log^2 p + O\left(\frac{b^{7/8+\varepsilon}}{\varphi(b)}\right),$$

где A_1, A_2 – абсолютные константы, сумма в правой части берется по простым делителям b , $\alpha(p)$ – степень, с которой простое p входит в каноническое разложение b .

В работе [4] на основании метода, использованного Устиновым в работе [5], была получена асимптотическая формула для среднего значения $l'(a/b)$, где $a \leq b \leq R$, и, как следствие из нее, асимптотическая формула для среднего по взаимно простым a и b из той же области. Приведем результаты из работы [4] (теоремы 1 и 2).

ТЕОРЕМА 1. Для действительного $R \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$E(R) = \frac{2}{[R]([R]+1)} \sum_{b \leq R} \sum_{a \leq b} l'\left(\frac{a}{b}\right) = C_2 \log^2 R + C_1 \log R + C_0 + O(R^{-1} \log^5 R), \quad (3)$$

где

$$C_2 = \frac{1}{2\zeta(2)}, \quad C_1 = \frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right),$$

$$C_0 = \frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma^2 - 3\gamma + \frac{7}{4} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} \right) + \frac{2(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{2\zeta^2(2)} \right),$$

$\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, γ – константа Эйлера.

ТЕОРЕМА 2. Для действительного $R \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$E^*(R) = \frac{2}{\zeta(2)[R]([R]+1)} \sum_{b \leq R} \sum_{\substack{a \leq b \\ (a,b)=1}} l'\left(\frac{a}{b}\right) = C_2 \log^2 R + C_1 \log R + C_0 + O(R^{-1} \log^6 R), \quad (4)$$

где

$$C_2 = \frac{1}{2\zeta(2)}, \quad C_1 = \frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right),$$

$$C_0 = \frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma^2 - 3\gamma + \frac{7}{4} - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} \right) + \frac{3(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{\zeta^2(2)} \right).$$

В 1987 г. Мерсон в работе [6] показал, что

$$\sum_{\substack{a \leq b \\ (a,b)=1}} l'\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a \leq b \\ (a,b)=1}} s\left(\frac{a}{b}\right), \quad \sum_{\substack{a \leq b \\ (a,b)=1}} s'\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{3}{2} \sum_{\substack{a \leq b \\ (a,b)=1}} s\left(\frac{a}{b}\right).$$

Из доказательства, приведенного в работе [6], следуют соотношения:

$$l'\left(\frac{a}{b}\right) + l'\left(\frac{b-a}{b}\right) = s\left(\frac{a}{b}\right), \quad (5)$$

$$s'\left(\frac{a}{b}\right) + s'\left(\frac{b-a}{b}\right) = 3s\left(\frac{a}{b}\right), \quad (6)$$

$$l'\left(\frac{a}{b}\right) = s_1\left(\frac{a}{b}\right) - \varepsilon\left(\frac{a}{b}\right), \quad (7)$$

$$l'\left(\frac{a}{b}\right) = s_2\left(\frac{a}{b}\right) + \varepsilon\left(\frac{a}{b}\right), \quad (8)$$

где $\varepsilon(a/b) = 1$, если представление числа a/b в виде (1) имеет нечетное число неполных частных, иначе $\varepsilon(a/b) = 0$.

Из соотношений (5), (6) и из теорем 1, 2 сразу следуют асимптотические формулы для средних значений $s(a/b)$ и $s'(a/b)$ по множеству $a \leq b \leq R$.

В заметке мы получим асимптотические формулы для средних значений $s_1(a/b)$, $s_2(a/b)$ по $a \leq b \leq R$.

ТЕОРЕМА 3 (основной результат). *Для действительного $R \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$S_1(R) = \frac{2}{[R]([R] + 1)} \sum_{b \leq R} \sum_{a \leq b} s_1\left(\frac{a}{b}\right) = E(R) + \frac{1}{2} + O(R^{-1}), \quad (9)$$

$$S_2(R) = \frac{2}{[R]([R] + 1)} \sum_{b \leq R} \sum_{a \leq b} s_2\left(\frac{a}{b}\right) = E(R) - \frac{1}{2} + O(R^{-1}), \quad (10)$$

$$S_1^*(R) = \frac{2}{\zeta(2)[R]([R] + 1)} \sum_{b \leq R} \sum_{\substack{a \leq b \\ (a,b)=1}} s_1\left(\frac{a}{b}\right) = E^*(R) + \frac{1}{2} + O(R^{-1} \log R), \quad (11)$$

$$S_2^*(R) = \frac{2}{\zeta(2)[R]([R] + 1)} \sum_{b \leq R} \sum_{\substack{a \leq b \\ (a,b)=1}} s_2\left(\frac{a}{b}\right) = E^*(R) - \frac{1}{2} + O(R^{-1} \log R). \quad (12)$$

Следующее утверждения о том, как из представления числа x в виде (1) получить представление числа x в виде (2), является общеизвестным (см. [6]).

ЛЕММА 1. Пусть $a/b = [a_0; a_1, \dots, a_n]$. Для $j = 0, 1, \dots, n$ через 2_j обозначим последовательность из $a_j - 1$ двоек. Если n – четное, то $a/b = \langle a_0 + 1; 2_1, a_2 + 2, \dots, 2_{n-1}, a_n + 1 \rangle$. Если n – нечетное, то $a/b = \langle a_0 + 1; 2_1, a_2 + 2, \dots, a_{n-1} + 2, 2_n \rangle$.

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть M – множество рациональных чисел отрезка $[0, 1]$, представление которых в виде обычной непрерывной дроби имеет нечетное число неполных частных. Тогда

$$\sum_{\substack{a \leq b \leq R \\ a/b \in M}} 1 = \frac{R^2}{4} + O(R), \quad \sum_{\substack{a \leq b \leq R \\ a/b \in M, (a,b)=1}} 1 = \frac{R^2}{4\zeta(2)} + O(R \log R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1 рациональные числа, представление которых в виде обычной непрерывной дроби имеет нечетное количество неполных частных, это в точности те числа, в представлении которых в виде приведенной регулярной непрерывной дроби последнее неполное частное равно двум.

Пусть $a/b = \langle 1; b_1, \dots, b_{m-2}, b_{m-1}, 2 \rangle$ и $(a, b) = 1$, $a \leq b \leq R$. Тогда

$$a = 2P' - P, \quad b = 2Q' - Q,$$

где $P/Q = \langle 1; b_1, \dots, b_{m-2} \rangle$, $P'/Q' = \langle 1; b_1, \dots, b_{m-2}, b_{m-1} \rangle$ – подходящие дроби числа a/b . Числа Q , Q' удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 2Q' - Q \leq R, \\ Q < Q', (Q, Q') = 1. \end{cases} \quad (13)$$

И обратно, все целочисленные решения Q' , Q системы (13) являются знаменателями предпредпоследней и предшествующей ей подходящих дробей к числу $(2P' - P)/(2Q' - Q)$

соответственно (у этого числа последнее неполное частное приведенной регулярной непрерывной дроби равно двум и $(2P' - P, 2Q' - Q) = 1$, $2P' - P \leq 2Q' - Q \leq R$). А числа P , P' находятся однозначно по знаменателям из условий

$$\begin{cases} PQ' - P'Q = 1, \\ P \leq Q, \\ P' \leq Q'. \end{cases} \quad (14)$$

Таким образом, количество целочисленных решений системы (13) относительно переменных Q , Q' есть количество элементов (a, b) множества

$$\left\{ a \leq b \leq R, (a, b) = 1, \frac{a}{b} \in M \right\}.$$

Аналогично, количество элементов множества

$$\left\{ a \leq b \leq R, \frac{a}{b} \in M \right\}$$

равно количеству целочисленных решений системы (13) без условия взаимной простоты, т.е.

$$\begin{cases} 2Q' - Q \leq R, \\ Q < Q'. \end{cases} \quad (15)$$

Количество целочисленных решений системы (15) относительно Q , Q' есть количество целых точек в области S (рис. 1).

Рис. 1

То есть

$$\sum_{\substack{a \leq b \leq R \\ a/b \in M}} 1 = \frac{[R/2][R]}{2} = \frac{R^2}{4} + O(R).$$

А количество целочисленных решений системы (13) находится из количества решений системы (15) с помощью преобразования Мебиуса:

$$\sum_{d \leq R} \mu(d) \left(\frac{R^2}{4d^2} + O\left(\frac{R}{d}\right) \right) = \frac{R^2}{4\zeta(2)} + O(R \log R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Следует из соотношений (7) и (8) и леммы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Bd I. *Elementare Kettenbrüche*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1954. [2] A. C. Yao, D. E. Knuth, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **72**:12 (1975), 4720–4722. [3] А. А. Панов, *Матем. заметки*, **32**:5 (1982), 593–600. [4] Е. Н. Жабицкая, *Матем. сб.*, **200**:8 (2009), 79–110. [5] А. В. Устинов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:5 (2008), 189–224. [6] G. Myerson, *Arch. Math. (Basel)*, **48**:5 (1987), 420–425.

Е. Н. Жабицкая

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: elena.jabitskaya@gmail.com

Поступило

16.06.2010