Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Теляковский, Оценка одновременного приближения функций и их производных суммами Фурье, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 3, 478–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9056>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:24:00

Оценка одновременного приближения функций и их производных суммами Фурье

С. А. Теляковский

В [1] рассматривалась следующая задача об одновременном приближении в C суммами Фурье функций класса $W^r H[\omega]$ и их производных.

Для набора m целых чисел $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq r$ требуется выяснить поведение при $n \rightarrow \infty$ величины

$$\mathcal{E}_n^{(m)}(W^r H[\omega], S_n, x) := \sup_{f \in W^r H[\omega]} \sum_{i=1}^m \frac{1}{n^{k_i}} |f^{(k_i)}(x) - S_n(f^{(k_i)}, x)|. \quad (1)$$

Заметим, что случай $k_1 > 0$ легко сводится к случаю $k_1 = 0$. Кроме того, в (1) достаточно рассматривать какое-либо одно значение x , например, $x = 0$. Поэтому в дальнейшем x писать не будем.

В настоящей заметке говорится о величинах $\mathcal{E}_n^{(m)}$ только для классов W^r ввиду того, что будет использоваться оценка (4), относящаяся к классам W^r . Для классов $W^r H[\omega]$ подобный результат не известен.

В [1] анонсирована оценка

$$\mathcal{E}_n^{(m)}(W^r, S_n) = \frac{4}{\pi^2} \sqrt{m_0^2 + m_1^2} \frac{\log n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad (2)$$

где m_0 и m_1 – количество четных и соответственно нечетных чисел среди $k_1, k_2, \dots, k_m$.

В [2] и [3; § 2.7] публикуются доказательства оценки (2).

Однако, в этих доказательствах проводятся оценки величин $\mathcal{E}_n^{(m)}$ только сверху, а об оценках снизу не сказано ни слова. Между тем, в подобных задачах наибольшую трудность обычно представляет получение именно оценок снизу.

Кроме того, там не прослеживался характер зависимости оценок относительно параметров.

Поскольку в этой задаче имеется много параметров, попытка получения в общем случае оценок сверху и снизу, равномерных относительно всех параметров, обречена на неудачу. Но желание иметь оценки, равномерные относительно существенного в этой задаче параметра m , оправдано.

Анализ упомянутых доказательств из [2] и [3] показывает, что там фактически установлена равномерная относительно всех параметров оценка

$$\mathcal{E}_n^{(m)}(W^r, S_n) \leq \frac{4}{\pi^2} \sqrt{m_0^2 + m_1^2} \frac{\log n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right). \quad (3)$$

Отметим, что оценка (3) нетривиальна, если среди $k_1, k_2, \dots, k_m$ есть числа разной четности.

Приведем пример, когда удастся найти асимптотику величины $\mathcal{E}_n^{(m)}(W^r, S_n)$.

Пусть $m = 2$ и $k_1 = 0, k_2 = r$. Воспользуемся оценкой из [4]

$$\sup_{f \in W^r} \|f(x) - S_n(f, x)\|_C = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n^r} \log \frac{n}{\min(n, r+1)} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad (4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00417) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-65772.2010.1).

равномерной относительно всех параметров. Так как

$$\sup_{f \in W^r} \|f^{(r)}(x) - S_n(f^{(r)}, x)\|_C = \sup_{|f| \leq 1} \|f(x) - S_n(f, x)\|_C = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1),$$

в рассматриваемом случае

$$\mathcal{E}_n^{(2)}(W^r, S_n) = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n^r} \log n + O\left(\frac{1}{n^r} \log \frac{n}{\min(n, r+1)} + \frac{1}{n^r}\right).$$

В частности, при $r > n/2$

$$\mathcal{E}_n^{(2)}(W^r, S_n) = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n^r} \log n + O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Точно так же с помощью оценки (4) устанавливается следующее утверждение.

Если $k_1 = 0$, а все остальные числа $k_2, \dots, k_m$ больше $n/2$, то равномерно относительно всех параметров

$$\mathcal{E}_n^{(m)}(W^r, S_n) = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n^r} \log n + O\left(\frac{m}{n^r}\right). \quad (5)$$

Использованные здесь рассуждения показывают, что в (3) m_0 и m_1 можно заменить на количество четных и нечетных чисел среди $k_1, k_2, \dots, k_m$, которые меньше $n/2$.

Заметим, что оценки сверху, которые в этих случаях дает формула (3), являются более грубыми.

Приведем еще пример, когда с помощью (4) легко получить оценку, более точную, чем (3).

Пусть r – нечетное число и в качестве k_i взяты все четные числа, не превосходящие r , т.е. числа

$$0, 2, \dots, 2\left[\frac{r}{2}\right].$$

Введем обозначение $p := [r/2]$. Тогда $r = 2p + 1$ и $m = p + 1$. Пусть $n \geq r$.

С помощью (4) приходим к оценке

$$\mathcal{E}_n^{(m)}(W^r, S_n) \leq \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n^r} \sum_{i=1}^m \log \frac{n}{\min(n, r - k_i + 1)} + O\left(\frac{m}{n^r}\right).$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^m \log \frac{n}{\min(n, r - k_i + 1)} = m \log n - \sum_{i=1}^m \log(r - 2(i - 1) + 1).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \log(r - 2(i - 1) + 1) &= \sum_{i=1}^m \log(2p - 2i + 4) \\ &= m \log 2 + \sum_{i=1}^{p+1} (p - i + 2) = m \log 2 + \log(p + 1). \end{aligned}$$

С помощью формулы Стирлинга получаем

$$\log(p + 1)! = (p + 1) \log(p + 1) + O(p + 1).$$

Объединив эти оценки, видим, что

$$\sum_{i=1}^m \log \frac{n}{\min(n, r - k_i + 1)} = m \log n - m \log m + O(m) = m \log \frac{n}{m} + O(m),$$

и таким образом, равномерно относительно всех параметров

$$\mathcal{E}_n^{(m)}(W^r, S_n) \leq \frac{4}{\pi^2} \frac{m}{n^r} \log \frac{n}{m} + O\left(\frac{m}{n^r}\right). \quad (6)$$

В [4] доказано, что оценка вида (4) справедлива также для приближений суммами Фурье функций из классов $\overline{W}^r$, сопряженных с функциями класса W^r . Таким образом, оценки вида (5) и (6) имеют место и для аналогично определяемых величин $\mathcal{E}_n^{(m)}(\overline{W}^r, S_n)$.

При этом числа $k_1, k_2, \dots, k_m$ могут быть не обязательно целыми. Переносу результатов из [1] на такой случай посвящена работа [5].

До сих пор имелись в виду приближения в C и соответствующие этому случаю классы W^r и $\overline{W}^r$. Но можно рассматривать такого рода задачи и для приближений в метрике L .

Согласно сказанному в [4] аналог оценки (4) справедлив для приближений в L соответствующих классов функций W_L^r . Поэтому для верхних граней

$$\sup_{f \in W_L^r} \left\| \sum_{i=1}^m \frac{1}{n^{k_i}} (f^{(k_i)}(x) - S_n(f^{(k_i)}, x)) \right\|_L \quad (7)$$

также имеют место оценки, подобные (5) и (6).

Вопрос об одновременном приближении функций и их производных в метрике L рассматривался в [6], но там речь шла не о величинах (7), а о более грубой характеристике — о верхних гранях

$$\sup_{f \in W_L^r} \sum_{i=1}^m \frac{1}{n^{k_i}} \|f^{(k_i)}(x) - S_n(f^{(k_i)}, x)\|_L, \quad (8)$$

для которых были анонсированы асимптотические оценки.

Нетрудно видеть, что оценки вида (5) и (6) справедливы и для величин (8).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Степанец, *Докл. АН СССР*, **254**:3 (1980), 543–544. [2] А. И. Степанец, *Укр. матем. журн.*, **33**:3 (1981), 356–367. [3] А. И. Степанец, *Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Линейные методы*, Киев, Наукова думка, 1981. [4] С. А. Теляковский, *Матем. заметки*, **4**:3 (1968), 291–300. [5] Н. Н. Сориц, А. И. Степанец, *Матем. заметки*, **36**:6 (1984), 873–882. [6] Н. Н. Сориц, *Укр. матем. журн.*, **37**:2 (1985), 205–211.

С. А. Теляковский

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: Satel@mi.ras.ru

Поступило

28.02.2011