Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Монахов, О разрешимости группы с перестановочными подгруппами, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 3, 436–441

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9057>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:54:34

О разрешимости группы с перестановочными подгруппами

В. С. Монахов

Устанавливается разрешимость конечной группы $G = AB$ при условии, что подгруппы A и B разрешимы и картеровы подгруппы из A перестановочны с картеровыми подгруппами из B .

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm9057

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Одним из центральных результатов теории конечных групп является теорема Виландта–Кегеля о разрешимости группы, представимой в виде произведения двух нильпотентных подгрупп. Ослабление нильпотентности одного из факторов до сверхразрешимости приводит к неразрешимым группам. Например, простая группа порядка 168 является произведением сверхразрешимой подгруппы порядка 21 и нильпотентной подгруппы порядка 8. Вместе с тем в 1978 г. Монахов [1] установил разрешимость группы $G = AB$ при условии, что подгруппа A сверхразрешима, а подгруппа B имеет нечетный порядок и либо примарна, либо циклическая. Спустя два года Казарин [2] получил более общий результат: *группа $G = AB$ разрешима, если подгруппа A сверхразрешима, а подгруппа B имеет нечетный порядок и нильпотентна.*

Картеровой подгруппой группы называют нильпотентную самонормализуемую подгруппу [3; III.4.5].

Гашицевой подгруппой [3; III.4.21] группы G называется подгруппа H , удовлетворяющая следующим двум условиям:

- 1) H сверхразрешима;
- 2) если $H \leq H_1 < T \leq G$, то $|T : H_1|$ – не простое число.

Запись $H \leq G$ означает, что H – подгруппа группы G .

В настоящей работе без использования классификации конечных простых групп, но с использованием сформулированных выше результатов Виландта–Кегеля и Казарина, доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A, B – разрешимые подгруппы группы G и $G = AB$.

1) Если каждая картерова подгруппа из A перестановочна с каждой картеровой подгруппой из B , то группа G разрешима.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-БРФФИ, (грант Ф 10P-231).

2) Если картерова подгруппа из A имеет нечетный порядок и каждая картерова подгруппа из A перестановочна с каждой гашиоцевой подгруппой из B , то группа G разрешима.

1. Необходимые обозначения и вспомогательные леммы. В отношении терминологии и обозначений будем придерживаться [3]. Напомним, что $H^G = \langle H^g \mid g \in G \rangle$ – наименьшая нормальная подгруппа группы G , содержащая H . Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G , а $R(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G .

ЛЕММА 1. Пусть K – картерова подгруппа разрешимой группы G . Тогда

- 1) если K_1 – картерова подгруппа группы G , то существует $g \in G$ такой, что $K_1^g = K$;
- 2) если $K \subseteq H \leq G$, то K – картерова подгруппа в H ;
- 3) если N – нормальная подгруппа группы G , то KN/N – картерова подгруппа группы G/N ;
- 4) $K^G = G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Утверждение впервые доказано Картером, см. [3; III.4.6].

2) Утверждение вытекает из определения картеровой подгруппы.

3) Так как $KN/N \simeq K/K \cap N$, то KN/N нильпотентна. Пусть xN – произвольный элемент из $N_{G/N}(KN/N)$. Тогда

$$(KN/N)^{xN} = KN/N = K^x N/N, \quad KN = K^x N.$$

Так как K и K^x – картеровы подгруппы разрешимой группы KN , они сопряжены в KN . Поэтому существует элемент $n \in N$ такой, что $K = K^{xn}$ и $xn \in N_G(K) = K$. Теперь $x \in KN$ и $N_{G/N}(KN/N) = KN/N$.

4) Пусть $x \in G$. Тогда K и K^x – картеровы подгруппы в $K^G = (K^G)^x$. Поэтому существует $y \in K^G$ такой, что $K = (K^x)^y$ и $xy \in N_G(K) = K$. Теперь $x \in Ky^{-1} \subseteq K^G$ и $G = K^G$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть G – группа, A – разрешимая подгруппа, N – разрешимая нормальная в G подгруппа. Если K – картерова подгруппа в A , то KN/N – картерова подгруппа в AN/N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $KN/N \simeq K/K \cap N$, то KN/N нильпотентна. Отображение

$$\varphi: a(A \cap N) \mapsto AN, \quad a \in A,$$

является изоморфизмом групп $A/A \cap N$ и AN/N , при котором

$$\varphi: K(A \cap N)/N \rightarrow KN/N.$$

Поэтому

$$\varphi: N_{A/A \cap N}(K(A \cap N)/A \cap N) \rightarrow N_{AN/N}(KN/N).$$

Но к $A/A \cap N$ применима лемма 1, по которой

$$N_{A/A \cap N}(K(A \cap N)/A \cap N) = K(A \cap N)/A \cap N \simeq K/K \cap N.$$

Поэтому

$$|N_{AN/N}(KN)/N| = |K/K \cap N| = |KN/N|.$$

и KN/N – картерова подгруппа в AN/N . Лемма доказана.

ЛЕММА 3. 1) В любой разрешимой группе гашюцевы подгруппы существуют и сопряжены между собой.

2) Если $H \subseteq M \leq G$, H – гашюцева подгруппа в G , то H – гашюцева подгруппа в M .

3) Пусть G – группа, A – ее подгруппа, N – нормальная в G подгруппа. Если H – гашюцева подгруппа в A , то HN/N – гашюцева подгруппа в AN/N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Утверждение впервые доказано Гашюцем, см. [3; III.4.24].

2) Утверждение вытекает из определения гашюцевой подгруппы.

3) Так как $HN/N \simeq H/H \cap N$, то HN/N сверхразрешима. Пусть

$$HN/N \leq H_1/N < T/N \leq AN/N.$$

По тождеству Дедекинда

$$H_1 = (A \cap H_1)N, \quad T = (A \cap T)N.$$

Теперь

$$1 \neq |T : H_1| = \frac{|A \cap T||N||A \cap N|}{|A \cap N||A \cap H_1||N|} = |A \cap T : A \cap H_1|$$

и $H \leq A \cap H_1 < A \cap T \leq A$. Поскольку H – гашюцева подгруппа в A , то $|A \cap T : A \cap H_1|$ – не простое число. Поэтому

$$|T : H_1| = |T/N : H_1/N|$$

не является простым числом и HN/N – гашюцева подгруппа в AN/N . Лемма доказана.

ЛЕММА 4 [2]. Если A и B – подгруппы группы G такие, что $G = AB$, A нильпотентна нечетного порядка, B сверхразрешима, то G разрешима.

ЛЕММА 5 [4; 7.2.5]. Если A и B – подгруппы группы G такие, что $AB^x = B^xA$ для всех $x \in G$, то подгруппа $A^B \cap B^A$ субнормальна в G .

ЛЕММА 6 [3], [4]. Если A – разрешимая субнормальная подгруппа группы G , то A^G разрешима.

2. Доказательство теоремы 1. Оба утверждения теоремы 1 будем доказывать одновременно с помощью индукции по порядку группы. Предположим, что $R(G) \neq 1$, и пусть N – разрешимая минимальная подгруппа группы G . Тогда $G/N = (AN/N)(BN/N)$, подгруппы

$$AN/N \simeq A/A \cap N, \quad BN/N \simeq B/B \cap N$$

разрешимы. Пусть C/N – картерова подгруппа из AN/N (нечетного порядка в случае 2) и K – картерова подгруппа из A . По лемме 2 KN/N – картерова подгруппа

(нечетного порядка в случае 2) в AN/N . По лемме 1 существует элемент $a \in A$ такой, что $C/N = (KN/N)^{aN}$, т.е. $C = K^a N$. Аналогично, если E/N – картерова (гашюцева в случае 2) подгруппа из B/N , то по лемме 1 (по лемме 3 в случае 2) $E = L^b N$, где $b \in B$ и L – некоторая картерова (гашюцева в случае 2) подгруппа из B . По условию K^a и L^b перестановочны, значит подгруппы C/N и E/N перестановочны. По индукции группа G/N разрешима, поэтому разрешима и группа G .

В дальнейшем считаем, что в G нет неединичных разрешимых нормальных подгрупп.

Пусть K – произвольная картерова подгруппа из A (нечетного порядка в случае 2), $x = ba$ – произвольный элемент из $G = AB = BA$, $b \in B$, $a \in A$, и L – произвольная картерова (гашюцева в случае 2) подгруппа из B . По условию $KL = LK$, поэтому

$$KL^x = KL^{ba} = (K^{a^{-1}}L^b)^a = (L^bK^{a^{-1}})^a = L^xK.$$

По лемме 5 $D = K^L \cap L^K$ – субнормальная в G подгруппа. Так как $K^L \subseteq KL$ и KL разрешима по теореме Виландта–Кегеля (в случае 2 по теореме Казарина, см. лемму 4), то D – разрешимая субнормальная в G подгруппа. Теперь D^G – разрешимая нормальная в G подгруппа по лемме 6 и $D^G \subseteq R(G) = 1$. Следовательно, $K^L \cap L^K = 1$.

Так как $K^L = K^{(KL)}$ нормальна в KL и $L^K = L^{(KL)}$ нормальна в KL , то

$$[K, L] \subseteq [K^L, L^K] \subseteq K^L \cap L^K = 1.$$

Таким образом, каждая картерова подгруппа из A содержится в централизаторе каждой картеровой (гашюцевой в случае 2) подгруппы из B , поэтому $[K^A, L^B] = 1$. Но $K^A = A$ по лемме 1. Пусть $H = N_G(K^A)$. Так как $R(H) \neq 1$, то H – собственная подгруппа группы G . По тождеству Дедекинда $H = A(H \cap B)$ и $L^B \subseteq H$. Пусть X – картерова (гашюцева в случае 2) подгруппа из $H \cap B$. Так как $L \subseteq L^B \subseteq H$, то X и L сопряжены и X будет картеровой (гашюцевой в случае 2) подгруппой в B . По условию K и X перестановочны. Теперь подгруппа H удовлетворяет условию теоремы и по индукции H разрешима. Так как $G = HB$, $L^B \subseteq H \cap B$, то $L^G \subseteq H$. Значит, $L^G \subseteq R(G) = 1$; противоречие. Теорема доказана.

3. О разрешимости факторизуемой группы с перестановочными силовскими подгруппами.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A, B – разрешимые подгруппы группы G и $G = AB$.

1) Если каждая силовская подгруппа из A перестановочна с каждой силовской подгруппой из B , то группа G разрешима.

2) Если каждая силовская подгруппа из A перестановочна с каждой картеровой подгруппой из B , то группа G разрешима.

3) Если подгруппа A имеет нечетный порядок и каждая силовская подгруппа из A перестановочна с каждой гашюцевой подгруппой из B , то группа G разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все три утверждения будем доказывать одновременно с помощью индукции по порядку группы, причем будут повторения некоторых фрагментов доказательства теоремы 1. Предположим, что $R(G) \neq 1$ и пусть N – разрешимая

минимальная подгруппа группы G . Тогда $G/N = (AN/N)(BN/N)$, подгруппы

$$AN/N \simeq A/A \cap N, \quad BN/N \simeq B/B \cap N$$

разрешимы. Пусть $p \in \pi(AN/N)$, X/N – силовская p -подгруппа из AN/N и P – силовская p -подгруппа из A . Тогда $PN/N = X/N$. Аналогично, если $q \in \pi(BN/N)$, Y/N – силовская q -подгруппа из BN/N и Q – силовская q -подгруппа из B , то $QN/N = Y/N$. Если E/N – картерова (гашюцева в случае 3) подгруппа из B/N , то по лемме 1 (по лемме 3 в случае 3) $E = L^b N$, где $b \in B$ и L – некоторая картерова (гашюцева в случае 3) подгруппа из B . По условию P и Q перестановочны в случае 1, P и L^b перестановочны в случаях 2 и 3. Значит подгруппы X/N и Y/N перестановочны в случае 1, X/N и E/N перестановочны в случаях 2 и 3. По индукции группа G/N разрешима, поэтому разрешима и группа G .

В дальнейшем считаем, что в G нет неединичных разрешимых нормальных подгрупп.

Пусть P – силовская подгруппа из A , $x = ba$ – произвольный элемент из $G = AB = BA$, $b \in B$, $a \in A$, и L – силовская в случае 1, картерова в случае 2 и гашюцева в случае 3 подгруппа из B . По условию $PL = LP$, поэтому

$$PL^x = PL^{ba} = (P^{a^{-1}}L^b)^a = (L^b P^{a^{-1}})^a = L^x P.$$

По лемме 5 $D = P^L \cap L^P$ – субнормальная в G подгруппа. Так как $P^L \subseteq PL$ и PL разрешима по теореме Виландта–Кегеля в случаях 1, 2, и по теореме Казарина (см. лемму 4) в случае 3, то D – разрешимая субнормальная в G подгруппа. Теперь D^G – разрешимая нормальная в G подгруппа и $D^G \subseteq R(G) = 1$. Следовательно, $P^L \cap L^P = 1$.

Так как $P^L = P^{(PL)}$ нормальна PL и $L^P = L^{(PL)}$ нормальна в PL , то

$$[P, L] \subseteq [P^L, L^P] \subseteq P^L \cap L^P = 1.$$

Таким образом, каждая силовская подгруппа из A содержится в централизаторе каждой силовской в случае 1, картеровой в случае 2 и гашюцевой в случае 3 подгруппы из B , поэтому $[P^A, L^B] = 1$. Пусть $H = N_G(P^A)$. По тождеству Дедекинда $H = A(H \cap B)$.

Случай 1. L – силовская подгруппа из B . Так как L – произвольная силовская подгруппа из B и $L^B \subseteq C_G(P^A) \subseteq N_G(P^A)$, то $B \subseteq H$ и P^A – нормальная неединичная разрешимая подгруппа группы G ; противоречие.

Случай 2. L – картерова подгруппа из B . По лемме 1 $L^B = B$, поэтому $B \subseteq H$, $H = G$ и P^A – нормальная неединичная разрешимая подгруппа группы G ; противоречие.

Случай 3. L – гашюцева подгруппа из B . Пусть X – гашюцева подгруппа из $H \cap B$. Так как $L \subseteq L^B \subseteq H$ и L – гашюцева подгруппа в $H \cap B$ по лемме 3, то X и L сопряжены в $H \cap B$ по лемме 3. Теперь X будет гашюцевой подгруппой в B . По условию каждая силовская подгруппа из A перестановочна с X . Теперь подгруппа H удовлетворяет условию теоремы и по индукции H разрешима. Так как $G = HB$, $L^B \subseteq H \cap B$, то $L^G \subseteq H$. Значит, $L^G \subseteq R(G) = 1$; противоречие. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. С. Монахов, “Произведение сверхразрешимой и циклической или примарной групп”, *Конечные группы*, Наука и техника, Минск, 1978, 50–63.
- [2] Л. С. Казарин, “Признаки непрототы факторизуемых групп”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:2 (1980), 288–308.
- [3] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [4] J. C. Lennox, S. E. Stonehewer, *Subnormal Subgroups of Groups*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 1987.

В. С. Монахов

Гомельский государственный университет

им. Ф. Скорины

E-mail: Victor.Monakhov@gmail.com

Поступило

20.01.2011