А. И. Гарбер, Поясное расстояние между гипергранями зонотопов, являющихся параллелоэдрами, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 3, 381–394

https://www.mathnet.ru/mzm9059

Математические заметки

Том 92 выпуск 3 сентябрь 2012

УДК 514

Поясное расстояние между гипергранями зонотопов, являющихся параллелоэдрами

А. И. Гарбер

Каждому d-мерному многограннику P с центрально-симметричными гипергранями можно сопоставить такую "карту метро", что каждая линия этого "метро" содержит в точности гиперграни, параллельные какой-то из граней P коразмерности 2. Поясной диаметр P – это максимальное количество линий данного "метро", которое нужно использовать, чтобы доехать от одной из гиперграней до другой. В данной работе доказано, что поясной диаметр d-мерного зонотопа, являющегося параллелоэдром, не превосходит $\lceil \log_2 (4/5)d \rceil$.

Библиография: 19 названий.

1. Параллелоэдры и гипотеза Вороного.

Определение 1.1. Многогранник $P \subset \mathbb{R}^d$ размерности d называется *d-мерным параллелоэдром*, если пространство $\mathbb{R}^d$ можно разбить на параллельные копии P, не пересекающиеся по внутренним точкам.

Определение 1.2. *Областью* или *многогранником Дирихле–Вороного* для d-мерной решетки Λ^d в $\mathbb{R}^d$ называется многогранник, состоящий из всех точек пространства $\mathbb{R}^d$, которые находятся не дальше от некоторой точки $O \in \Lambda^d$, чем от остальных точек решетки Λ^d. То есть,

$$DV_{\Lambda^d} := \{X \in \mathbb{R}^d\colon \text{ для всех } Y \in \Lambda^d \text{ выполнено } XO \leqslant XY, \text{ где } O \in \Lambda^d\}.$$

Для различных точек решетки Λ области Дирихле–Вороного отличаются только параллельным переносом и не пересекаются по внутренним точкам. Значит многогранник Дирихле–Вороного произвольной решетки является параллелоэдром. Одной из основных гипотез в теории параллелоэдров является гипотеза Вороного, которая утверждает обратное.

Гипотеза 1 (Вороной [1]). *Любой d-мерный параллелоэдр есть аффинный образ области Дирихле–Вороного некоторой решетки Λ^d.*

Далее мы будем использовать следующие теоремы о параллелоэдрах.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00633-а и 11-01-00735-а), гранта Президента РФ МД-352.2012.1, гранта Правительства РФ договор 11.G34.31.0053, а также Центра им. Бернулли (Centre Interfacultaire Bernoulli) и Швейцарского научного фонда (Swiss National Science Foundation).

Теорема 1.3 (Минковский [2]). *Любой параллелоэдр $P \subset \mathbb{R}^d$ удовлетворяет следующим свойствам*:

1) *P центрально-симметричен*;
2) *любая гипергрань P центрально-симметрична*;
3) *проекция P вдоль любой его грани коразмерности 2 является параллелограммом или центрально-симметричным шестиугольником.*

Замечание 1.4. Минковский доказывал данную теорему в случае, когда P допускает разбиение пространства $\mathbb{R}^d$ *грань-в-грань*, т.е. когда пересечение любых двух копий P есть грань (возможно пустая) каждой из них. Позднее МакМалленом [3] была доказана необходимость этих трех условий и в случае, когда P допускает и разбиение не грань-в-грань.

Замечание 1.5. В данной теореме, как и всюду далее, когда мы говорим о "проекции вдоль k-мерного подпространства π d-мерного пространства" мы подразумеваем проекцию на любую $(d-k)$-мерную плоскость, трансверсальную π, если это не оговорено отдельно.

Теорема 1.6 (Венков [4]). *Если многогранник P удовлетворяет трем условиям теоремы Минковского, то он является параллелоэдром.*

Определение 1.7. Пусть F – некоторая грань коразмерности 2 данного d-мерного параллелоэдра P. Множество $\mathscr{B}$ всех гиперграней P, параллельных F, называется *поясом* параллелоэдра P, соответствующим F.

Согласно третьему пункту теоремы Минковского (теоремы 1.3) любой пояс параллелоэдра состоит из четырех или шести гиперграней.

Определение 1.8. Назовем *поясным путем* Γ на параллелоэдре P последовательность $F_0, \mathscr{B}_1, F_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_n, F_n$ из гиперграней F_i и поясов $\mathscr{B}_i$; при этом грань F_i содержится в поясах $\mathscr{B}_i$ и $\mathscr{B}_{i+1}$, а пояс $\mathscr{B}_i$ содержит грани F_{i-1} и F_i. Число k будем называть *длиной* данного комбинаторного пути Γ. Будем говорить, что гиперграни F и G параллелоэдра P находятся на *поясном расстоянии* k, если кратчайший поясной путь, их соединяющий, имеет длину k. Поясное расстояние между гранями F и G в P мы будем обозначать $d^P_{\mathscr{B}}(F,G)$.

Определение 1.9. Максимальное расстояние между двумя гипергранями в параллелоэдре P будем называть *поясным диаметром* P.

К настоящему времени доказан ряд частных случаев гипотезы Вороного. В частности, самим Вороным [1] гипотеза 1 доказана в случае, когда параллелоэдр P является примитивным, т.е. в каждой вершине разбиения пространства $\mathbb{R}^d$ на параллельные копии P сходится по $d+1$ копии P. Позднее Житомирский [5] доказал гипотезу Вороного в случае, когда параллелоэдр P является 2-примитивным, т.е. в каждой $(d-2)$-мерной грани разбиения пространства $\mathbb{R}^d$ сходится по 3 копии параллелоэдра P. В 1999 г. Эрдал доказал гипотезу Вороного для параллелоэдров, которые являются зонотопами, то есть проекциями кубов более высоких размерностей [6]. В 2005 г. Ордин доказал гипотезу Вороного в случае 3-неприводимых параллелоэдров [7]. Кроме того, перечислены все комбинаторные типы параллелоэдров в размерности 4 (Делоне [8] и Штогрин [9]), примитивных пятимерных параллелоэдров (Барановский и Рышков [10]) и всех пятимерных параллелоэдров (Энгель [11]).

Результаты Вороного, Житомирского и Ордина получены с помощью метода канонической нормировки, существование которой для разбиения пространства $\mathbb{R}^d$ на копии P эквивалентно гипотезе Вороного для P (см. [1]). *Каноническая нормировка* это такое сопоставление каждой $(d-1)$-мерной грани F разбиения $\mathbb{R}^d$ числа $n(F)$, что для каждой $(d-2)$-мерной грани G разбиения существует такой набор знаков плюс или минус, что

$$\sum_{i=1}^{k} \pm \mathbf{e}_i n(F_i) = \mathbf{0},$$

где $F_i, i = 1, \dots, k$, – это множество всех гиперграней разбиения, сходящихся в G, а $\mathbf{e}_i$ – это единичный вектор нормали к F_i; при этом $k = 3$ или $k = 4$ в зависимости от того пояс из 6 или 4 гиперграней порождает грань G.

В случае, если две гиперграни F и G разбиения имеют общую $(d-2)$-грань пояса из 6 гиперграней, то значение канонической нормировки на одной из граней однозначно определяет значение нормировки на второй гиперграни. Таким образом, относительно небольшой поясной диаметр параллелоэдра P означает, что для доказательства существования канонической нормировки для P достаточно доказывать существование канонической нормировки, которая удовлетворяет необходимому условию на поясных циклах относительно небольшой длины. В дальнейшем мы докажем, что для параллелоэдров, являющихся зонотопами размерности d, поясной диаметр не превосходит $\lceil \log_2(4/5)d \rceil$.

2. Зонотопы и вспомогательные леммы. Большая часть лемм данного раздела может быть найдена в работах [12] и [13].

Определение 2.1. Многогранник $P \subset \mathbb{R}^d$ называется *зонотопом*, если его можно представить в виде проекции куба $C^n \subset \mathbb{R}^n$ некоторой размерности.

Эквивалентно, многогранник P является зонотопом, если его можно представить в виде суммы Минковского конечного набора отрезков $[\mathbf{0}, \mathbf{v}_i]$ при $i = 1, \dots, n$, где $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \in \mathbb{R}^{d \times n}$ это набор из n векторов в $\mathbb{R}^d$. В этом случае P обозначают как $P = Z(V) = Z(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Замечание 2.2. В некоторых случаях, например в книге Циглера [14; Разд. 7.3], *зонотопом* $Z(V) = Z(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ называется сумма Минковского отрезков вида $[-\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i]$, $i = 1, \dots, n$. Данное определение эквивалентно определению 2.1.

Существуют многогранники, являющиеся одновременно и зонотопами, и параллелоэдрами; например, куб произвольной размерности C^d является одновременно и параллелоэдром, и зонотопом. Очевидно, что поясной диаметр куба любой размерности равен 1.

Следующий пример иллюстрирует другой многогранник, принадлежащий к семействам зонотопов и параллелоэдров.

Пример 2.3 (Перестановочный многогранник). *Перестановочным многогранником* Π_d называется выпуклая оболочка всех $(d+1)!$ точек вида $\sigma(1, 2, \dots, d+1)$, где σ – подстановка из группы $\mathscr{S}_{d+1}$. Несмотря на то, что многогранник Π_d лежит в $\mathbb{R}^{d+1}$, он является d-мерным многогранником, так как все его вершины лежат в d-мерной плоскости $x_1 + \dots + x_{d+1} = 1 + \dots + (d+1)$.

Перестановочный многогранник Π_d – зонотоп, его можно представить в виде суммы Минковского $d(d+1)/2$ отрезков, задающихся векторами вида $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant d+1$, где $\mathbf{e}_k$ – это k-й вектор стандартного базиса $\mathbb{R}^{d+1}$. Кроме того, Π_d является параллелоэдром и даже, более того, многогранником Дирихле–Вороного для решетки, порожденной векторами вида $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\cdots+\mathbf{e}_{d+1}-(d+1)\mathbf{e}_k$ [15]. Используя комбинаторное описание для всех граней перестановочного многогранника из [14], [15], несложно получить, что поясной диаметр Π_d равен 2.

Пример 2.4. Рассмотрим более подробно двумерные и трехмерные параллелоэдры. На плоскости существует два комбинаторных типа параллелоэдров – параллелограмм и центрально-симметричный шестиугольник. В обоих случаях все $(d-2)$-мерные грани (вершины) лежат в одном поясе, т.е. поясной диаметр двумерного параллелоэдра равен 1.

В трехмерном случае существует пять комбинаторно различных параллелоэдров, полученных Федоровым [16]: куб, центрально-симметричная шестиугольная призма, ромбододекаэдр, удлиненный додекаэдр и усеченный кубооктаэдр. Поясной диаметр куба и шестиугольной призмы равен 1, а поясной диаметр остальных трехмерных параллелоэдров равен 2.

В двумерном и трехмерном случаях любой параллелоэдр является зонотопом, однако, это неверно уже в случае размерности, равной 4. Примером четырехмерного параллелоэдра, который не является зонотопом, может служить правильный 24-гранник [17; Табл. II].

Определение 2.5. Гиперплоскость $\pi \subseteq \mathbb{R}^d$ называется *опорной плоскостью* для многогранника $P \subseteq \mathbb{R}^d$, если P содержится в одном из замкнутых полупространств, определяемых плоскостью π, и пересечение $\pi \cap P$ непусто. При этом пересечение $\pi \cap P$ называется *гранью* P. Мы будем обозначать грань P, соответствующую гиперплоскости π, через F_π^P.

Лемма 2.6. *Пусть π – опорная плоскость зонотопа $Z(V)$. Пусть V_π обозначает множество всех векторов множества V, которые параллельны π. В этом случае многогранники $Z(V_\pi)$ и $F_\pi^{Z(V)}$ отличаются друг от друга параллельным переносом.*

Замечание 2.7. При этом в качестве зонотопа с пустым множеством векторов мы будем рассматривать точку (начало координат).

Доказательство. Пусть $Z(V) = Z(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ является проекцией куба $C^n \subset \mathbb{R}^n$ на пространство $\mathbb{R}^d$ вдоль $(n-d)$-мерного пространства ψ. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ гиперплоскость $\pi \times \psi$; она является опорной гиперплоскостью для куба C^n, а значит определяет его грань F. Грань F является кубом некоторой размерности, который порождается сторонами куба C^n, проецируемыми в векторы множества V, параллельные плоскости π. Следовательно, вся грань F проецируется в параллельную копию зонотопа $Z(V_\pi)$ и в тоже время в грань $F_\pi^{Z(V)}$.

Следствие 2.8. *Пусть V – множество векторов в $\mathbb{R}^d$ и U такое собственное подмножество V, что $(\operatorname{lin} U) \cap V = U$, где $\operatorname{lin} U$ обозначает линейную оболочку векторов из U. Тогда U задает грань (а точнее несколько параллельных граней) зонотопа $Z(V)$, причем эта грань является трансляцией зонотопа $Z(U)$ и имеет размерность* $\dim \operatorname{lin} U$.

Доказательство. Для этого достаточно рассмотреть любую опорную гиперплоскость π, параллельную всем векторам из U и не параллельную ни одному вектору из $V \setminus U$, а затем применить к этой гиперплоскости лемму 2.6.

Определение 2.9. Пусть V – некоторое конечное множество векторов. Будем называть его подмножество $U \subseteq V$ *k-мерным*, если размерность линейной оболочки $\operatorname{lin} U$ равна k.

Лемма 2.10. *Зонотоп $Z(V)$ размерности d является параллелоэдром в том и только том случае, когда для любого $(d-2)$-мерного множества векторов $U \subseteq V$ проекции векторов V вдоль подпростраства $\operatorname{lin} U$ дают векторы не более чем трех направлений.*

Доказательство. По следствию 2.8 все $(d-2)$-мерные грани зонотопа $Z(V)$ определяются всеми $(d-2)$-мерными подмножествами U множества V, а проекция $Z(V)$ вдоль $(d-2)$-грани, определяемой подмножеством U, это в точности зонотоп, построенный по проекциям векторов из V вдоль U (при этом векторы из U очевидно проецируются в нулевой вектор и не изменяют суммы Минковского остальных векторов).

Осталось применить теоремы Минковского 1.3 и Венкова 1.6 к зонотопу $Z(V)$ и заметить, что двумерный зонотоп $Z(K)$ является параллелограммом или центрально-симметричным шестиугольником в том и только том случае, когда в K содержатся векторы не более чем трех направлений.

Лемма 2.11. *Пусть зонотоп $Z(V \cup \{\mathbf{u}\}) = Z(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}) \subseteq R^d$ является d-мерным параллелоэдром и зонотоп $Z(V) = Z(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ имеет размерность d. Тогда $Z(V)$ является d-мерным параллелоэдром.*

Доказательство. Пусть K любое $(d-2)$-мерное подмножество векторов множества V; оно также является $(d-2)$-мерным подмножеством множества $V \cup \{\mathbf{u}\}$. По лемме 2.10 векторы из $V \cup \{\mathbf{u}\}$ проецируются вдоль K в векторы не более чем 3 направлений; следовательно, тоже самое верно и для множества V. Условия леммы 2.10 выполнены и данная лемма доказана.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2.12 (Магазинов [18]). *Если $Z(V) = Z(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n)$ является параллелоэдром, то и зонотоп $Z(V') = Z(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \alpha\mathbf{v}_n)$ также является параллелоэдром для произвольного $\alpha \neq 0$.*

Следующие лемма и следствия получены в работе Венкова [19] для более общего случая параллелоэдров.

Лемма 2.13. *Пусть $Z(V)$ – зонотоп, являющийся параллелоэдром, и e – некоторое его ребро. Тогда проекция $Z(V)$ вдоль ребра e также является параллелоэдром.*

Доказательство. По следствию 2.8 существует вектор $\mathbf{v}_i \in V$, который является параллельным переносом ребра e. Пусть U – множество проекций векторов из V вдоль $\mathbf{v}_i$. Тогда проекция $Z(V)$ вдоль e это зонотоп $Z(U)$. Пусть K некоторое $(d-3)$-мерное подмножество U, задающее грань $Z(K)$ зонотопа $Z(U)$. Пусть K_V это подмножество векторов из V, которые проецируются в векторы из $K \cup \{\mathbf{0}\}$.

Покажем, что $\dim K_V = d-2$. При проекции вдоль $\mathbf{v}_i \in K_V$ оно проецируется в $(d-3)$-мерное множество K и при этом его размерность уменьшается на 1. Более того, выполнено равенство $\operatorname{lin} K_V = \operatorname{lin} K \oplus \operatorname{lin}\{\mathbf{v}_i\}$, а значит проецирование вдоль K_V является композицией проецирований вдоль K и вдоль $\mathbf{v}_i$. Значит множество K_V задает некоторую $(d-2)$-грань $Z(K_V)$ параллелоэдра $Z(V)$.

Таким образом, множество проекций векторов множества U вдоль K совпадает с множеством проекций векторов множества V вдоль K_V, так как U это в точности множество проекций векторов из V вдоль $\mathbf{v}_i$. А значит проекциями векторов из U вдоль K являются векторы не более чем трех направлений; следовательно, зонотоп $Z(U)$ удовлетворяет условиям леммы 2.10 и является параллелоэдром.

Следствие 2.14. *Проекция зонотопа $Z(V)$, являющегося параллелоэдром, вдоль любой его грани является параллелоэдром.*

В случае, если из множества V, определяющего зонотоп $Z(V)$, убрать один из векторов $\mathbf{v}$ и при этом размерность V множества уменьшится, соответствующий зонотоп $Z(V \setminus \{\mathbf{v}\})$ является проекцией $Z(V)$ вдоль ребра $\mathbf{v}$, а сам зонотоп $Z(V)$ является призмой с основанием $Z(V \setminus \{\mathbf{v}\})$ и образующей $\mathbf{v}$. Таким образом, из лемм 2.11 и 2.13 получаем следующее.

Следствие 2.15. *Если зонотоп $Z(V)$ является параллелоэдром и $U \subseteq V$, то зонотоп $Z(U)$ также является параллелоэдром.*

Лемма 2.16. *Пусть зонотоп $Z(U)$ является проекцией $Z(V)$ вдоль некоторой грани $Z(W)$, где W является подмножеством V. Тогда для любой грани F_U коразмерности k зонотопа $Z(U)$ существует и единственна грань F_V коразмерности k зонотопа $Z(V)$, проекция которой вдоль $Z(W)$ совпадает с F_U. Более того, если грань G_U инцидентна грани F_U, то грань G_V также будет инцидентна грани F_V.*

Доказательство. Грань F_U является зонотопом $Z(U_1)$ для некоторого подмножества $U_1 \subseteq U$. Рассмотрим опорную плоскость π, которая соответствует грани F_U зонотопа $Z(U)$. Плоскости π соответствует опорная гиперплоскость π' зонотопа $Z(V)$, которая порождена плоскостью π и векторами из W. Плоскости π' параллельны те и только те векторы V, которые либо содержатся в W, либо проецируются в векторы множества U_1. Грань, которая задается в $Z(V)$ гиперплоскостью π', является гранью коразмерности k и проецируется в $Z(U_1) = F_U$; необходимая грань F_V построена. Единственность F_V также следует из построения.

Сохранение инцидентности при таком построении граней F_V и G_V также очевидно, так как грани $F_U = Z(U_1)$ и $G_U = Z(U_2)$ инцидентны, если и только если одно из множеств U_1 и U_2 подмножество другого.

Следствие 2.17. *Пусть зонотоп $Z(U)$ является проекцией зонотопа $Z(V)$ вдоль некоторой грани $Z(W)$. Тогда любому поясному пути Γ_U в зонотопе $Z(U)$ соответствует поясной путь Γ_V той же длины в $Z(V)$, причем если поясной путь Γ_U соединяет гиперграни F_U и G_U, то Γ_V соединяет F_V и G_V.*

3. Симметрические зонотопы.

Определение 3.1. Пусть $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{d-1}\}$ и $F = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{d-1}\}$ два набора векторов в $\mathbb{R}^d$. Будем называть наборы E и F *сопряженными*, если для любого $1 \leqslant$

$i \leqslant d-1$ выполнено равенство $\dim(E \cup \{\mathbf{f}_i\}) = \dim(F \cup \{\mathbf{e}_i\}) = d$. Соответствующий зонотоп $Z(E \cup F)$ будем называть *симметрическим*.

Теорема 3.2. *Пусть E и F два таких сопряженных набора векторов в $\mathbb{R}^d$, $d > 2$, что зонотоп $Z(E \cup F)$ является параллелоэдром. Тогда существует такой зонотоп $Z(V)$, комбинаторно эквивалентный $Z(E \cup F)$ и также являющийся параллелоэдром, у которого матрица V, составленная из столбцов координат векторов, входящих в V, имеет следующий вид*:

$$V = \left(\begin{array}{c|c} E_{d-1} & A \\ \hline 0\dots0 & 1\dots1 \end{array}\right),$$

где E_{d-1} – это единичная матрица размера $(d-1)\times(d-1)$, а A это некоторая $0/1$*-матрица размера $(d-1)\times(d-1)$, т.е. матрица, элементами которой являются* 0 *или* 1; *более того, можно считать, что в каждой строке матрицы A нулей не меньше чем единиц.*

Доказательство. Отметим, что следующие преобразования системы векторов не меняют комбинаторного типа зонотопа, а также его свойства быть или не быть параллелоэдром:

- невырожденное аффинное преобразование системы векторов;
- рассмотрение системы векторов в другом базисе (на самом деле это преобразование даже не меняет саму систему векторов);
- домножение одного из векторов на ненулевую константу.

Первые два преобразования, очевидно, удовлетворяют указанному свойству. А третье преобразование удовлетворяет второй части в силу леммы 2.12, а первой части в силу следствия 2.8, так как домножение одного из векторов на ненулевую константу не влияет на линейную оболочку множества векторов. Также очевидно, что в результате описанных преобразований множества векторов E и F остаются сопряженными.

Проделаем с множеством $E \cup F$ несколько преобразований указанного вида; при этом векторы, получающиеся в результате таких преобразований, мы также будем обозначать $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d-1}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{d-1}$. Рассмотрим базис $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_d$, в котором первые $d-1$ векторов являются векторами множества E. При этом последняя координата любого вектора $\mathbf{f}_i$ будет ненулевой, так как множество векторов $E \cup \{\mathbf{f}_i\}$ имеет размерность d. Домножим каждый вектор $\mathbf{f}_i$ на такое α_i, что последняя координата у нового вектора $\mathbf{f}_i$ будет равна 1.

Применим лемму 2.10 к зонотопу $Z(E \cup F)$, который является параллелоэдром, и его $(d-2)$-грани, порожденной векторами $E \setminus \{\mathbf{e}_i\}$ для каждого $i = 1, \dots, d-1$; при этом мы будем рассматривать проекцию на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{g}_d$. Ни один из векторов $\mathbf{f}_j$ не может спроецироваться в вектор направления вектора $\mathbf{e}_i$, так как тогда $\dim E \cup \{\mathbf{f}_j\} = d-1$, что противоречит сопряженности множеств E и F. Следовательно, векторы F проецируются в векторы одного или двух направлений, причем вектор $\mathbf{f}_j$ проецируется в вектор $c_j\mathbf{e}_i + \mathbf{g}_d$, где c_j это i-я координата вектора $\mathbf{f}_j$. Два вектора проекций $\mathbf{f}_j$ и $\mathbf{f}_k$ коллинеарны, если и только если $c_j = c_k$; следовательно, среди чисел c_j не более двух различных. Ровно одного значения быть не может, так как в этом случае все векторы F лежат в гиперплоскости $c_jx_d = x_i$ и в этой же плоскости лежат все векторы E кроме $\mathbf{e}_i$, что невозможно при $d > 2$. Обозначим пару значений, соответствующих i-й координате, как a_i и b_i, причем $a_i < b_i$.

Умножим каждый вектор $\mathbf{e}_i$ на $b_i - a_i$. Рассмотрим наши векторы $E \cup F$ в новом базисе $\mathbf{g}'_i = (b_i - a_i)\mathbf{g}_i$ при $1 \leqslant i \leqslant d-1$ и $\mathbf{g}'_d = \mathbf{g}_d + a_1\mathbf{g}_1 + \cdots + a_{d-1}\mathbf{g}_{d-1}$. В этом базисе новые векторы E являются первыми $d-1$ базисными векторами, а каждый вектор множества F имеет координаты 0 или 1, так как он представляется в виде суммы вектора $\mathbf{g}'_d$ с некоторыми векторами вида $\mathbf{g}'_i$. Следовательно, в базисе $\mathbf{g}'_1, \ldots, \mathbf{g}'_d$ множество $E \cup F$ представимо в виде

$$E \cup F = \left(\begin{array}{c|c} E_{d-1} & A' \\ \hline 0\ldots 0 & 1\ldots 1 \end{array}\right)$$

для некоторой 0/1-матрицы A'. Пусть в i-й строке матрицы A нулей меньше чем единиц. Тогда домножим вектор $\mathbf{e}_i$ на -1, заменим вектор базиса $\mathbf{g}'_i$ на $\mathbf{g}''_i = -\mathbf{g}'_i$, а также вектор $\mathbf{g}'_d$ на $\mathbf{g}''_d = \mathbf{g}'_d + \mathbf{g}'_i$. Сделав так для каждого i, мы получим требуемый вид множества $E \cup F$.

4. Основные результаты.

Теорема 4.1. *Пусть P и Q две гиперграни d-мерного зонотопа $Z(V)$. Существует такой симметрический зонотоп $Z(E \cup F)$ размерности не более чем d, что поясное расстояние между гранями P и Q в $Z(V)$ не больше поясного расстояния между гранями, задаваемыми сопряженными множествами E и F в $Z(E \cup F)$.*

Доказательство. Докажем утверждение теоремы по индукции. База при $d = 2$ очевидна, так как единственным двумерным симметрическим зонотопом является параллелограмм. Предположим, что утверждение теоремы доказано для всех размерностей, меньших d.

В случае, если существует такой вектор $\mathbf{v} \in V$, что у P и у Q есть по ребру, параллельному $\mathbf{v}$, спроецируем $Z(V)$ вдоль ребра $\mathbf{v}$. Пусть P' и Q' – гиперграни проекции $Z(V')$, соответствующие P и Q. По следствию 2.17 выполнено неравенство $d_{\mathscr{B}}^{Z(V)}(P,Q) \leqslant d_{\mathscr{B}}^{Z(V')}(P',Q')$. В этом случае достаточно применить индукционное предположение к зонотопу $Z(V')$, который по лемме 2.13 является параллелоэдром, и граням P' и Q'.

Теперь рассмотрим случай, когда у P и Q нет параллельных ребер. Гипергрань P является $(d-1)$-мерным зонотопом, а значит $P = Z(U)$ для некоторого $(d-1)$-мерного множества векторов $U \subset V$. Выберем в U произвольный базис E, состоящий из векторов множества V. Аналогично построим $(d-1)$-мерное линейно независимое множество $F \subset V$, соответствующее гиперграни Q. Множества E и F сопряжены; для этого достаточно показать, что произвольный вектор $\mathbf{f}_i \in F$ линейно независим с векторами множества E. В случае, если это не так, вектор $\mathbf{f}_i$ параллелен гиперплоскостям обеих граней P и Q, а такой случай уже разобран ранее.

Докажем, что зонотоп $Z(E \cup F)$ является требуемым в условии теоремы. Для этого для каждого поясного пути Γ, соединяющего грани $Z(E)$ и $Z(F)$ в $Z(E \cup F)$, построим поясной путь такой же длины, соединяющий грани P и Q в $Z(V)$. Пусть Γ содержит гиперграни $Z(E) = Z(U_0)$, $Z(U_1)$, $\ldots$, $Z(U_n) = Z(F)$, где $U_i \subset E \cup F$ и при этом $\dim(U_i \cap U_{i+1}) = d-2$. Пусть $V_i = V \cap \operatorname{lin}(U_i)$; рассмотрим гиперграни $Z(V_i)$ зонотопа $Z(V)$ (это будут действительно гиперграни в силу следствия 2.8).

Очевидно, что $Z(V_0) = P$ и $Z(V_n) = Q$; кроме того, грани $Z(V_i)$ и $Z(V_{i+1})$ имеют общую $(d-2)$-мерную грань, так как пересечение множеств V_i и V_{i+1} в точности $(d-2)$-мерно. Следовательно, искомый поясной путь на $Z(V)$ построен и теорема доказана.

Обозначение 4.2. Пусть $\xi(d)$ обозначает максимальный поясной диаметр d-мерного симметрического зонотопа, являющегося параллелоэдром.

Следствие 4.3. *Поясной диаметр любого d-мерного зонотопа, являющегося параллелоэдром, не превосходит* $\max_{1\leqslant i\leqslant d}\xi(i)$.

Следствие 4.4. *Для нахождения d-мерного зонотопа, являющегося параллелоэдром, с максимальным диаметром достаточно исследовать все симметрические зонотопы, также являющиеся параллелоэдрами, размерности не большей, чем d. Более того, достаточно исследовать только такие сопряженные множества E и F, которые удовлетворяют утверждению теоремы 3.2, т.е. множество векторов $E\cup F$, координаты которого записаны в виде матрицы $d\times(2d-2)$, имеет вид*

$$E\cup F = \left(\begin{array}{c|c} E_{d-1} & A \\ \hline 0\ldots 0 & 1\ldots 1 \end{array}\right)$$

для некоторой $0/1$-матрицы A, у которой в каждой строке нулей не меньше, чем единиц.

Теорема 4.5. *Поясной диаметр любого d-мерного параллелоэдра P, являющегося зонотопом, не превосходит* $\lceil\log_2 d\rceil$.

Доказательство. Будем доказывать утверждение данной теоремы по индукции, при этом база $d=1$ и $d=2$ очевидна. Пусть мы доказали, что поясной диаметр k-мерного параллелоэдра, являющегося зонотопом, при $k<d$ не превосходит $\lceil\log_2 k\rceil$. Докажем это для d-мерных параллелоэдров ($d\geqslant 3$), являющихся зонотопами. Согласно теореме 4.1 достаточно доказать, что в любом d-мерном симметрическом зонотопе $Z(E\cup F)$ поясное расстояние между гипергранями P_E и P_F, соответствующими множествам E и F соответственно, не превосходит $\lceil\log_2 d\rceil$.

Применим к зонотопу $Z(E\cup F)$ теорему 3.2. Рассмотрим грань $Z(E\cup F)$, соответствующую опорной гиперплоскости π, параллельной $x_{d-1}=0$. В этой грани лежат векторы $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{d-2}$, а также не меньше половины (т.е. $\lceil(d-1)/2\rceil$) векторов из F, так как в $(d-1)$-й строке соответствующей $0/1$-матрицы A не менее половины нулей. Значит π задает грань P_π, размерность которой равна $d-1$. Также P_π является соседней с гипергранью P_E по грани коразмерности 2, задаваемой векторами множества $E\setminus\{\mathbf{e}_{d-1}\}$. Кроме того, грань P_π имеет не менее $\lceil(d-1)/2\rceil$ общих векторов с гранью P_F; обозначим множество общих векторов через F_π.

Спроецируем зонотоп $Z(E\cup F)$ вдоль грани, задаваемой F_π. Получаемый зонотоп является параллелоэдром и размерности не более чем

$$d-\left\lceil\frac{d-1}{2}\right\rceil = \left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil.$$

Поясной диаметр проекции согласно предположению индукции не превосходит

$$\left\lceil \log_2 \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil \right\rceil = \lceil \log_2 d \rceil - 1.$$

Поясное расстояние между гранями P_F и P_π в $Z(E \cup F)$ в силу следствия 2.17 не превосходит поясного диаметра данной проекции, а значит поясное расстояние между гранями P_E и P_F в $Z(E \cup F)$ не превосходит $1 + (\lceil \log_2 d \rceil - 1)$.

Теорема 4.6. *Поясной диаметр пятимерного параллелоэдра P, являющегося зонотопом, не превосходит* 2.

Доказательство. Достаточно рассматривать только симметрические зонотопы, являющиеся параллелоэдрами, размерности не более чем 5. Все зонотопы, являющиеся параллелоэдрами, размерности 4 или менее по теореме 4.5 имеют поясной диаметр не более 2, а значит, в силу следствия 4.3 и теоремы 3.2 нам достаточно показать, что поясной диаметр симметрического пятимерного параллелолэдра $Z(E \cup F)$, приведенного к виду из теоремы 3.2, равен двум (единице он равен быть не может, так как гиперграни P_E и P_F не являются смежными по грани коразмерности 2).

Если в соответствующей (4×4)-матрице A есть i-я строка, в которой ровно три нуля, то гиперплоскость $x_i = 0$ задает гипергрань $Z(E \cup F)$, смежную по трехмерным граням с гранями P_E и P_F, так как гиперплоскость $x_i = 0$ содержит по три вектора из множеств E и F.

Осталось рассмотреть случай, когда в каждой строке матрицы A содержится ровно по два нуля и ровно по две единицы, так как более двух единиц ни в какой строке быть не может в силу теоремы 3.2. Тогда каждая строка матрицы A задает разбиение множества из 4 элементов на два двухэлементых подмножества. Так как строк всего четыре, в какой-то паре строк, скажем i и j, эти разбиения совпадают. Если строки i и j матрицы A совпадают, то все векторы из F лежат в плоскости $x_i = x_j$ и в ней же лежат два вектора (кроме $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$) множества E. Если i-я и j-я строки матрицы не совпадают (т.е. они получаются друг из друга заменой нуля на единицу и наоборот), то все векторы из F лежат в гиперплоскости $x_i + x_j = x_5$ и снова в этой плоскости лежат два вектора из E. В любом случае такая пара множеств E и F не является сопряженной, а значит данный случай невозможен и теорема доказана.

Следствие 4.7. *Поясной диаметр d-мерного зонотопа, являющегося параллелоэдром, не превосходит* $\lceil \log_2 (4/5)d \rceil$.

Доказательство. Достаточно использовать в качестве базы индукции результаты теоремы 4.5 при $d \leqslant 4$ и теоремы 4.6 при $d = 5$, а для доказательства перехода индукции те же рассуждения, что и в переходе индукции в теореме 4.5.

Замечание 4.8. Теорема 4.5 в пятимерном случае дает оценку 3 и является неточной.

Теорема 4.9. *В шестимерном пространстве существует зонотоп, являющийся параллелоэдром, поясной диаметр которого равен* 3, *т.е. в этом случае оценка теоремы* 4.5 *и следствия* 4.7 *является точной.*

Доказательство. Рассмотрим симметрический зонотоп $Z = Z(E \cup F) \subset \mathbb{R}^6$, задаваемый множеством векторов

$$V = E \cup F = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

где первые пять столбцов матрицы V отвечают векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_5$, а последние – векторам $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_4$, $\mathbf{f}_5$ соответственно. Далее мы покажем, что $Z(V)$ имеет поясной диаметр более двух и является параллелоэдром.

Предположим, что поясной диаметр зонотопа Z равен 2. Тогда существует его гипергрань P, смежная по граням коразмерности 2 с гранями P_E и P_F, задаваемыми E и F соответственно. Тогда P параллельны не менее четырех векторов из E и из F, что невозможно, так как для этого у каких-то четырех векторов из F должны совпадать i-е координаты для некоторого $i < 6$. Таким образом, поясной диаметр зонотопа Z не менее 3. Больше трех он быть не может в силу теоремы 4.5.

Теперь докажем, что Z является параллелоэдром. Для этого мы проверим справедливость утверждения леммы 2.10 для каждого четырехмерного подмножества векторов множества $E \cup F$. Обозначим шестой вектор базиса, в котором изначально даны множества E и F, как $\mathbf{g}$. Отметим, что при циклической перестановке первых пяти векторов изначального базиса также циклически переставляются векторы E и F. Также любой автоморфизм левого пятиугольника на следующем рисунке индуцирует аналогичный автоморфизм правого пятиугольника (повороту соответствует поворот на такой же угол, а симметрии соответствует симметрия относительно параллельной прямой), которые вместе задают перестановку векторов в множества $E \cup F$, сохраняющую вид многогранника Z.

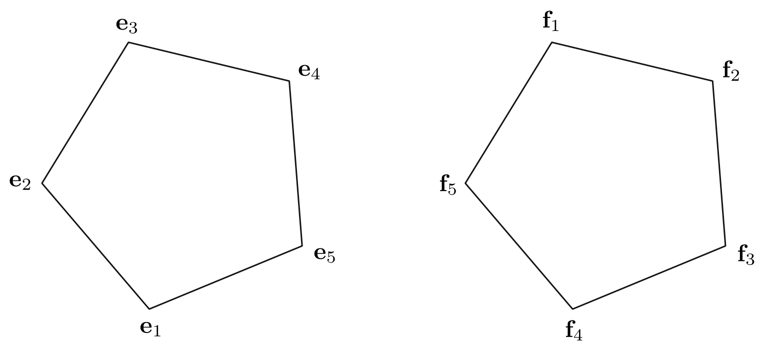

Рис. 1. Пятиугольники, соответствующие E и F.

Векторы множества E записываются в базисе $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_4$, $\mathbf{f}_5$, $\mathbf{g}$ в виде

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i+1} + \mathbf{f}_{i+3} - \mathbf{f}_{i+1} - \mathbf{f}_{i+4}) - \frac{1}{2}\mathbf{g},$$

значит после замены вектора $\mathbf{g}$ на $(1/2)(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2+\mathbf{f}_3+\mathbf{f}_4+\mathbf{f}_5-\mathbf{g})$ и векторов $\mathbf{f}_i$ на $-\mathbf{f}_{3i}$, $\mathbf{e}_j$ на $\mathbf{e}_{3j+3}$ мы получим новый базис $F\cup\{\mathbf{g}\}$, в котором множество $F\cup E$ имеет такой же вид как $E\cup F$ в начальном базисе. При этом для векторов из E и F мы рассматриваем индексы по модулю 5. Мы построили отображение левого пятиугольника на правый и правого на левый, которое при подходящей замене базиса не изменяют зонотопа Z. Построенное отображение дает нам возможность рассматривать только те четырехмерные подмножества $E\cup F$, которые содержат не менее половины векторов из E. Кроме того, если векторов из E и из F поровну, то можно рассматривать только такие пары, в которых векторы из E являются соседними в левом пятиугольнике либо векторы из E, не соседние в левом пятиугольнике, а векторы из F, соседние в правом, так как при нашем отображении соседние векторы из правого пятиугольника отображаются в не соседние в левом.

Пусть G обозначает рассматриваемое четырехмерное подмножество $E\cup F$, при этом в G векторов из E не менее половины. Нам необходимо рассмотреть следующие случаи.

(i) В множестве G четыре вектора из множества E, при этом можно считать (благодаря первому замечанию об автоморфизмах пятиугольников), что это векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$.

Спроецируем остальные векторы множества $E\cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_5$ и $\mathbf{g}$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_5+\mathbf{g}$, $\mathbf{g}$, что и требуется.

(ii) В множестве G три вектора из E, причем эти три вектора расположены подряд на левом пятиугольнике. Можно считать, что из множества E в G находятся векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. Для четвертого вектора из множества G возможен один из следующих вариантов.

(a) Это вектор $\mathbf{f}_1$ (или аналогично вектор $\mathbf{f}_4$, так как на правом пятиугольнике они симметричны относительно прямой симметрии множества векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ на левом пятиугольнике).

Спроецируем остальные векторы $E\cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_4$ и $\mathbf{e}_5$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_4-\mathbf{e}_5$.

(b) В множестве G содержится вектор $\mathbf{f}_2$ (или аналогично вектор $\mathbf{f}_3$).

Спроецируем остальные векторы $E\cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_4$ и $\mathbf{e}_5$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_5$.

(c) В множестве G содержится вектор $\mathbf{f}_5$.

Спроецируем остальные векторы $E\cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_4$ и $\mathbf{e}_5$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_5$, $-\mathbf{e}_4-\mathbf{e}_5$.

(iii) В множестве G три вектора из E, причем они расположены не подряд на левом пятиугольнике. Можно считать, что $E\cap G=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_4\}$. Для четвертого вектора из G возможен один из следующих вариантов.

(a) В множестве G содержится вектор $\mathbf{f}_1$ (или аналогично вектор $\mathbf{f}_3$).

Спроецируем остальные векторы $E\cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_5$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_5$.

(b) В множестве G содержится вектор $\mathbf{f}_2$.

Спроецируем остальные векторы $E\cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_5$. Получатся векторы двух направлений: $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_5$.

(c) В множестве G содержится вектор $\mathbf{f}_4$ (или аналогично $\mathbf{f}_5$).

Тогда вектор $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_4 - \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_2$ также содержится в нашей четырехмерной грани, а случай с векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{f}_3$ уже разобран в пункте (iii)(a).

(iv) В множестве G по два вектора из E и из F причем векторы из E расположены подряд на левом пятиугольнике. Можно считать, что на левом пятиугольнике векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ лежат в G. Возможен один из следующих случаев для векторов из F, содержащихся в G:

(a) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ (или аналогично $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_3$).

Тогда вектор $\mathbf{e}_5 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{e}_2$ также содержится в нашей четырехмерной грани, а случай с векторами $(\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ уже рассмотрен в пункте (ii).

(b) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_3$.

Спроецируем остальные векторы $E \cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_4$. Получатся векторы двух направлений: $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$.

(c) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_4$ (или аналогично $\mathbf{f}_3$ и $\mathbf{f}_5$).

Спроецируем остальные векторы $E \cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_4$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$.

(d) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_5$ (или аналогично $\mathbf{f}_3$ и $\mathbf{f}_4$).

В этом случае в данной четырехмерной грани также находится вектор $\mathbf{e}_4 = \mathbf{f}_5 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{e}_1$ и данный случай уже разобран в пункте (iii).

(e) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_4$ (или аналогично $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_5$).

Спроецируем остальные векторы $E \cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_5$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_3$.

(f) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_4$ и $\mathbf{f}_5$.

Спроецируем остальные векторы $E \cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_4$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$, $-\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$.

(v) В множестве G по два вектора из E и из F, причем векторы из E расположены не подряд на левом пятиугольнике. В этом случае можно считать, что векторы из F расположены подряд на правом пятиугольнике. Также можно считать, что в множестве G содержатся векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_3$. Для векторов из $F \cap G$ возможны следующие случаи.

(a) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ (или аналогично $\mathbf{f}_3$ и $\mathbf{f}_4$).

Тогда рассматриваемая четырехмерная грань также содержит вектор $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, т.е. содержит три вектора из множества F, а данный случай уже был разобран в пунктах (ii) и (iii).

(b) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_3$. Тогда в множестве G должен содержаться еще хотя бы один вектор из $E \cup F$, так как четыре вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ линейно-зависимы ($\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$). В G будет три вектора из E или три вектора из F, а это случай был рассмотрен ранее.

(c) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_4$ и $\mathbf{f}_5$ (или аналогично $\mathbf{f}_5$ и $\mathbf{f}_1$).

Тогда рассматриваемая четырехмерная грань также содержит вектор $\mathbf{e}_5 = \mathbf{f}_5 - \mathbf{f}_4 + \mathbf{e}_3$, а данный случай уже был разобран в пункте (iii).

Все возможные случаи разобраны и данная теорема доказана.

Автор благодарит Николая Долбилина за обсуждение и постановку задачи. Также автор хотел бы поблагодарить Андрея Гаврилюка и Александра Магазинова за обсуждение и полезные ссылки и замечания. Автор выражает благодарность центру им. Бернулли (Centre Interfacultaire Bernoulli), в котором данная работа была завершена.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] G. Voronoï, "Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire. Recherches sur les paralléloèdres primitifs", *J. für Math.*, **136** (1909), 67–178.

[2] H. Minkowski, "Allgemeine Lehrsätze über die convexen Polyeder", *Gött. Nachr.*, 1897, 198–219.

[3] P. McMullen, "Convex bodies which tile space by translation", *Mathematika*, **27**:1 (1980), 113–121.

[4] Б. А. Венков, "Об одном классе эвклидовых многогранников", *Вест. Ленинградск. ун-та. Сер. матем., физ., хим.*, **9**:2 (1954), 11–31.

[5] O.K. Zhitomirskii, "Verschärfung eines Satzes von Voronoi", *Ж. Ленинградского. матем. об-ва*, **2** (1929), 131–151.

[6] R. M. Erdahl, "Zonotopes, dicings, and Voronoi's conjecture on parallelohedra", *European J. Combin.*, **20**:6 (1999), 527–549.

[7] A. Ordine, *Proof of the Voronoi Conjecture on Parallelotopes in a New Special Case*, Ph.D. Thesis, Queen's University, Ontario, 2005.

[8] B. Delaunay, "Sur la partition régulière de l'espace à 4 dimensions. Première partie", *Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук*, 1929, № 1, 79–110; "Sur la partition régulière de l'espace à 4 dimensions. Deuxième partie", *Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук*, 1929, № 2, 147–164.

[9] М. И. Штогрин, "Правильные разбиения Дирихле–Вороного для второй триклинной группы", Тр. МИАН СССР, **123**, 1973, 3–128.

[10] С. С. Рышков, Е. П. Барановский, "C-типы n-мерных решеток и пятимерные примитивные параллелоэдры (с приложением к теории покрытий)", Тр. МИАН СССР, **137**, 1976, 3–131.

[11] P. Engel, "The contraction types of parallelohedra in $\mathbb{E}^5$", *Acta Cryst. Sect. A*, **56**:5 (2000), 491–496.

[12] G. C. Shephard, "Space-filling zonotopes", *Mathematika*, **21** (1974), 261–269.

[13] P. McMullen, "Space tiling zonotopes", *Mathematika*, **22**:2 (1975), 202–211.

[14] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Grad. Texts in Math., **152**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[15] А. П. Поярков, А. И. Гарбер, "О перестановочных многогранниках", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2006, № 2, 3–8.

[16] Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах*, Тип. Императорской АН, Санкт-Петербург, 1885.

[17] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover Publ., New York, 1973.

[18] А. Н. Магазинов, Личная беседа, 2010.

[19] Б. А. Венков, "О проектировании параллелоэдров", *Матем. сб.*, **49(91)**:2 (1959), 207–224.

А. И. Гарбер
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: alexeygarber@gmail.com

Поступило
16.12.2010
Исправленный вариант
12.02.2011