Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Гарбер, Поясное расстояние между гипергранями зонотопов, являющихся параллелоэдрами, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 3, 381–394

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9059>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:33:42

Поясное расстояние между гипергранями зонотопов, являющихся параллелоэдрами

А. И. Гарбер

Каждому d -мерному многограннику P с центрально-симметричными гипергранями можно сопоставить такую “карту метро”, что каждая линия этого “метро” содержит в точности гипергрань, параллельные какой-то из граней P коразмерности 2. Поясной диаметр P – это максимальное количество линий данного “метро”, которое нужно использовать, чтобы доехать от одной из гиперграней до другой. В данной работе доказано, что поясной диаметр d -мерного зонотопа, являющегося параллелоэдром, не превосходит $\lceil \log_2(4/5)d \rceil$.

Библиография: 19 названий.

1. Параллелоэдры и гипотеза Вороного.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Многогранник $P \subset \mathbb{R}^d$ размерности d называется d -мерным параллелоэдром, если пространство $\mathbb{R}^d$ можно разбить на параллельные копии P , не пересекающиеся по внутренним точкам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Областью или многогранником Дирихле–Вороного для d -мерной решетки Λ^d в $\mathbb{R}^d$ называется многогранник, состоящий из всех точек пространства $\mathbb{R}^d$, которые находятся не дальше от некоторой точки $O \in \Lambda^d$, чем от остальных точек решетки Λ^d . То есть,

$$DV_{\Lambda^d} := \{X \in \mathbb{R}^d: \text{ для всех } Y \in \Lambda^d \text{ выполнено } XO \leq XY, \text{ где } O \in \Lambda^d\}.$$

Для различных точек решетки Λ области Дирихле–Вороного отличаются только параллельным переносом и не пересекаются по внутренним точкам. Значит многогранник Дирихле–Вороного произвольной решетки является параллелоэдром. Одной из основных гипотез в теории параллелоэдров является гипотеза Вороного, которая утверждает обратное.

ГИПОТЕЗА 1 (Вороной [1]). Любой d -мерный параллелоэдр есть аффинный образ области Дирихле–Вороного некоторой решетки Λ^d .

Далее мы будем использовать следующие теоремы о параллелоэдрах.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00633-а и 11-01-00735-а), гранта Президента РФ МД-352.2012.1, гранта Правительства РФ договор 11.G34.31.0053, а также Центра им. Бернулли (Centre Interfacultaire Bernoulli) и Швейцарского научного фонда (Swiss National Science Foundation).

ТЕОРЕМА 1.3 (Минковский [2]). *Любой параллелоэдр $P \subset \mathbb{R}^d$ удовлетворяет следующим свойствам:*

- 1) P центрально-симметричен;
- 2) любая гипергрань P центрально-симметрична;
- 3) проекция P вдоль любой его грани коразмерности 2 является параллелограммом или центрально-симметричным шестиугольником.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Минковский доказывал данную теорему в случае, когда P допускает разбиение пространства $\mathbb{R}^d$ *грань-в-грань*, т.е. когда пересечение любых двух копий P есть грань (возможно пустая) каждой из них. Позднее МакМалленом [3] была доказана необходимость этих трех условий и в случае, когда P допускает и разбиение не *грань-в-грань*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. В данной теореме, как и всюду далее, когда мы говорим о “проекции вдоль k -мерного подпространства π d -мерного пространства” мы подразумеваем проекцию на любую $(d - k)$ -мерную плоскость, трансверсальную π , если это не оговорено отдельно.

ТЕОРЕМА 1.6 (Венков [4]). *Если многогранник P удовлетворяет трем условиям теоремы Минковского, то он является параллелоэдром.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Пусть F – некоторая грань коразмерности 2 данного d -мерного параллелоэдра P . Множество $\mathcal{B}$ всех гиперграней P , параллельных F , называется *поясом* параллелоэдра P , соответствующим F .

Согласно третьему пункту теоремы Минковского (теоремы 1.3) любой пояс параллелоэдра состоит из четырех или шести гиперграней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Назовем *поясным путем* Γ на параллелоэдре P последовательность $F_0, \mathcal{B}_1, F_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n, F_n$ из гиперграней F_i и поясов $\mathcal{B}_i$; при этом грань F_i содержится в поясах $\mathcal{B}_i$ и $\mathcal{B}_{i+1}$, а пояс $\mathcal{B}_i$ содержит грани F_{i-1} и F_i . Число k будем называть *длиной* данного комбинаторного пути Γ . Будем говорить, что гипергрань F и G параллелоэдра P находятся на *поясном расстоянии k* , если кратчайший поясной путь, их соединяющий, имеет длину k . Поясное расстояние между гранями F и G в P мы будем обозначать $d_{\mathcal{B}}^P(F, G)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Максимальное расстояние между двумя гипергранями в параллелоэдре P будем называть *поясным диаметром* P .

К настоящему времени доказан ряд частных случаев гипотезы Вороного. В частности, самим Вороным [1] гипотеза 1 доказана в случае, когда параллелоэдр P является примитивным, т.е. в каждой вершине разбиения пространства $\mathbb{R}^d$ на параллельные копии P сходится по $d + 1$ копии P . Позднее Житомирский [5] доказал гипотезу Вороного в случае, когда параллелоэдр P является 2-примитивным, т.е. в каждой $(d - 2)$ -мерной грани разбиения пространства $\mathbb{R}^d$ сходится по 3 копии параллелоэдра P . В 1999 г. Эрдал доказал гипотезу Вороного для параллелоэдров, которые являются зонотопами, то есть проекциями кубов более высоких размерностей [6]. В 2005 г. Ордин доказал гипотезу Вороного в случае 3-неприводимых параллелоэдров [7]. Кроме того, перечислены все комбинаторные типы параллелоэдров в размерности 4 (Делоне [8] и Штогрин [9]), примитивных пятимерных параллелоэдров (Барановский и Рышков [10]) и всех пятимерных параллелоэдров (Энгель [11]).

Результаты Вороного, Житомирского и Ордина получены с помощью метода канонической нормировки, существование которой для разбиения пространства $\mathbb{R}^d$ на копии P эквивалентно гипотезе Вороного для P (см. [1]). *Каноническая нормировка* это такое сопоставление каждой $(d-1)$ -мерной грани F разбиения $\mathbb{R}^d$ числа $n(F)$, что для каждой $(d-2)$ -мерной грани G разбиения существует такой набор знаков плюс или минус, что

$$\sum_{i=1}^k \pm \mathbf{e}_i n(F_i) = \mathbf{0},$$

где $F_i, i = 1, \dots, k$, – это множество всех гиперграней разбиения, сходящихся в G , а $\mathbf{e}_i$ – это единичный вектор нормали к F_i ; при этом $k = 3$ или $k = 4$ в зависимости от того пояс из 6 или 4 гиперграней порождает грань G .

В случае, если две гиперграни F и G разбиения имеют общую $(d-2)$ -грань пояса из 6 гиперграней, то значение канонической нормировки на одной из граней однозначно определяет значение нормировки на второй гиперграни. Таким образом, относительно небольшой поясной диаметр параллелеэдра P означает, что для доказательства существования канонической нормировки для P достаточно доказывать существование канонической нормировки, которая удовлетворяет необходимому условию на поясных циклах относительно небольшой длины. В дальнейшем мы докажем, что для параллелеэдров, являющихся зонотопами размерности d , поясной диаметр не превосходит $\lceil \log_2(4/5)d \rceil$.

2. Зонотопы и вспомогательные леммы. Большая часть лемм данного раздела может быть найдена в работах [12] и [13].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Многогранник $P \subset \mathbb{R}^d$ называется *зонотопом*, если его можно представить в виде проекции куба $C^n \subset \mathbb{R}^n$ некоторой размерности.

Эквивалентно, многогранник P является зонотопом, если его можно представить в виде суммы Минковского конечного набора отрезков $[\mathbf{0}, \mathbf{v}_i]$ при $i = 1, \dots, n$, где $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \in \mathbb{R}^{d \times n}$ это набор из n векторов в $\mathbb{R}^d$. В этом случае P обозначают как $P = Z(V) = Z(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В некоторых случаях, например в книге Циглера [14; Разд. 7.3], *зонотопом* $Z(V) = Z(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ называется сумма Минковского отрезков вида $[-\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i]$, $i = 1, \dots, n$. Данное определение эквивалентно определению 2.1.

Существуют многогранники, являющиеся одновременно и зонотопами, и параллелеэдрами; например, куб произвольной размерности C^d является одновременно и параллелеэдром, и зонотопом. Очевидно, что поясной диаметр куба любой размерности равен 1.

Следующий пример иллюстрирует другой многогранник, принадлежащий к семействам зонотопов и параллелеэдров.

ПРИМЕР 2.3 (Перестановочный многогранник). *Перестановочным многогранником* Π_d называется выпуклая оболочка всех $(d+1)!$ точек вида $\sigma(1, 2, \dots, d+1)$, где σ – подстановка из группы $\mathcal{S}_{d+1}$. Несмотря на то, что многогранник Π_d лежит в $\mathbb{R}^{d+1}$, он является d -мерным многогранником, так как все его вершины лежат в d -мерной плоскости $x_1 + \dots + x_{d+1} = 1 + \dots + (d+1)$.

Перестановочный многогранник Π_d – зонотоп, его можно представить в виде суммы Минковского $d(d+1)/2$ отрезков, задающихся векторами вида $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$, $1 \leq i < j \leq d+1$, где $\mathbf{e}_k$ – это k -й вектор стандартного базиса $\mathbb{R}^{d+1}$. Кроме того, Π_d является параллелеэдром и даже, более того, многогранником Дирихле–Вороного для решетки, порожденной векторами вида $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_{d+1} - (d+1)\mathbf{e}_k$ [15]. Используя комбинаторное описание для всех граней перестановочного многогранника из [14], [15], несложно получить, что поясной диаметр Π_d равен 2.

ПРИМЕР 2.4. Рассмотрим более подробно двумерные и трехмерные параллелеэдры. На плоскости существует два комбинаторных типа параллелеэдров – параллелограмм и центрально-симметричный шестиугольник. В обоих случаях все $(d-2)$ -мерные грани (вершины) лежат в одном поясе, т.е. поясной диаметр двумерного параллелеэдра равен 1.

В трехмерном случае существует пять комбинаторно различных параллелеэдров, полученных Федоровым [16]: куб, центрально-симметричная шестиугольная призма, ромбододекаэдр, удлиненный додекаэдр и усеченный кубооктаэдр. Поясной диаметр куба и шестиугольной призмы равен 1, а поясной диаметр остальных трехмерных параллелеэдров равен 2.

В двумерном и трехмерном случаях любой параллелеэдр является зонотопом, однако, это неверно уже в случае размерности, равной 4. Примером четырехмерного параллелеэдра, который не является зонотопом, может служить правильный 24-гранник [17; Табл. II].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Гиперплоскость $\pi \subseteq \mathbb{R}^d$ называется *опорной плоскостью* для многогранника $P \subseteq \mathbb{R}^d$, если P содержится в одном из замкнутых полупространств, определяемых плоскостью π , и пересечение $\pi \cap P$ непусто. При этом пересечение $\pi \cap P$ называется *гранью* P . Мы будем обозначать грань P , соответствующую гиперплоскости π , через F_π^P .

ЛЕММА 2.6. Пусть π – опорная плоскость зонотопа $Z(V)$. Пусть V_π обозначает множество всех векторов множества V , которые параллельны π . В этом случае многогранники $Z(V_\pi)$ и $F_\pi^{Z(V)}$ отличаются друг от друга параллельным переносом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. При этом в качестве зонотопа с пустым множеством векторов мы будем рассматривать точку (начало координат).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z(V) = Z(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ является проекцией куба $C^n \subset \mathbb{R}^n$ на пространство $\mathbb{R}^d$ вдоль $(n-d)$ -мерного пространства ψ . Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ гиперплоскость $\pi \times \psi$; она является опорной гиперплоскостью для куба C^n , а значит определяет его грань F . Грань F является кубом некоторой размерности, который порождается сторонами куба C^n , проецируемыми в векторы множества V , параллельные плоскости π . Следовательно, вся грань F проецируется в параллельную копию зонотопа $Z(V_\pi)$ и в тоже время в грань $F_\pi^{Z(V)}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Пусть V – множество векторов в $\mathbb{R}^d$ и U такое собственное подмножество V , что $(\text{lin } U) \cap V = U$, где $\text{lin } U$ обозначает линейную оболочку векторов из U . Тогда U задает грань (а точнее несколько параллельных граней) зонотопа $Z(V)$, причем эта грань является трансляцией зонотопа $Z(U)$ и имеет размерность $\dim \text{lin } U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для этого достаточно рассмотреть любую опорную гиперплоскость π , параллельную всем векторам из U и не параллельную ни одному вектору из $V \setminus U$, а затем применить к этой гиперплоскости лемму 2.6.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Пусть V – некоторое конечное множество векторов. Будем называть его подмножеством $U \subseteq V$ k -мерным, если размерность линейной оболочки $\text{lin } U$ равна k .

ЛЕММА 2.10. Зонотоп $Z(V)$ размерности d является параллелоэдром в том и только том случае, когда для любого $(d - 2)$ -мерного множества векторов $U \subseteq V$ проекции векторов V вдоль подпространства $\text{lin } U$ дают векторы не более чем трех направлений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 2.8 все $(d - 2)$ -мерные грани зонотопа $Z(V)$ определяются всеми $(d - 2)$ -мерными подмножествами U множества V , а проекция $Z(V)$ вдоль $(d - 2)$ -грани, определяемой подмножеством U , это в точности зонотоп, построенный по проекциям векторов из V вдоль U (при этом векторы из U очевидно проецируются в нулевой вектор и не изменяют суммы Минковского остальных векторов).

Осталось применить теоремы Минковского 1.3 и Венкова 1.6 к зонотопу $Z(V)$ и заметить, что двумерный зонотоп $Z(K)$ является параллелограммом или центрально-симметричным шестиугольником в том и только том случае, когда в K содержатся векторы не более чем трех направлений.

ЛЕММА 2.11. Пусть зонотоп $Z(V \cup \{\mathbf{u}\}) = Z(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}) \subseteq R^d$ является d -мерным параллелоэдром и зонотоп $Z(V) = Z(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ имеет размерность d . Тогда $Z(V)$ является d -мерным параллелоэдром.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K любое $(d - 2)$ -мерное подмножество векторов множества V ; оно также является $(d - 2)$ -мерным подмножеством множества $V \cup \{\mathbf{u}\}$. По лемме 2.10 векторы из $V \cup \{\mathbf{u}\}$ проецируются вдоль K в векторы не более чем 3 направлений; следовательно, тоже самое верно и для множества V . Условия леммы 2.10 выполнены и данная лемма доказана.

Аналогично доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 2.12 (Магазинов [18]). Если $Z(V) = Z(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n)$ является параллелоэдром, то и зонотоп $Z(V') = Z(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \alpha \mathbf{v}_n)$ также является параллелоэдром для произвольного $\alpha \neq 0$.

Следующие лемма и следствия получены в работе Венкова [19] для более общего случая параллелоэдров.

ЛЕММА 2.13. Пусть $Z(V)$ – зонотоп, являющийся параллелоэдром, и e – некоторое его ребро. Тогда проекция $Z(V)$ вдоль ребра e также является параллелоэдром.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 2.8 существует вектор $\mathbf{v}_i \in V$, который является параллельным переносом ребра e . Пусть U – множество проекций векторов из V вдоль $\mathbf{v}_i$. Тогда проекция $Z(V)$ вдоль e это зонотоп $Z(U)$. Пусть K некоторое $(d - 3)$ -мерное подмножество U , задающее грань $Z(K)$ зонотопа $Z(U)$. Пусть K_V это подмножество векторов из V , которые проецируются в векторы из $K \cup \{\mathbf{0}\}$.

Покажем, что $\dim K_V = d - 2$. При проекции вдоль $\mathbf{v}_i \in K_V$ оно проецируется в $(d - 3)$ -мерное множество K и при этом его размерность уменьшается на 1. Более того, выполнено равенство $\operatorname{lin} K_V = \operatorname{lin} K \oplus \operatorname{lin}\{\mathbf{v}_i\}$, а значит проецирование вдоль K_V является композицией проецирований вдоль K и вдоль $\mathbf{v}_i$. Значит множество K_V задает некоторую $(d - 2)$ -грань $Z(K_V)$ параллелоэдра $Z(V)$.

Таким образом, множество проекций векторов множества U вдоль K совпадает с множеством проекций векторов множества V вдоль K_V , так как U это в точности множество проекций векторов из V вдоль $\mathbf{v}_i$. А значит проекциями векторов из U вдоль K являются векторы не более чем трех направлений; следовательно, зонотоп $Z(U)$ удовлетворяет условиям леммы 2.10 и является параллелоэдром.

СЛЕДСТВИЕ 2.14. *Проекция зонотопа $Z(V)$, являющегося параллелоэдром, вдоль любой его грани является параллелоэдром.*

В случае, если из множества V , определяющего зонотоп $Z(V)$, убрать один из векторов $\mathbf{v}$ и при этом размерность V множества уменьшится, соответствующий зонотоп $Z(V \setminus \{\mathbf{v}\})$ является проекцией $Z(V)$ вдоль ребра $\mathbf{v}$, а сам зонотоп $Z(V)$ является призмой с основанием $Z(V \setminus \{\mathbf{v}\})$ и образующей $\mathbf{v}$. Таким образом, из лемм 2.11 и 2.13 получаем следующее.

СЛЕДСТВИЕ 2.15. *Если зонотоп $Z(V)$ является параллелоэдром и $U \subseteq V$, то зонотоп $Z(U)$ также является параллелоэдром.*

ЛЕММА 2.16. *Пусть зонотоп $Z(U)$ является проекцией $Z(V)$ вдоль некоторой грани $Z(W)$, где W является подмножеством V . Тогда для любой грани F_U коразмерности k зонотопа $Z(U)$ существует и единственна грань F_V коразмерности k зонотопа $Z(V)$, проекция которой вдоль $Z(W)$ совпадает с F_U . Более того, если грань G_U инцидентна грани F_U , то грань G_V также будет инцидентна грани F_V .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Грань F_U является зонотопом $Z(U_1)$ для некоторого подмножества $U_1 \subseteq U$. Рассмотрим опорную плоскость π , которая соответствует грани F_U зонотопа $Z(U)$. Плоскости π соответствует опорная гиперплоскость π' зонотопа $Z(V)$, которая порождена плоскостью π и векторами из W . Плоскости π' параллельны те и только те векторы V , которые либо содержатся в W , либо проецируются в векторы множества U_1 . Грань, которая задается в $Z(V)$ гиперплоскостью π' , является гранью коразмерности k и проецируется в $Z(U_1) = F_U$; необходимая грань F_V построена. Единственность F_V также следует из построения.

Сохранение инцидентности при таком построении граней F_V и G_V также очевидно, так как грани $F_U = Z(U_1)$ и $G_U = Z(U_2)$ инцидентны, если и только если одно из множеств U_1 и U_2 подмножество другого.

СЛЕДСТВИЕ 2.17. *Пусть зонотоп $Z(U)$ является проекцией зонотопа $Z(V)$ вдоль некоторой грани $Z(W)$. Тогда любому поясному пути Γ_U в зонотопе $Z(U)$ соответствует поясной путь Γ_V той же длины в $Z(V)$, причем если поясной путь Γ_U соединяет гиперграни F_U и G_U , то Γ_V соединяет F_V и G_V .*

3. Симметрические зонотопы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $E = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d-1}\}$ и $F = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{d-1}\}$ два набора векторов в $\mathbb{R}^d$. Будем называть наборы E и F сопряженными, если для любого $1 \leq$

$i \leq d-1$ выполнено равенство $\dim(E \cup \{\mathbf{f}_i\}) = \dim(F \cup \{\mathbf{e}_i\}) = d$. Соответствующий зонотоп $Z(E \cup F)$ будем называть *симметрическим*.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть E и F два таких сопряженных набора векторов в $\mathbb{R}^d$, $d > 2$, что зонотоп $Z(E \cup F)$ является параллелеэдром. Тогда существует такой зонотоп $Z(V)$, комбинаторно эквивалентный $Z(E \cup F)$ и также являющийся параллелеэдром, у которого матрица V , составленная из столбцов координат векторов, входящих в V , имеет следующий вид:

$$V = \left(\begin{array}{c|c} E_{d-1} & A \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \dots 1 \end{array} \right),$$

где E_{d-1} — это единичная матрица размера $(d-1) \times (d-1)$, а A это некоторая 0/1-матрица размера $(d-1) \times (d-1)$, т.е. матрица, элементами которой являются 0 или 1; более того, можно считать, что в каждой строке матрицы A нулей не меньше чем единиц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что следующие преобразования системы векторов не меняют комбинаторного типа зонотопа, а также его свойства быть или не быть параллелеэдром:

- невырожденное аффинное преобразование системы векторов;
- рассмотрение системы векторов в другом базисе (на самом деле это преобразование даже не меняет саму систему векторов);
- домножение одного из векторов на ненулевую константу.

Первые два преобразования, очевидно, удовлетворяют указанному свойству. А третье преобразование удовлетворяет второй части в силу леммы 2.12, а первой части в силу следствия 2.8, так как домножение одного из векторов на ненулевую константу не влияет на линейную оболочку множества векторов. Также очевидно, что в результате описанных преобразований множества векторов E и F остаются сопряженными.

Прделаем с множеством $E \cup F$ несколько преобразований указанного вида; при этом векторы, получающиеся в результате таких преобразований, мы также будем обозначать $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d-1}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{d-1}$. Рассмотрим базис $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_d$, в котором первые $d-1$ векторов являются векторами множества E . При этом последняя координата любого вектора $\mathbf{f}_i$ будет ненулевой, так как множество векторов $E \cup \{\mathbf{f}_i\}$ имеет размерность d . Домножим каждый вектор $\mathbf{f}_i$ на такое α_i , что последняя координата у нового вектора $\mathbf{f}_i$ будет равна 1.

Применим лемму 2.10 к зонотопу $Z(E \cup F)$, который является параллелеэдром, и его $(d-2)$ -границ, порожденной векторами $E \setminus \{\mathbf{e}_i\}$ для каждого $i = 1, \dots, d-1$; при этом мы будем рассматривать проекцию на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{g}_d$. Ни один из векторов $\mathbf{f}_j$ не может спроецироваться в вектор направления вектора $\mathbf{e}_i$, так как тогда $\dim E \cup \{\mathbf{f}_j\} = d-1$, что противоречит сопряженности множеств E и F . Следовательно, векторы F проецируются в векторы одного или двух направлений, причем вектор $\mathbf{f}_j$ проецируется в вектор $c_j \mathbf{e}_i + \mathbf{g}_d$, где c_j это i -я координата вектора $\mathbf{f}_j$. Два вектора проекций $\mathbf{f}_j$ и $\mathbf{f}_k$ коллинеарны, если и только если $c_j = c_k$; следовательно, среди чисел c_j не более двух различных. Ровно одного значения быть не может, так как в этом случае все векторы F лежат в гиперплоскости $c_j x_d = x_i$ и в этой же плоскости лежат все векторы E кроме $\mathbf{e}_i$, что невозможно

при $d > 2$. Обозначим пару значений, соответствующих i -й координате, как a_i и b_i , причем $a_i < b_i$.

Умножим каждый вектор $\mathbf{e}_i$ на $b_i - a_i$. Рассмотрим наши векторы $E \cup F$ в новом базисе $\mathbf{g}'_i = (b_i - a_i)\mathbf{g}_i$ при $1 \leq i \leq d - 1$ и $\mathbf{g}'_d = \mathbf{g}_d + a_1\mathbf{g}_1 + \dots + a_{d-1}\mathbf{g}_{d-1}$. В этом базисе новые векторы E являются первыми $d - 1$ базисными векторами, а каждый вектор множества F имеет координаты 0 или 1, так как он представляется в виде суммы вектора $\mathbf{g}'_d$ с некоторыми векторами вида $\mathbf{g}'_i$. Следовательно, в базисе $\mathbf{g}'_1, \dots, \mathbf{g}'_d$ множество $E \cup F$ представимо в виде

$$E \cup F = \left(\begin{array}{c|c} E_{d-1} & A' \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \dots 1 \end{array} \right)$$

для некоторой 0/1-матрицы A' . Пусть в i -й строке матрицы A нулей меньше чем единиц. Тогда домножим вектор $\mathbf{e}_i$ на -1 , заменим вектор базиса $\mathbf{g}'_i$ на $\mathbf{g}''_i = -\mathbf{g}'_i$, а также вектор $\mathbf{g}'_d$ на $\mathbf{g}''_d = \mathbf{g}'_d + \mathbf{g}'_i$. Сделав так для каждого i , мы получим требуемый вид множества $E \cup F$.

4. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть P и Q две гиперграни d -мерного зонотопа $Z(V)$. Существует такой симметрический зонотоп $Z(E \cup F)$ размерности не более чем d , что поясное расстояние между гранями P и Q в $Z(V)$ не больше поясного расстояния между гранями, задаваемыми сопряженными множествами E и F в $Z(E \cup F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение теоремы по индукции. База при $d = 2$ очевидна, так как единственным двумерным симметрическим зонотопом является параллелограмм. Предположим, что утверждение теоремы доказано для всех размерностей, меньших d .

В случае, если существует такой вектор $\mathbf{v} \in V$, что у P и у Q есть по ребру, параллельному $\mathbf{v}$, спроецируем $Z(V)$ вдоль ребра $\mathbf{v}$. Пусть P' и Q' – гиперграни проекции $Z(V')$, соответствующие P и Q . По следствию 2.17 выполнено неравенство $d_{\mathcal{B}}^{Z(V)}(P, Q) \leq d_{\mathcal{B}}^{Z(V')}(P', Q')$. В этом случае достаточно применить индукционное предположение к зонотопу $Z(V')$, который по лемме 2.13 является параллеледром, и граням P' и Q' .

Теперь рассмотрим случай, когда у P и Q нет параллельных ребер. Гипергрань P является $(d - 1)$ -мерным зонотопом, а значит $P = Z(U)$ для некоторого $(d - 1)$ -мерного множества векторов $U \subset V$. Выберем в U произвольный базис E , состоящий из векторов множества V . Аналогично построим $(d - 1)$ -мерное линейно независимое множество $F \subset V$, соответствующее гиперграням Q . Множества E и F сопряжены; для этого достаточно показать, что произвольный вектор $\mathbf{f}_i \in F$ линейно независим с векторами множества E . В случае, если это не так, вектор $\mathbf{f}_i$ параллелен гиперплоскостям обеих граней P и Q , а такой случай уже разобран ранее.

Докажем, что зонотоп $Z(E \cup F)$ является требуемым в условии теоремы. Для этого для каждого поясного пути Γ , соединяющего грани $Z(E)$ и $Z(F)$ в $Z(E \cup F)$, построим поясной путь такой же длины, соединяющий грани P и Q в $Z(V)$. Пусть Γ содержит гиперграни $Z(E) = Z(U_0)$, $Z(U_1)$, $\dots$, $Z(U_n) = Z(F)$, где $U_i \subset E \cup F$ и при этом $\dim(U_i \cap U_{i+1}) = d - 2$. Пусть $V_i = V \cap \text{lin}(U_i)$; рассмотрим гипергрань $Z(V_i)$ зонотопа $Z(V)$ (это будут действительно гиперграни в силу следствия 2.8).

Очевидно, что $Z(V_0) = P$ и $Z(V_n) = Q$; кроме того, грани $Z(V_i)$ и $Z(V_{i+1})$ имеют общую $(d-2)$ -мерную грань, так как пересечение множеств V_i и V_{i+1} в точности $(d-2)$ -мерно. Следовательно, искомый поясной путь на $Z(V)$ построен и теорема доказана.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 4.2. Пусть $\xi(d)$ обозначает максимальный поясной диаметр d -мерного симметрического зонотопа, являющегося параллеледром.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Поясной диаметр любого d -мерного зонотопа, являющегося параллеледром, не превосходит $\max_{1 \leq i \leq d} \xi(i)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Для нахождения d -мерного зонотопа, являющегося параллеледром, с максимальным диаметром достаточно исследовать все симметрические зонотопы, также являющиеся параллеледрами, размерности не большей, чем d . Более того, достаточно исследовать только такие сопряженные множества E и F , которые удовлетворяют утверждению теоремы 3.2, т.е. множество векторов $E \cup F$, координаты которого записаны в виде матрицы $d \times (2d-2)$, имеет вид

$$E \cup F = \left(\begin{array}{c|c} E_{d-1} & A \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \dots 1 \end{array} \right)$$

для некоторой 0/1-матрицы A , у которой в каждой строке нулей не меньше, чем единиц.

ТЕОРЕМА 4.5. Поясной диаметр любого d -мерного параллеледра P , являющегося зонотопом, не превосходит $\lceil \log_2 d \rceil$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать утверждение данной теоремы по индукции, при этом база $d = 1$ и $d = 2$ очевидна. Пусть мы доказали, что поясной диаметр k -мерного параллеледра, являющегося зонотопом, при $k < d$ не превосходит $\lceil \log_2 k \rceil$. Докажем это для d -мерных параллеледров ($d \geq 3$), являющихся зонотопами. Согласно теореме 4.1 достаточно доказать, что в любом d -мерном симметрическом зонотопе $Z(E \cup F)$ поясное расстояние между гипергранями P_E и P_F , соответствующими множествам E и F соответственно, не превосходит $\lceil \log_2 d \rceil$.

Применим к зонотопу $Z(E \cup F)$ теорему 3.2. Рассмотрим грань $Z(E \cup F)$, соответствующую опорной гиперплоскости π , параллельной $x_{d-1} = 0$. В этой грани лежат векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d-2}$, а также не меньше половины (т.е. $\lceil (d-1)/2 \rceil$) векторов из F , так как в $(d-1)$ -й строке соответствующей 0/1-матрицы A не менее половины нулей. Значит π задает грань P_π , размерность которой равна $d-1$. Также P_π является соседней с гипергранью P_E по грани коразмерности 2, задаваемой векторами множества $E \setminus \{\mathbf{e}_{d-1}\}$. Кроме того, грань P_π имеет не менее $\lceil (d-1)/2 \rceil$ общих векторов с гранью P_F ; обозначим множество общих векторов через F_π .

Спроецируем зонотоп $Z(E \cup F)$ вдоль грани, задаваемой F_π . Получаемый зонотоп является параллеледром и размерности не более чем

$$d - \left\lceil \frac{d-1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil.$$

Поясной диаметр проекции согласно предположению индукции не превосходит

$$\left\lceil \log_2 \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil \right\rceil = \lceil \log_2 d \rceil - 1.$$

Поясное расстояние между гранями P_F и P_π в $Z(E \cup F)$ в силу следствия 2.17 не превосходит поясного диаметра данной проекции, а значит поясное расстояние между гранями P_E и P_F в $Z(E \cup F)$ не превосходит $1 + (\lceil \log_2 d \rceil - 1)$.

ТЕОРЕМА 4.6. *Поясной диаметр пятимерного параллелоэдра P , являющегося зонотопом, не превосходит 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассматривать только симметрические зонотопы, являющиеся параллелоэдрами, размерности не более чем 5. Все зонотопы, являющиеся параллелоэдрами, размерности 4 или менее по теореме 4.5 имеют поясной диаметр не более 2, а значит, в силу следствия 4.3 и теоремы 3.2 нам достаточно показать, что поясной диаметр симметрического пятимерного параллелоэдра $Z(E \cup F)$, приведенного к виду из теоремы 3.2, равен двум (единице он равен быть не может, так как гиперграни P_E и P_F не являются смежными по грани коразмерности 2).

Если в соответствующей (4×4) -матрице A есть i -я строка, в которой ровно три нуля, то гиперплоскость $x_i = 0$ задает гипергрань $Z(E \cup F)$, смежную по трехмерным граням с гранями P_E и P_F , так как гиперплоскость $x_i = 0$ содержит по три вектора из множеств E и F .

Осталось рассмотреть случай, когда в каждой строке матрицы A содержится ровно по два нуля и ровно по две единицы, так как более двух единиц ни в какой строке быть не может в силу теоремы 3.2. Тогда каждая строка матрицы A задает разбиение множества из 4 элементов на два двухэлементных подмножества. Так как строк всего четыре, в какой-то паре строк, скажем i и j , эти разбиения совпадают. Если строки i и j матрицы A совпадают, то все векторы из F лежат в плоскости $x_i = x_j$ и в ней же лежат два вектора (кроме $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$) множества E . Если i -я и j -я строки матрицы не совпадают (т.е. они получают друг из друга заменой нуля на единицу и наоборот), то все векторы из F лежат в гиперплоскости $x_i + x_j = x_5$ и снова в этой плоскости лежат два вектора из E . В любом случае такая пара множеств E и F не является сопряженной, а значит данный случай невозможен и теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.7. *Поясной диаметр d -мерного зонотопа, являющегося параллелоэдром, не превосходит $\lceil \log_2(4/5)d \rceil$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно использовать в качестве базы индукции результаты теоремы 4.5 при $d \leq 4$ и теоремы 4.6 при $d = 5$, а для доказательства перехода индукции те же рассуждения, что и в переходе индукции в теореме 4.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Теорема 4.5 в пятимерном случае дает оценку 3 и является неточной.

ТЕОРЕМА 4.9. *В шестимерном пространстве существует зонотоп, являющийся параллелоэдром, поясной диаметр которого равен 3, т.е. в этом случае оценка теоремы 4.5 и следствия 4.7 является точной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим симметрический зонотоп $Z = Z(E \cup F) \subset \mathbb{R}^6$, задаваемый множеством векторов

$$V = E \cup F = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

где первые пять столбцов матрицы V отвечают векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5$, а последние – векторам $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$ соответственно. Далее мы покажем, что $Z(V)$ имеет поясной диаметр более двух и является параллелеэдром.

Предположим, что поясной диаметр зонотопа Z равен 2. Тогда существует его гипергрань P , смежная по граням коразмерности 2 с гранями P_E и P_F , задаваемыми E и F соответственно. Тогда P параллельны не менее четырех векторов из E и из F , что невозможно, так как для этого у каких-то четырех векторов из F должны совпадать i -е координаты для некоторого $i < 6$. Таким образом, поясной диаметр зонотопа Z не менее 3. Больше трех он быть не может в силу теоремы 4.5.

Теперь докажем, что Z является параллелеэдром. Для этого мы проверим справедливость утверждения леммы 2.10 для каждого четырехмерного подмножества векторов множества $E \cup F$. Обозначим шестой вектор базиса, в котором изначально даны множества E и F , как $\mathbf{g}$. Отметим, что при циклической перестановке первых пяти векторов изначального базиса также циклически переставляются векторы E и F . Также любой автоморфизм левого пятиугольника на следующем рисунке индуцирует аналогичный автоморфизм правого пятиугольника (повороту соответствует поворот на такой же угол, а симметрии соответствует симметрия относительно параллельной прямой), которые вместе задают перестановку векторов в множества $E \cup F$, сохраняющую вид многогранника Z .

Рис. 1. Пятиугольники, соответствующие E и F .

Векторы множества E записываются в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5, \mathbf{g}$ в виде

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i+1} + \mathbf{f}_{i+3} - \mathbf{f}_{i+1} - \mathbf{f}_{i+4}) - \frac{1}{2}\mathbf{g},$$

значит после замены вектора $\mathbf{g}$ на $(1/2)(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4 + \mathbf{f}_5 - \mathbf{g})$ и векторов $\mathbf{f}_i$ на $-\mathbf{f}_{3i}$, $\mathbf{e}_j$ на $\mathbf{e}_{3j+3}$ мы получим новый базис $F \cup \{\mathbf{g}\}$, в котором множество $F \cup E$ имеет такой же вид как $E \cup F$ в начальном базисе. При этом для векторов из E и F мы рассматриваем индексы по модулю 5. Мы построили отображение левого пятиугольника на правый и правого на левый, которое при подходящей замене базиса не изменяют зонотопа Z . Построенное отображение дает нам возможность рассматривать только те четырехмерные подмножества $E \cup F$, которые содержат не менее половины векторов из E . Кроме того, если векторов из E и из F поровну, то можно рассматривать только такие пары, в которых векторы из E являются соседними в левом пятиугольнике либо векторы из E , не соседние в левом пятиугольнике, а векторы из F , соседние в правом, так как при нашем отображении соседние векторы из правого пятиугольника отображаются в не соседние в левом.

Пусть G обозначает рассматриваемое четырехмерное подмножество $E \cup F$, при этом в G векторов из E не менее половины. Нам необходимо рассмотреть следующие случаи.

(i) В множестве G четыре вектора из множества E , при этом можно считать (благодаря первому замечанию об автоморфизмах пятиугольников), что это векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$.

Спроецируем остальные векторы множества $E \cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_5$ и $\mathbf{g}$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_5 + \mathbf{g}$, $\mathbf{g}$, что и требуется.

(ii) В множестве G три вектора из E , причем эти три вектора расположены подряд на левом пятиугольнике. Можно считать, что из множества E в G находятся векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. Для четвертого вектора из множества G возможен один из следующих вариантов.

(a) Это вектор $\mathbf{f}_1$ (или аналогично вектор $\mathbf{f}_4$, так как на правом пятиугольнике они симметричны относительно прямой симметрии множества векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ на левом пятиугольнике).

Спроецируем остальные векторы $E \cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_4$ и $\mathbf{e}_5$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_5$.

(b) В множестве G содержится вектор $\mathbf{f}_2$ (или аналогично вектор $\mathbf{f}_3$).

Спроецируем остальные векторы $E \cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_4$ и $\mathbf{e}_5$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_5$.

(c) В множестве G содержится вектор $\mathbf{f}_5$.

Спроецируем остальные векторы $E \cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_4$ и $\mathbf{e}_5$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_5$, $-\mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_5$.

(iii) В множестве G три вектора из E , причем они расположены не подряд на левом пятиугольнике. Можно считать, что $E \cap G = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\}$. Для четвертого вектора из G возможен один из следующих вариантов.

(a) В множестве G содержится вектор $\mathbf{f}_1$ (или аналогично вектор $\mathbf{f}_3$).

Спроецируем остальные векторы $E \cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_5$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_5$.

(b) В множестве G содержится вектор $\mathbf{f}_2$.

Спроецируем остальные векторы $E \cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_5$. Получатся векторы двух направлений: $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_5$.

(с) В множестве G содержится вектор $\mathbf{f}_4$ (или аналогично $\mathbf{f}_5$).

Тогда вектор $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_4 - \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_2$ также содержится в нашей четырехмерной грани, а случай с векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{f}_3$ уже разобран в пункте (iii)(а).

(iv) В множестве G по два вектора из E и из F причем векторы из E расположены подряд на левом пятиугольнике. Можно считать, что на левом пятиугольнике векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ лежат в G . Возможен один из следующих случаев для векторов из F , содержащихся в G :

(а) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ (или аналогично $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_3$).

Тогда вектор $\mathbf{e}_5 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{e}_2$ также содержится в нашей четырехмерной грани, а случай с векторами $(\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ уже рассмотрен в пункте (ii).

(b) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_3$.

Спроецируем остальные векторы $E \cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_4$. Получатся векторы двух направлений: $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$.

(с) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_4$ (или аналогично $\mathbf{f}_3$ и $\mathbf{f}_5$).

Спроецируем остальные векторы $E \cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_4$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$.

(d) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_5$ (или аналогично $\mathbf{f}_3$ и $\mathbf{f}_4$).

В этом случае в данной четырехмерной грани также находится вектор $\mathbf{e}_4 = \mathbf{f}_5 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{e}_1$ и данный случай уже разобран в пункте (iii).

(е) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_4$ (или аналогично $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_5$).

Спроецируем остальные векторы $E \cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_5$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_3$.

(f) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_4$ и $\mathbf{f}_5$.

Спроецируем остальные векторы $E \cup F$ на плоскость, порожденную векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_4$. Получатся векторы трех направлений: $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, -\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$.

(v) В множестве G по два вектора из E и из F , причем векторы из E расположены не подряд на левом пятиугольнике. В этом случае можно считать, что векторы из F расположены подряд на правом пятиугольнике. Также можно считать, что в множестве G содержатся векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_3$. Для векторов из $F \cap G$ возможны следующие случаи.

(а) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ (или аналогично $\mathbf{f}_3$ и $\mathbf{f}_4$).

Тогда рассматриваемая четырехмерная грань также содержит вектор $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, т.е. содержит три вектора из множества F , а данный случай уже был разобран в пунктах (ii) и (iii).

(b) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_3$. Тогда в множестве G должен содержаться еще хотя бы один вектор из $E \cup F$, так как четыре вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ линейно-зависимы ($\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$). В G будет три вектора из E или три вектора из F , а это случай был рассмотрен ранее.

(с) В множестве G содержатся векторы $\mathbf{f}_4$ и $\mathbf{f}_5$ (или аналогично $\mathbf{f}_5$ и $\mathbf{f}_1$).

Тогда рассматриваемая четырехмерная грань также содержит вектор $\mathbf{e}_5 = \mathbf{f}_5 - \mathbf{f}_4 + \mathbf{e}_3$, а данный случай уже был разобран в пункте (iii).

Все возможные случаи разобраны и данная теорема доказана.

Автор благодарит Николая Долбилина за обсуждение и постановку задачи. Также автор хотел бы поблагодарить Андрея Гаврилюка и Александра Магазинова за обсуждение и полезные ссылки и замечания. Автор выражает благодарность центру им. Бернулли (Centre Interfacultaire Bernoulli), в котором данная работа была завершена.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Voronoï, “Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire. Recherches sur les paralléloèdres primitifs”, *J. für Math.*, **136** (1909), 67–178.
- [2] H. Minkowski, “Allgemeine Lehrsätze über die convexen Polyeder”, *Gött. Nachr.*, 1897, 198–219.
- [3] P. McMullen, “Convex bodies which tile space by translation”, *Mathematika*, **27**:1 (1980), 113–121.
- [4] Б. А. Венков, “Об одном классе эвклидовых многогранников”, *Вест. Ленинградск. ун-та. Сер. матем., физ., хим.*, **9**:2 (1954), 11–31.
- [5] O. K. Zhitomirskii, “Verschärfung eines Satzes von Voronoï”, *Ж. Ленинградского. матем. об-ва*, **2** (1929), 131–151.
- [6] R. M. Erdahl, “Zonotopes, dicings, and Voronoï’s conjecture on parallelohedra”, *European J. Combin.*, **20**:6 (1999), 527–549.
- [7] A. Ordine, *Proof of the Voronoï Conjecture on Parallelotopes in a New Special Case*, Ph.D. Thesis, Queen’s University, Ontario, 2005.
- [8] B. Delaunay, “Sur la partition régulière de l’espace à 4 dimensions. Première partie”, *Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук*, 1929, № 1, 79–110; “Sur la partition régulière de l’espace à 4 dimensions. Deuxième partie”, *Известия Академии наук СССР. VII серия. Отделение физико-математических наук*, 1929, № 2, 147–164.
- [9] М. И. Штогрин, “Правильные разбиения Дирихле–Вороного для второй триклинной группы”, *Тр. МИАН СССР*, **123**, 1973, 3–128.
- [10] С. С. Рышков, Е. П. Барановский, “С-типы n -мерных решеток и пятимерные примитивные параллелоэдры (с приложением к теории покрытий)”, *Тр. МИАН СССР*, **137**, 1976, 3–131.
- [11] P. Engel, “The contraction types of parallelohedra in $\mathbb{E}^5$ ”, *Acta Cryst. Sect. A*, **56**:5 (2000), 491–496.
- [12] G. C. Shephard, “Space-filling zonotopes”, *Mathematika*, **21** (1974), 261–269.
- [13] P. McMullen, “Space tiling zonotopes”, *Mathematika*, **22**:2 (1975), 202–211.
- [14] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Grad. Texts in Math., **152**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [15] А. П. Поярков, А. И. Гарбер, “О перестановочных многогранниках”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2006, № 2, 3–8.
- [16] Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах*, Тип. Императорской АН, Санкт-Петербург, 1885.
- [17] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover Publ., New York, 1973.
- [18] А. Н. Магазинов, *Личная беседа*, 2010.
- [19] Б. А. Венков, “О проектировании параллелоэдров”, *Матем. сб.*, **49(91)**:2 (1959), 207–224.

А. И. Гарбер

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: alexeygarber@gmail.com

Поступило

16.12.2010

Исправленный вариант

12.02.2011