Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кабанов, О графах без корон с регулярными μ -подграфами, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 874–881

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm906>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 16:29:47

УДК 519.14

О ГРАФАХ БЕЗ КОРОН С РЕГУЛЯРНЫМИ μ -ПОДГРАФАМИ

В. В. Кабанов

Назовем m -*короной* полный трехдольный граф $K_{1,1,m}$ с долями порядков 1, 1, m , а m -*лапой* – полный двудольный граф $K_{1,m}$ с долями порядков 1, m при $m \geq 3$. Вершину a графа Γ назовем *слабо редуцированной*, если подграф $\{x \in \Gamma \mid a^\perp = x^\perp\}$ состоит из единственной вершины. Граф Γ называется *слабо редуцированным*, если все его вершины слабо редуцированы. В данной работе классифицированы связанные слабо редуцированные графы без 3-корон, в которых все μ -подграфы являются регулярными графами одной ненулевой валентности. В частности, обобщается характеристика графов Грассмана и Джонсона, полученная Нуматой, и характеристика связанных редуцированных графов без 3-лап, полученная Махневым.

Библиография: 11 названий.

Введение. Рассматриваются только конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Мы называем *подграфом* графа Γ граф на подмножестве вершин из Γ , у которого вершины смежны тогда и только тогда, когда они смежны в Γ . Обычно такой подграф называют *порожденным*. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф на множестве всех вершин, которые находятся на расстоянии i от вершины a . Через $\Gamma(a)$ обозначим $\Gamma_1(a)$. Если граф Γ зафиксирован, то $\Gamma(a)$ обозначим через $[a]$. Этот подграф назовем *окрестностью* вершины a . Подграф на множестве $[a] \cup \{a\}$ обозначим через $a^\perp$. Для подграфа Δ из Γ обозначим через $[a]_\Delta$ окрестность a в Δ , а $a^\perp \cap \Delta$ через $a^\perp_\Delta$. Если a и b – вершины из графа Γ и расстояние между ними в Γ равно 2, то подграф на множестве всех вершин, которые смежны с ними обеими, будем называть μ -*подграфом*. Пусть $\mathcal{F}$ – класс графов. Граф Γ называется *локально $\mathcal{F}$ -графом*, если окрестность каждой вершины из Γ принадлежит $\mathcal{F}$. Если все графы класса $\mathcal{F}$ изоморфны одному графу G , то локально $\mathcal{F}$ -граф будем называть локально G -графом. *Кликой* (*кликкой*) мы называем полный (вполне несвязный) подграф. Через $K_{m_1, m_2, \dots, m_t}$ обозначим полный многодольный граф с t долями порядка $m_1, m_2, \dots, m_t$. Если $m_1 = m_2 = \dots = m_t$, то $K_{m_1, m_2, \dots, m_t}$ обозначим $K_{t \times m}$. Граф $K_{1, m}$ назовем m -*лапой*, а граф $K_{1, 1, m}$ – m -*короной*, если $m \geq 3$.

В статье [1] Броувером и Нуматой, описаны все (в том числе и бесконечные) графы без 3-лап с несвязными μ -подграфами. Используя этот результат и свою классификацию реберно регулярных графов без 3-лап [2], Нумата в работе [3] получил характеристику графов Грассмана и Джонсона как графов локально без 3-лап, в которых все

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00462.

μ -подграфы являются изоморфными реберно регулярными графами диаметра 2. Заметим, что из последнего условия на все μ -подграфы графа Γ непосредственно следует реберная регулярность самого Γ .

Наша цель получить классификацию локально без 3-лап графов с более слабым условием на μ -подграфы, которое не влечет даже регулярности графа. Это стало возможно благодаря работам Махнева и автора [4]–[6], в которых получена классификация графов без 3-лап с равномошными μ -подграфами. С помощью этой классификации в данной статье исследуется класс графов, в которых окрестности вершин не содержат 3-лап и все μ -подграфы являются регулярными графами валентности α , где $\alpha > 0$. В отличие от [3], мы не требуем даже равномошности всех μ -подграфов. Поскольку наше условие на μ -подграфы не влечет регулярности графа, то мы дополнительно накладываем на граф условие слабой редуцированности.

Очевидно, что класс графов без 3-лап является подклассом класса графов локально без 3-лап. Соответствующая классификация графов без 3-лап была получена Махневым в [7]. Регулярный граф называется редуцированным, если для любой вершины $a \in \Gamma$ множество $\{x \in \Gamma \mid a^\perp = x^\perp\}$ состоит из единственной вершины a . В статье [7] Махнев обобщает это понятие на класс всех графов. Он называет произвольный граф Γ *редуцированным*, если для любой вершины $a \in \Gamma$ множество $\{x \in \Gamma \mid a^\perp \subseteq x^\perp\}$ состоит из единственной вершины a . Легко видеть, что в классе регулярных графов оба определения эквивалентны. В [7] Махнев классифицировал редуцированные графы без 3-лап с регулярными μ -подграфами валентности α , где $\alpha > 0$. Мы покажем, что если Γ является графом без 3-лап с регулярными μ -подграфами одной валентности α , где $\alpha > 0$ и для любой вершины a из Γ множество $\{x \in \Gamma \mid a^\perp = x^\perp\}$ совпадает с $\{a\}$, то и множество $\{x \in \Gamma \mid a^\perp \subseteq x^\perp\}$ состоит из единственной вершины a . Таким образом несколько обобщается основной результат из [7].

Под *кликовым расширением* графа Γ будем понимать граф, полученный заменой каждой вершины a из Γ на полный подграф $C(a)$, содержащий не менее одной вершины, причем вершины из различных клик $C(a)$ и $C(b)$ смежны тогда и только тогда, когда вершины a и b смежны в Γ . Кликовое расширение графа Γ будем называть β -*расширением*, если подграф $C(a)$ содержит β вершин для любой вершины $a \in \Gamma$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ – связный граф, который удовлетворяет следующим условиям:

- 1) Γ не содержит 3-лап;
- 2) Γ содержит 3-клик;
- 3) все μ -подграфы из Γ являются регулярными графами одной валентности α для некоторого числа $\alpha > 0$;
- 4) для любой вершины $a \in \Gamma$ множество $\{x \in \Gamma \mid a^\perp = x^\perp\}$ состоит из единственной вершины a .

Тогда граф Γ является треугольным графом $T(n)$ при $n \geq 6$, графом икосаэдра или графом Шлефли.

Заметим, что класс графов без 3-клик или, что то же самое, класс графов дополнительных к графам без треугольников довольно широк и подвергался интенсивному исследованию многими авторами (см., например, монографию [8]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть Γ – связный граф, который удовлетворяет следующим усло-

виям:

- 1) окрестность любой вершины из Γ не содержит 3-лап;
- 2) окрестность некоторой вершины из Γ содержит 3-кликку;
- 3) все μ -подграфы из Γ являются регулярными графами одной валентности α для некоторого числа $\alpha > 0$;
- 4) для любой вершины $a \in \Gamma$ множество $\{x \in \Gamma \mid a^\perp = x^\perp\}$ состоит из единственной вершины a .

Тогда Γ является локально G -графом, где G один из следующих графов:

- (a) β -расширение $m \times n$ графа при $\beta = \alpha/2$ и $m \geq 3$, $n \geq 3$;
- (b) треугольный граф $T(n)$ при $n \geq 6$;
- (c) граф Шлефли.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Γ – связный граф, который удовлетворяет условиям теоремы 2, и все μ -подграфы из Γ имеют диаметр 2.

Тогда Γ является одним из следующих графов:

- (a) граф Грассмана;
- (b) граф Джонсона или его частное;
- (c) локально $T(n)$ -граф при $n \geq 6$;
- (d) граф Госсета $E_7(1)$.

Приведем определения основных понятий, которые используются в статье.

Треугольным графом $T(n)$ называется реберный граф полного графа с n вершинами. Граф на множестве пар $X \times Y$ называется $m \times n$ графом (решетчатым графом), если $|X| = m$, $|Y| = n$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ или $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$. Граф Шлефли – это сильно регулярный граф с параметрами $(27, 16, 10, 8)$, который является дополнительным к точечному графу обобщенного четырехугольника $GQ(2, 4)$ (см., например, [8, п. 10.3.4]).

Пусть V является n -мерным векторным пространством над конечным полем F . Графом Грассмана для t -подпространств из V называется граф $\left[\begin{smallmatrix} V \\ t \end{smallmatrix} \right]$ с множеством всех подпространств размерности t из V в качестве множества вершин, в котором две вершины A, B смежны тогда и только тогда, когда $\dim(A \cap B) = t - 1$.

Если X – конечное множество, то графом Джонсона для t -подмножеств из X называется граф на множестве $\left(\begin{smallmatrix} X \\ t \end{smallmatrix} \right)$ всех t -элементных подмножеств из X , в котором две вершины a, b смежны тогда и только тогда, когда $|a \cap b| = t - 1$. Если множество X состоит из n элементов, то такой граф обозначается $J(n, t)$. Заметим, что граф $J(n, 2)$ совпадает с треугольным графом $T(n)$.

Пусть ρ является разбиением множества вершин графа Γ на непересекающиеся подмножества. Частным $\bar{\Gamma} = \Gamma/\rho$ для графа Γ по разбиению ρ называется граф на фактор-множестве по ρ множества вершин Γ , в котором две вершины $\bar{a}, \bar{b}$ смежны, только если $a \neq b$ и граф Γ содержит ребро, которое соединяет некоторую вершину из класса $\bar{a}$ с некоторой вершиной из класса $\bar{b}$. Пусть $n = 2t$ и ρ является разбиением множества вершин графа Джонсона $J(2t, t)$ на двухэлементные классы, содержащие t -элементное подмножество и его дополнение в X . Частным графа Джонсона называется граф $J(2t, t)/\rho$.

Графы Джонсона и частные графов Джонсона дают нам примеры локально $(n \times t)$ -графов. Эти примеры не исчерпывают класс таких графов. В статье [9] построены дру-

гие примеры и найдены все локально (4×4) -графы. Там же получено описание локально $(n \times m)$ -графов, в которых каждый μ -подграф является объединением изолированных 4-циклов. Характеризация локально $(n \times m)$ -графов при $n = 3$ получена Холлом в [10]. Проблема описания локально $(n \times m)$ -графов для любых n, m остается открытой.

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным* с параметрами a_i, b_i, c_i , $i = 1, \dots, d$, если для любой пары вершин x, y из Γ таких, что $d(x, y) = i$, найдется в точности c_i соседей для вершины y в $\Gamma_{i-1}(x)$, найдется в точности b_i соседей для вершины y в $\Gamma_{i+1}(x)$ и $a_i = b_0 - b_i - c_i$.

Ректографом называется связный граф без треугольников, в котором любой путь длины 2 лежит в единственном четырехугольнике. Известно [11], что если ректограф дистанционно регулярен и если он имеет валентность k , параметры $a_2(\Gamma) = 0$ и $c_3(\Gamma) = 3$, то каждая связная компонента графа Γ_2 (граф 2-путей) является локально треугольным графом валентности $k(k-1)/2$. Если Γ будет двудольным графом, то Γ_2 имеет две компоненты (так называемые *половинные графы*). Неймайер в [11] показал, что каждый связный локально треугольный граф Γ является половинным графом двудольного ректографа с $c_3(\Gamma) = 3$ и любой μ -подграф из Γ будет объединением непересекающихся подграфов, изоморфных $T(4)$.

Граф Госсета $E_7(1)$ имеет 56 вершин, и окрестность каждой вершины является графом Шлефли (определение см., например, в [8, с. 103]).

2. Доказательство теоремы 1. Пусть Γ – граф, который удовлетворяет условию теоремы 1, и α – валентность всех μ -подграфов из Γ , $\alpha > 0$.

ЛЕММА 2.1. *Если в графе Γ окрестность любой вершины не содержит 3-клик, то для произвольной вершины $a \in \Gamma$ множество $\{x \in \Gamma \mid x^\perp \subseteq a^\perp\}$ состоит из единственной вершины a .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть окрестности всех вершин из графа Γ не содержат 3-клик, и для некоторой вершины $y \in \Gamma$ найдется вершина x из $[y]$, такая что $x^\perp \subset y^\perp$.

Выберем среди таких пар вершин (y, x) пары (a, x) такие, что вершина a имеет наибольшую валентность в графе Γ . Среди пар (a, x) выберем пару (a, b) такую, что вершина b имеет наибольшую валентность в графе Γ . Заметим, что подграф $[a] - [b]$ является кликой, поскольку граф Γ не содержит 3-лап.

1. Покажем, что если вершина x из $[b] - \{a\}$ смежна с некоторой вершиной вне $a^\perp$, то она не смежна ни с одной вершиной из $[a] - b^\perp$. Действительно, пусть $y \in [x] - a^\perp$, $z \in ([x] \cap [a]) - b^\perp$. Тогда вершина y смежна с z , иначе подграф на $\{x, b, y, z\}$ является 3-лапой. С другой стороны, в μ -подграфе $[y] \cap [b]$ вершина x имеет валентность α , а в μ -подграфе $[y] \cap [a]$ вершина x смежна еще с вершиной z из $([y] \cap [a]) - [b]$. Противоречие с условием на валентность μ -подграфов.

2. Пусть $b^\perp$ является кликой. Тогда для вершины c из $[a] - b^\perp$ по условию теоремы имеем $|[c] \cap [b]| = \alpha + 1$. Пусть $d \in [c] \cap ([b] - \{a\})$. Тогда в силу выбора вершины b окрестность $[d]$ не содержится в $a^\perp$ и содержит вершину c из $[a] - b^\perp$. Противоречие с пунктом 1.

Пусть $b^\perp$ не является кликой и c, d – пара несмежных вершин из $b^\perp$. Тогда $|[c] \cap [d] \cap a^\perp| = \alpha + 1$ и $[c] \cap [d] \cap a^\perp$ содержится в $b^\perp$. Значит, каждая вершина из $[a] - b^\perp$ смежна в точности с одной из вершин c, d .

3. Пусть $([a] - b^\perp) \cap [x]$ и $([a] - b^\perp) \cap [y]$ непустые подграфы для любой пары несмежных вершин x, y из $[b]$. В этом случае по пункту 1 и в силу выбора вершины b окрестность

любой вершины из $b^\perp$ содержится в $a^\perp$. Поскольку граф Γ связан, содержит 3-кликку и не содержит 3-лап, то в $[a] - b^\perp$ найдется вершина e смежная с некоторой вершиной f вне $a^\perp$. Напомним, что $[a] - b^\perp$ является кликой. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что e содержится в $([a] - b^\perp) \cap [c]$. Но тогда вершина f смежна с любой вершиной g из $([a] - b^\perp) \cap [d]$, иначе подграф на e, c, f, g является 3-лапой. Теперь такое же рассуждение для любой вершины из $([a] - b^\perp) \cap [d]$ показывает, что f смежна с любой вершиной из $[a] - b^\perp$. Но f не смежна ни с одной вершиной из $b^\perp$. Значит, $[a] \cap [f] = [a] - b^\perp$ и поскольку $[a] - b^\perp$ является кликой, то $|[a] \cap [f]| = \alpha + 1$. Далее, $[c] \cap [f] \subseteq [a] \cap [f]$ и, значит, $[c] \cap [f] = [a] \cap [f]$. Но тогда $([a] - b^\perp) \cap [d]$ – пустой подграф. Противоречие с выбором вершины d .

4. По пункту 3 для некоторой пары несмежных вершин x, y из $b^\perp$ один из подграфов $([a] - b^\perp) \cap [x]$, $([a] - b^\perp) \cap [y]$ является пустым графом. Не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что $\{x, y\} = \{c, d\}$ и $([a] - b^\perp) \cap [c] = [a] - b^\perp$, $([a] - b^\perp) \cap [d] = \emptyset$. Пусть $e \in [a] - b^\perp$. Тогда μ -подграф $[d] \cap [e]$ содержит $\alpha + 1$ вершину из $a^\perp$, причем все эти вершины содержатся в $b^\perp$ по выбору вершин $\{c, d\}$. Теперь μ -подграф $[b] \cap [e]$ содержит вершину a , которая должна иметь в нем валентность α . Однако вершина a имеет в этом μ -подграфе валентность не меньше $\alpha + 1$, поскольку он содержит еще вершину c . Противоречие.

Теперь из доказанной леммы и теоремы Махнева [7] следует, что Γ является треугольным графом $T(n)$ при $n \geq 6$, графом Шлефли или графом икосаэдра.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть Γ – граф, который удовлетворяет условию теоремы 2. Напомним, что все μ -подграфы из Γ регулярны валентности α и $\alpha > 0$.

ЛЕММА 3.1. *Окрестность любой вершины из графа Γ либо не содержит 3-клик, либо является одним из следующих графов:*

- (1) β -расширение $(m \times n)$ -графа при $\beta = \alpha/2$ и $m \geq 3, n \geq 3$;
- (2) β -расширение треугольного графа $T(n)$ при $\beta = \alpha/4$ и $n \geq 6$;
- (3) β -расширение графа Шлефли при $\beta = \alpha/8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть окрестность вершины a из графа Γ содержит 3-кликку. По условию теоремы все μ -подграфы из Γ являются регулярными графами валентности α , где $\alpha > 0$. Значит, для любой пары несмежных вершин из окрестности вершины a их μ -подграф пересекает $[a]$ по α вершинам. Таким образом, окрестность $[a]$ является графом без 3-лап с равномошными μ -подграфами. Если все μ -подграфы из $[a]$ являются кликами, то подграф $[a]$ удовлетворяет условию теоремы 1 из [4]. Поскольку $[a]$ содержит 3-кликку, то по лемме 3.4 из [4] подграф $[a]$ имеет диаметр больше 2. Пусть b, c – пара вершин на расстоянии 3 друг от друга в $[a]$. Тогда вершина a содержится в μ -подграфе $[b] \cap [c]$ и является изолированной в $[b] \cap [c]$. Противоречие с условием $\alpha > 0$. Значит, в $[a]$ есть пара несмежных вершин с некликовым μ -подграфом. Но тогда по теореме 2 из [4] подграф $[a]$ удовлетворяет заключению леммы. Лемма доказана.

Ядром подграфа Δ , содержащего более одной вершины, мы будем называть подграф $K(\Delta) = \Delta^\perp \cap \Delta$. Ядром вершины a называется подграф $K(a) = \{x \in \Gamma \mid x^\perp = a^\perp\}$. Через $K_\Delta(a)$ обозначим ядро вершины a в подграфе Δ .

ЛЕММА 3.2. *Окрестность любой вершины из Γ содержит 3-кликку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию 2) теоремы окрестность некоторой вершины из Γ содержит 3-клик. Пусть окрестность вершины a из графа Γ не содержит 3-клик, а окрестность вершины b содержит 3-клик. Поскольку Γ является связным графом, то без потери общности рассуждений можно считать, что вершины a и b смежны. По лемме 3.1 окрестность вершины b является одним из следующих графов: β -расширение $(m \times n)$ -графа при $\beta = \alpha/2$, $m \geq 3$, $n \geq 3$; β -расширение треугольного графа $T(n)$ при $\beta = \alpha/4$, где $n \geq 6$; β -расширение графа Шлефли при $\beta = \alpha/8$. Обозначим через Δ подграф $b^\perp$.

Пусть $[b]$ является β -расширением $(m \times n)$ -графа при $\beta = \alpha/2$, $m \geq 3$, $n \geq 3$. В этом случае $|K_\Delta(a)| = \beta$ и подграф $([a] \cap \Delta) - K_\Delta(a)$ будет объединением двух непересекающихся изолированных клик, скажем A и B , содержащих $(m-1)\beta$ и $(n-1)\beta$ вершин соответственно. Поскольку $m \geq 3$ и $n \geq 3$, то подграфы A и B содержат не менее α вершин каждый. Пусть $c_1 \in A$, $d_1 \in B$. По условию 3) теоремы в точности α вершин из μ -подграфа $[c_1] \cap [d_1]$ содержится в $[a]$, причем β из них в $K_\Delta(a)$ и β — вне Δ . Пусть $e_1 \in ([c_1] \cap [d_1] \cap [a]) - K_\Delta(a)$. Аналогично, в точности α вершин из μ -подграфа $[b] \cap [e_1]$ содержится в $[a]$. Поскольку A и B содержат не менее α вершин каждый, а вершины $c_1 \in A$, $d_1 \in B$ принадлежат $[b] \cap [e_1] \cap [a]$, то в A и B есть вершины не смежные с e_1 . Пусть $e_2 \in A - [e_1]$ и $e_3 \in B - [e_1]$. Тогда $\{e_1, e_2, e_3\}$ является 3-кликой из $[a]$. Противоречие с выбором вершины a .

Пусть $[b]$ является β -расширением треугольного графа $T(n)$ при $\beta = \alpha/2$, где $n \geq 6$. В этом случае $|K_\Delta(a)| = \beta$ и подграф $([a] \cap \Delta) - K_\Delta(a)$ будет β -расширением $((n-2) \times 2)$ -графа для $n \geq 6$. Все вершины такого графа содержатся в двух непересекающихся кликах, скажем A и B , содержащих по $(n-2)\beta$ вершин.

Пусть c_1 , d_1 являются несмежными вершинами из $A \cup B$ и $c_1 \in A$, $d_1 \in B$. По условию 3) теоремы в точности α вершин из μ -подграфа $[c_1] \cap [d_1]$ содержится в $[a]$. В точности β из них принадлежит $K_\Delta(a)$. Заметим, что подграф $([c_1] \cap [d_1] \cap a^\perp) - K_\Delta(a)$ является объединением двух изолированных β -клик $[c_1] \cap B$ и $[d_1] \cap A$. Таким образом, β вершин из $[c_1] \cap [d_1] \cap a^\perp$ не принадлежат Δ . Пусть e_1 вершина из $([c_1] \cap [d_1] \cap [a]) - \Delta$. По условию 3) теоремы в точности α вершин из μ -подграфа $[b] \cap [e_1]$ содержится в $[a]$. Поскольку $n \geq 6$, то подграфы A и B содержат не менее α вершин каждый. Так как $c_1 \in A$, $d_1 \in B$ и $\{c_1, d_1\} \subset ([c_1] \cap [d_1] \cap [a]) - \Delta$, то вершина e_1 не смежна с некоторой вершиной f_1 из A и с некоторой вершиной g_1 из B . С другой стороны, по выбору вершины a разность $(A \cup B) - [e_1]$ является кликой. Значит, $(A \cup B) - [e_1]$ — клика, содержащая ребро $f_1 g_1$. Поскольку $A \cup B$ является β -расширением $((n-2) \times 2)$ -графа, то $(A \cup B) - [e_1]$ содержит не более 2β вершин. Но тогда $|(A \cup B) \cap [e_1]|$ ограничено снизу числом $6\beta > \alpha$. Противоречие с условием 3) теоремы для μ -подграфа $[b] \cap [e_1]$.

Пусть $[b]$ является β -расширением графа Шлефли при $\beta = \alpha/2$. В этом случае $|K_\Delta(a)| = \beta$ и подграф $([a] \cap \Delta) - K_\Delta(a)$ будет β -расширением графа Клебша с параметрами $(16, 10, 6, 6)$ (см., например, [8, п. 10.3.3]). Этот граф изоморфен графу на бинарных четного веса векторах размерности 5. Два вектора смежны тогда и только тогда, когда расстояние Хэмминга между ними равно 2. Пусть c_1 , d_1 являются несмежными вершинами $([a] \cap \Delta) - K_\Delta(a)$. По условию 3) теоремы в точности α вершин из μ -подграфа $[c_1] \cap [d_1]$ содержится в $[a]$. В точности β из них принадлежит $K_\Delta(a)$. В то же время подграф $([c_1] \cap [d_1] \cap a^\perp) - K_\Delta(a)$ содержит в точности 6β вершин. Таким образом, β вершин из $[c_1] \cap [d_1] \cap a^\perp$ не принадлежат Δ . Пусть e_1 вершина из $([c_1] \cap [d_1] \cap [a]) - \Delta$. По условию 3) теоремы в точности α вершин из μ -подграфа $[b] \cap [e_1]$ содержится в $[a]$.

Значит, подграф $([a] \cap \Delta) - K_\Delta(a)$ содержит не более чем α вершин из $[e_1]$ и не менее α вершин вне $[e_1]$. Однако β -расширение графа Клебша не содержит клик из α вершин. Таким образом, среди вершин из $([a] \cap \Delta) - K_\Delta(a)$ не смежных с e_1 есть пара несмежных вершин. Противоречие с выбором вершины a . Лемма доказана.

Завершим теперь доказательство теоремы 2.

По леммам 3.1 и 3.2 окрестность любой вершины из Γ является графом типа (1), (2), (3) из заключения леммы 3.1. Заметим, что если a и b смежные вершины из Γ , то подграф $[a] \cap [b]$ является одновременно окрестностью вершины a в $[b]$ и окрестностью вершины b в $[a]$. Таким образом, из связности графа Γ и строения графов, перечисленных в заключении леммы 3.1, следует, что все окрестности в Γ изоморфны графу G , который является одним из следующих графов:

- (1) β -расширение $(m \times n)$ -графа при $\beta = \alpha/2$ и $m \geq 3, n \geq 3$;
- (2) β -расширение треугольного графа $T(n)$ при $\beta = \alpha/4, n \geq 6$;
- (3) β -расширение графа Шлефли при $\beta = \alpha/8$.

Для доказательства теоремы нам теперь достаточно показать, что в последних двух случаях $\beta = 1$. Заметим, что окрестность вершины в любом μ -подграфе из Γ является μ -подграфом в окрестности этой вершины в графе Γ .

Пусть имеет место случай (2).

Любой μ -подграф β -расширения треугольного графа $T(n)$ является β -расширением $K_{2,2}$. Значит, если Σ является μ -подграфом из Γ , то Σ — локально β -расширение $K_{2,2}$ -графа и в то же время подграф из G . В частности, Σ является реберно регулярным графом без 3-лап.

По теореме 1 из [2] реберно регулярный граф диаметра 2 без 3-лап является одним из следующих графов:

- (a) $K_{t \times 2}$ при $t > 1$;
- (b) дополнение для сильно регулярного графа с параметрами $(v, k, 0, \mu)$ при $\mu < k$;
- (c) $(n \times n)$ -граф при $n \geq 3$;
- (d) треугольный граф $T(n)$ при $n \geq 5$;
- (e) граф Шлефли;
- (f) пятиугольный граф $P(t)$ при $t \geq 2$ с числом вершин $5t^2$ (см. [2]).

В этом списке локально β -расширением $K_{2,2}$ -графа является только граф из пункта (a) при $t = 3$. Отсюда, если каждая связная компонента из Σ имеет диаметр 2, то Σ изоморфен либо $T(4)$, либо объединению изолированных подграфов, изоморфных $T(4)$. В частности, $\beta = 1$.

По теореме 2 из [2] если реберно регулярный граф диаметра больше 2 без 3-лап, то он либо является графом икосаэдра, либо все его μ -подграфы имеют не более двух вершин. Так как Σ — локально β -расширение $K_{2,2}$ -графа, то Σ не может иметь связных компонент диаметра больше 2.

Пусть имеет место случай (3).

Любой μ -подграф β -расширения графа Шлефли является β -расширением $K_{4 \times 2}$. Значит, если Σ является μ -подграфом из Γ , то Σ локально β -расширение $K_{4 \times 2}$ -графа. В частности, Σ является реберно регулярным графом без 3-лап. Применим теоремы 1 и 2 из [2] к связной компоненте X из Σ . Получаем, что X изоморфна $K_{5 \times 2}$. Значит, $\beta = 1$ и в этом случае.

Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Пусть граф Γ удовлетворяет условию теоремы 3 и все μ -подграфы из Γ имеют диаметр 2. Тогда по теореме 2 граф Γ локально G -граф, где G является одним из следующих графов:

- (а) β -расширением $(m \times n)$ -графа при $\beta = \alpha/2$ и $m \geq 3, n \geq 3$;
- (б) треугольным графом $T(n)$ при $n \geq 6$;
- (с) графом Шлефли.

В силу результата Нуматы [3] для доказательства теоремы 3 нам достаточно показать, что если граф Γ удовлетворяет условию теоремы 2 и все μ -подграфы из Γ диаметра 2, то все μ -подграфы из Γ – изоморфные реберно регулярные графы.

Пусть Σ является μ -подграфом из Γ . Ввиду того, что теорема 2 определяет локальное строение графа Γ , мы имеем также локальное строение для графа Σ .

Пусть, например, Γ является локально G -графом, где G – β -расширение $(m \times n)$ -графа при $\beta = \alpha/2$ и $m \geq 3, n \geq 3$. В этом случае окрестность любой вершины из Σ будет объединением двух изолированных β -клик, т.е. Σ является реберно регулярным графом диаметра 2. Но тогда по теореме 1 из [2] Σ – либо $((\beta + 1) \times (\beta + 1))$ -граф, либо пятиугольный граф $P(t)$ при $2t = \beta + 1$. Однако в последнем случае граф Σ содержит цикл длины 5. Так как Σ является μ -подграфом из Γ , то Σ – подграф из окрестности некоторой вершины графа Γ . Заметим, что ребро из Σ не может содержаться в β -клике ядра вершины из этой окрестности в силу локального строения Σ . Но $(m \times n)$ -граф не содержит циклов длины 5. Таким образом, пятиугольный граф $P(t)$ не может быть μ -подграфом из Γ . Значит, все μ -подграфы из Γ изоморфны реберно регулярным графам диаметра 2. Аналогично рассматриваются остальные случаи. Теперь утверждение теоремы 3 следует из теоремы Нуматы [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Brouwer A. E., Numata M. A characterization of some graphs which do not contain 3-claws // *Discrete Math.* 1994. V. 124. P. 49–54.
- [2] Numata M. On a characterization of a class of the regular graphs of diameter 2 // *Osaka J. Math.* 1974. V. 11. P. 389–400.
- [3] Numata M. A characterization of Grassmann and Johnson graphs // *J. Combin. Theory. Ser. B.* 1990. V. 48. P. 178–190.
- [4] Кабанов В. В., Махнев А. А. Кореберно-регулярные графы без 3-лап // *Матем. заметки.* 1996. Т. 60. № 4. С. 495–503.
- [5] Кабанов В. В., Махнев А. А. Об отделимых графах с некоторыми условиями регулярности // *Матем. сб.* 1996. Т. 187. № 10. С. 73–86.
- [6] Кабанов В. В., Махнев А. А. Графы без 3-лап с равномошными μ -подграфами // *Изв. Урал. гос. ун-та. Матем. и мех. Вып. 1.* 1998. № 10. С. 44–68.
- [7] Махнев А. А. Об одном классе графов без 3-лап // *Матем. заметки.* 1998. Т. 63. № 3. С. 407–413.
- [8] Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. *Distance-Regular Graphs.* Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [9] Blokhuis A., Brouwer A. E. On Locally 4-by-4 Grid Graphs // *J. Graph Theory.* 1989. V. 13. № 2. P. 229–244.
- [10] Hall J. I. Classifying copolar spaces and graphs // *Quart. J. Math.* 1982. V. 33. P. 421–449.
- [11] Neumaier A. Characterization of a class of distance regular graphs // *J. Reine Angew. Math.* 1985. V. 387. P. 182–192.