Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Верещагин, Явные решения граничных задач для $2 + 1$ -мерных интегрируемых систем, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 3, 333–346

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9060>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:24:45

Явные решения граничных задач для $2 + 1$ -мерных интегрируемых систем

В. Л. Верещагин

Нелинейные интегрируемые модели с двумя пространственными и одной временной переменными: уравнение Кадомцева–Петвиашвили и двумеризованная цепочка Тоды, исследуются на предмет корректной постановки граничной задачи, которая может быть решена в рамках метода обратной задачи рассеяния (МОЗР). Показано, что существует обширное множество интегрируемых граничных задач и в качестве граничных контуров для этих задач могут быть выбраны разнообразные кривые линии, причем сами задачи становятся задачами с движущимися границами. Описан метод получения явных решений интегрируемых граничных задач, эффективность этого метода проиллюстрирована на ряде примеров. Это позволяет интерпретировать феномен интегрируемости граничного условия в традиционном смысле, а именно как условие наличия широких классов решений, записываемых в терминах известных функций.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm9060

1. Введение. Несмотря на свою сравнительную малочисленность, интегрируемые системы размерности $2 + 1$ (обычно подразумевается зависимость неизвестной функции от двух пространственных и одной временной переменных) привлекают к себе большой интерес как с точки зрения теории дифференциальных уравнений, так и со стороны разнообразных приложений. В числе самых известных из них следует упомянуть уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП, см. [1])

$$\begin{aligned}u_T + u_{xxx} - 6uw_x &= -3\alpha^2 w_Y, \\ w_x &= u_Y,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $u = u(x, Y, T)$, $w = w(x, Y, T)$, $u_x = \partial u / \partial x$, x, Y, T – непрерывные переменные, параметр α принимает значение 1 или i .

Другим важным примером является представитель дифференциально-разностных моделей – двумерная цепочка Тоды (см. [2])

$$v_{XY}(X, Y, n) = W(X, Y, n - 1) - W(X, Y, n),\tag{1.2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00088-а) и гранта Программы Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”.

где $v(X, Y, n)$ – неизвестная функция непрерывных переменных X, Y и целого индекса $n \in \mathbb{Z}$, $W(X, Y, n) = \exp(v(X, Y, n) - v(X, Y, n + 1))$.

Феномен интегрируемости таких систем основан на существовании так называемых коммутаторных представлений или представлений Лакса. Рассмотрим это явление на примере системы КП (1.1). Было установлено (см. работы [3]–[5]), что нелинейное уравнение (1.1) является условием совместности двух линейных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}\alpha\Psi_Y &= \Psi_{xx} - u\Psi = L\Psi, \\ \Psi_T &= -4\Psi_{xxx} + 6u\Psi_x + 3(u_x + \alpha w)\Psi = A\Psi,\end{aligned}\tag{1.3}$$

определяющих дифференциальные операторы Лакса L, A , так что само уравнение КП может быть представлено в коммутаторной форме

$$[\partial_Y - L, \partial_T - A] = 0,\tag{1.4}$$

где $\partial_Y = \partial/\partial Y$, $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор. Возможность записать уравнение КП (1.1) в виде (1.4) позволяет отнести его к интегрируемым моделям, для которых имеется возможность отыскивать широкие классы решений, интересных с теоретической и прикладной точек зрения. В частности, так называемые солитонные решения КП можно получить с помощью метода “одевания” (см. [3], [5]).

Особый интерес со стороны прикладных проблем вызывает возможность решать граничные задачи для $2 + 1$ -мерных моделей. Нужно отметить, что отнюдь не каждая граничная задача для уравнения КП является интегрируемой с точки зрения наличия достаточно большого множества характерных “красивых” решений типа упомянутых солитонных. Дело в том, что наложение произвольного граничного условия делает неприменимой стандартную схему метода обратной задачи, так как исчезает бесконечная цепь законов сохранения. Следовательно, нетривиален вопрос, существуют ли постановки граничной задачи, позволяющие “выжить” достаточному для интегрируемости количеству законов сохранения и, таким образом, сохранить возможность применения метода обратной задачи. Большой прогресс в этом направлении был достигнут в работах [6]–[10]. Следующее определение дает условие, позволяющее конструктивно выделять граничные задачи, совместимые с аппаратом метода обратной задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть нелинейное уравнение допускает два разных представления Лакса, не связанных друг с другом калибровочным преобразованием:

$$\{\Psi_X = A\Psi, \Psi_Y = L\Psi\}, \quad \{\widehat{\Psi}_X = \widehat{A}\widehat{\Psi}, \widehat{\Psi}_Y = \widehat{L}\widehat{\Psi}\}.$$

Тогда граничное условие $\Omega(u) = 0$ на границе $X = X_0$ называется *интегрируемым*, если существует линейный дифференциальный оператор B такой, что на границе $X = X_0$ функция $\widehat{\Psi} = B\Psi$ решает уравнение $\widehat{\Psi}_Y = \widehat{L}\widehat{\Psi}$ для любого решения Ψ уравнения $\Psi_Y = L\Psi$ при условии выполнения условия $\Omega(u) = 0$.

В работах [8], [9] при помощи определения 1 был, в частности, дан ответ на вопрос о корректной формулировке граничных задач для уравнения КП на прямом контуре ($X = X_0$), в статье [11] были рассмотрены подобные вопросы для двумерной цепочки Тоды с граничным контуром в виде окружности. Тем не менее, оставалось неясным, насколько широк класс интегрируемых (в смысле определения 1) граничных задач,

какие линии можно использовать в качестве границы для задания на них граничного условия, как по заданному граничному контуру отыскивать отвечающее ему интегрируемое граничное условие¹.

Данная работа преследует цель указать способ описания множества интегрируемых граничных задач в общем случае с движущейся границей для 2+1-мерных моделей, причем в качестве примеров служат уравнение Кадомцева–Петвиашвили (1.1) и двумерная цепочка Тоды (1.2). Построен алгоритм интегрирования соответствующих граничных задач, процедура доведена до решений в виде явных формул. Это позволяет интерпретировать сам феномен интегрируемости именно как условие наличия широких классов решений, описываемых с помощью известных функций.

В п. 2 приведены основные атрибуты интегрируемости уравнения (1.1): система Гельфанда–Левитана–Марченко (ГЛМ), ассоциированная с представлением Лакса (1.3), метод одевания. В п. 3 мы переписываем уравнение (1.1) в других переменных и наложим условие некоторой граничной задачи, что даст описание граничного контура и соответствующего граничного условия в общей форме. Это обстоятельство в общем превращает нашу граничную задачу в задачу с движущейся границей. В п. 4 упомянутые инструменты применяются к решению конкретной граничной задачи: мы выписываем уравнение ГЛМ и находим его ядро, удовлетворяющее условию интегрируемости. Затем используем метод одевания для отыскания решений граничной задачи в явной форме. Последующая часть работы посвящена применению описанного метода к решению граничных задач для двумерной цепочки Тоды (1.2).

2. Использование метода обратной задачи. Напомним, следуя [3], [5], о методе одевания Захарова–Шабата как об одном из способов получения явных формул для решений уравнения КП. Введем оператор $\hat{F}$ такой, что

$$(\hat{F}\Psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, z, T, Y)\Psi(z) dz, \quad (2.1)$$

$$[\partial_T - A, F] = 0, \quad [\partial_Y - L, F] = 0, \quad (2.2)$$

и предположим, что он допускает треугольную факторизацию, т.е. представление в виде

$$1 + \hat{F} = (1 + \hat{K}^+)^{-1}(1 + \hat{K}), \quad (2.3)$$

где

$$\hat{K}\Psi(x) = \int_{-\infty}^x K(x, z, T, Y)\Psi(z) dz, \quad \hat{K}^+\Psi(x) = \int_x^{\infty} K^+(x, z, T, Y)\Psi(z) dz. \quad (2.4)$$

Теперь рассмотрим операторы L^1 и A^1 :

$$\begin{aligned} L^1 &= \partial_x^2 - u^1, \\ A^1 &= -4\partial_x^3 + u^1\partial_x + 3(u_x^1 + \alpha w_x^1), \end{aligned} \quad (2.5)$$

задаваемые следующими условиями:

$$\begin{aligned} (\partial_T - A^1)(1 + K) &= (1 + K)(\partial_T - A), \\ (\partial_Y - L^1)(1 + K) &= (1 + K)(\partial_Y - L). \end{aligned} \quad (2.6)$$

¹Задача определения по известной подвижной границе граничного условия, удовлетворяющего определенным требованиям, отчасти перекликается с классической задачей Стефана (см. [12]).

Они удовлетворяют коммутационному соотношению (1.4), имеют структуру, аналогичную структуре операторов L , A , и их коэффициенты могут быть найдены при помощи уравнений (2.6), так что величины u^1 представляют новые решения уравнения КП в силу следующей формулы:

$$u^1 = u + 2\partial_x K(x, x, Y, T). \quad (2.7)$$

Чтобы найти функцию $K(x, z)^2$, требуется решить уравнение ГЛМ, возникающее из сопоставления систем (2.3) и (2.4):

$$K(x, z) + F(x, z) + \int_{-\infty}^x K(x, z') F(z', z) dz' = 0. \quad (2.8)$$

Таким образом, процедура одевания состоит в следующем: стартуем с простого потенциала $u(x)$, решаем линейные уравнения (2.2) на ядро $F(x, z)$. Затем подставляем $F(x, z)$ в уравнение ГЛМ (2.8), находим величину $K(x, z)$, которая с помощью формулы (2.7) дает новое “одетое” решение уравнения (1.1).

Систему (2.2) нетрудно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha F_Y - F_{xx} + F_{zz} + (u(x) - u(z))F &= 0, \\ F_T + 4F_{xxx} + 4F_{zzz} - 6u(x)F_x - 6u(z)F_z + 3[\alpha(w(z) - w(x)) - u_x(x) - u_z(z)]F &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Будем искать решение системы (2.9) в виде произведения $F(x, z) = \Psi(x)\hat{\Psi}(z)$. Тогда легко убедиться, что функция $\Psi(x)$ является решением системы (1.3), а $\hat{\Psi}(x)$ решает систему

$$\begin{aligned} -\alpha\hat{\Psi}_Y &= \hat{\Psi}_{xx} - u\hat{\Psi}, \\ \hat{\Psi}_T &= -4\hat{\Psi}_{xxx} + 6u\hat{\Psi}_x + 3(u_x - \alpha w)\hat{\Psi}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

которую назовем *сопряженной* к системе (1.3). Далее подставляем полученное таким образом ядро $F(x, z)$ в уравнение ГЛМ (2.8) и выводим формулу для величины $K(x, z)$:

$$K(x, z) = -\frac{\Psi(x)\hat{\Psi}(z)}{1 + \int_{-\infty}^x \Psi(z')\hat{\Psi}(z') dz'}, \quad (2.11)$$

что с помощью (2.7) дает “одетое” решение КП.

Отдельного рассмотрения потребует вопрос о выделении среди полученных описанным выше способом решений тех, что решают интегрируемые граничные задачи. Это будет сделано ниже с помощью определения 1.

3. Интегрируемые граничные задачи. Имея операторную $(L-A)$ -пару (1.3), можно с помощью преобразования переменных $Y = Y(y, t)$, $T = T(y, t)$ переписать ее так, чтобы интегрируемое в силу определения 1 граничное условие ставилось уже на прямом контуре $y = y_0$ или, в прежних координатах, на кривой линии

$$Y = Y(y_0, t), \quad T = T(y_0, t). \quad (3.1)$$

²В интересах краткости зависимость от переменных Y , T явно отображать не будем.

В таком случае система линейных уравнений (1.3) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\Psi_y &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{f_{22}}{\alpha} (\Psi_{xx} - u\Psi) - f_{12} (-4\Psi_{xxx} + 6u\Psi_x + 3(u_x + \alpha w)) \Psi \right\}, \\ \Psi_t &= -\frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{f_{21}}{\alpha} (\Psi_{xx} - u\Psi) - f_{11} (-4\Psi_{xxx} + 6u\Psi_x + 3(u_x + \alpha w)) \Psi \right\},\end{aligned}\quad (3.2)$$

где f_{ij} – частные производные:

$$\begin{aligned}f_{11} &= y_Y = \frac{T_t}{T_t Y_y - Y_t T_y}, & f_{12} &= t_Y = \frac{T_y}{T_y Y_t - Y_y T_t}, \\ f_{21} &= y_T = \frac{Y_t}{T_y Y_t - T_t Y_y}, & f_{22} &= t_T = \frac{Y_y}{T_t Y_y - T_y Y_t}, \\ \Delta &= f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21};\end{aligned}$$

сопряженная ей система (2.10) в новых переменных снова получается из (3.2) простой заменой $\alpha \rightarrow -\alpha$:

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_y &= -\frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{f_{22}}{\alpha} (\hat{\Psi}_{xx} - u\hat{\Psi}) + f_{12} (-4\hat{\Psi}_{xxx} + 6u\hat{\Psi}_x + 3(u_x - \alpha w)) \hat{\Psi} \right\}, \\ \hat{\Psi}_t &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{f_{21}}{\alpha} (\hat{\Psi}_{xx} - u\hat{\Psi}) + f_{11} (-4\hat{\Psi}_{xxx} + 6u\hat{\Psi}_x + 3(u_x - \alpha w)) \hat{\Psi} \right\}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Мы ассоциируем систему (3.2) и сопряженную ей (3.3) с одним и тем же решением $u(x)$ интегрируемой граничной задачи, поэтому в силу определения 1 требуем выполнения линейного соотношения $\hat{\Psi}(x) = B(x, t)\Psi(x)|_{y=y_0}$ ³ на граничном контуре. Подставим это соотношение во второе уравнение системы (3.3), с помощью (3.2) соберем коэффициенты при величинах Ψ , Ψ_x , Ψ_{xx} , Ψ_{xxx} и получим явные формулы для множителя $B(x, t)$:

$$B(x, t) = g(t) e^{(x f_{21}) / (6 \alpha f_{11})}, \quad (3.4)$$

где $g(t)$ – произвольная функция, и граничного условия

$$\Delta (\log g(t))_t + \frac{x \Delta}{6 \alpha} \left(\frac{f_{21}}{f_{11}} \right)_t + \frac{f_{21} u}{\alpha} + 6 \alpha f_{11} w - \frac{f_{21}^3}{108 \alpha^3 f_{11}^2} \Big|_{y=y_0} = 0. \quad (3.5)$$

Нужно еще потребовать выполнения следующих условий на преобразование переменных:

$$f_{11} \neq 0, \quad f_{21} \neq 0, \quad \Delta \neq 0. \quad (3.6)$$

В терминах исходных переменных граничное условие (3.5) имеет следующий вид:

$$\Delta \alpha \frac{g'(t)}{g(t)} + \frac{x}{6} \left(y_{TT} + \frac{y_T^2}{y_Y^2} y_{YY} - 2 \frac{y_T}{y_Y} y_{TY} \right) + y_T u + 6 \alpha^2 y_Y w - \frac{\alpha^2 y_T^3}{108 y_Y^2} \Big|_{y=y_0} = 0; \quad (3.7)$$

функция $y = y(Y, T)$ определяется преобразованием переменных.

³В общем случае B представляет собой дифференциальный оператор, но для простоты в рамках данной работы ограничимся рассмотрением лишь случая, когда B – скалярный множитель.

4. Явные формулы для решений интегрируемых граничных задач. Преобразования переменных $Y = Y(y, t)$, $T = T(y, t)$ определяют граничные контуры в виде параметрических кривых (3.1), а сама задача становится задачей с движущейся границей. Приведем примеры явных решений. Сначала выберем простое преобразование вида

$$Y = yt, \quad T = \frac{y}{t}, \quad (4.1)$$

задающее граничный контур в виде гиперболы

$$YT = y_0^2. \quad (4.2)$$

В таком случае интегрируемое граничное условие (3.5) принимает следующий вид:

$$-\frac{x}{3T} + u + 6\alpha^2 \frac{T}{Y} w - \frac{\alpha^2}{108} \frac{Y^2}{T^2} \bigg|_{YT=y_0^2} = 0; \quad (4.3)$$

для простоты примем $g(t) \equiv \text{const}$.

В качестве отправного пункта процедуры одевания возьмем следующее элементарное решение граничной задачи (1.1), (4.3):

$$u^0 = \frac{\alpha^2 Y y_0^2}{18T^3}, \quad w^0 = \frac{\alpha^2 x y_0^2}{18T^3} + \frac{Y^2 y_0^2}{36T^4} - \frac{23y_0^6}{648T^6} \quad (4.4)$$

Подставив решение (4.4) в коэффициенты линейных систем (3.2), (3.3), можно найти решения последних в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi = \sum_{j=1}^N d_j \exp \left[x \left(p_j - \frac{y_0^2}{12\alpha T^2} \right) + \frac{Y}{\alpha} \left(p_j - \frac{y_0^2}{12\alpha T^2} \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{\alpha Y^2 y_0^2}{36T^3} + \frac{\alpha y_0^6}{48T^5} + \frac{\alpha^2 y_0^4 p_j}{36T^3} - \frac{y_0^2 p_j^2}{\alpha T} - 4T p_j^3 \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} = \sum_{j=1}^N l_j \exp \left[x \left(q_j + \frac{y_0^2}{12\alpha T^2} \right) - \frac{Y}{\alpha} \left(q_j + \frac{y_0^2}{12\alpha T^2} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\alpha Y^2 y_0^2}{36T^3} - \frac{\alpha y_0^6}{48T^5} + \frac{\alpha^2 y_0^4 q_j}{36T^3} + \frac{y_0^2 q_j^2}{\alpha T} - 4T q_j^3 \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

где d_j , l_j , p_j , q_j , $j = 1, 2, \dots, N$, – постоянные параметры. Для простоты рассмотрим случай $N = 1$, который можно формально ассоциировать с односолитонным решением. Сохранение интегрируемости требует выполнения определения 1 или, конкретно, следующего условия линейной зависимости на границе:

$$\hat{\Psi} = B\Psi|_{y=y_0}, \quad B = e^{(xt^2)/(6\alpha)}. \quad (4.7)$$

Таким образом, из множества решений вида (4.5), (4.6) линейных систем (3.2), (3.3) нужно выбрать те, что удовлетворяют условию (4.7). При $N = 1$ и $p = q$ это условие выполняется. Осталось подставить выбранные величины Ψ и $\hat{\Psi}$ в формулу для решения уравнения ГЛМ:

$$K(x, x) = -\frac{\Psi(x)\hat{\Psi}(x)}{1 + \int_{-\infty}^x \Psi(z)\hat{\Psi}(z) dz} = -\left(\frac{1}{2p} + \chi\right)^{-1}, \quad (4.8)$$

где

$$\chi = \exp\left(-2xp + \frac{\alpha^2 Y y_0^2 p}{3T^2} - \frac{\alpha^2 y_0^4 p}{18T^3} + 8Tp^3\right), \quad (4.9)$$

и в силу формулы (2.7) получить “одетое” решение КП:

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{\alpha^2 Y y_0^2}{18T^3} - \frac{2p^2}{\cosh^2 \tau}, \\ w^1 &= \frac{\alpha^2 y_0^2 x}{18T^3} + \frac{\alpha^2 y_0^2 p^2}{3T^2 \cosh^2 \tau} + \frac{Y^2 y_0^2}{36T^4} - \frac{23y_0^6}{648T^6}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$\tau = -px + \frac{\alpha^2 Y y_0^2 p}{6T^2} - \frac{\alpha^2 y_0^4 p}{36T^3} + 4Tp^3 + \frac{1}{2} \log(2p).$$

Отметим, что, положив $y_0 = 0$, мы получаем прямой граничный контур $Y = 0$, линейную фазу τ , а само решение (4.10) переходит в одно из простых солитонных решений уравнений КП и Кортевега–де Фриза. Решение (4.10) имеет сингулярность и описывает движение криволинейной волны по сингулярной поверхности. Таким образом, решение (4.10) можно интерпретировать как сингулярное “искривление” регулярного солитонного решения уравнения КП. Соответствующая картина при фиксированном значении переменной $x = 0$ представлена на рис. 1.

Рис. 1

Следующий пример представляет явное решение интегрируемой граничной задачи для уравнения КП внутри области, ограничиваемой эллипсом (т.е. роль граничного контура играет эллипс). Возьмем преобразование вида

$$T = e^y \sin t, \quad Y = ce^y \cos t, \quad c = \text{const}, \quad (4.11)$$

при $y = y_0$ обуславливающее следующий вид граничного контура:

$$T^2 + \frac{Y^2}{c^2} = e^{2y_0} = D = \text{const}. \quad (4.12)$$

Таким образом, имеем задачу для уравнения КП с граничным условием вида (3.7), где функция y определена формулой (4.11):

$$y = \frac{1}{2} \log\left(T^2 + \frac{Y^2}{c^2}\right),$$

выполняющимся на границе типа эллипса (4.12). Способом, аналогичным использованному в предыдущем примере, получаем следующее: исходное тривиальное решение имеет вид

$$u^0 = \frac{c\alpha^2}{36\xi} \left(-\frac{YD}{T^3\xi^{1/2}} + \frac{c}{2} \right),$$

$$w^0 = \frac{cD}{36T^3\xi^{3/2}} \left(-\alpha^2x + \frac{Y^2}{2T\xi} - \frac{Yc}{3\xi^{1/2}} \right) - \frac{c^3}{432\xi^{3/2}}, \quad \text{где } \xi = \frac{D}{T^2} - 1,$$

а простейшее “одетое” решение имеет вид

$$u = u^0 - \frac{2p^2}{\cosh^2 \tau}, \quad w = w^0 + \frac{\alpha^2 p^2 c}{3\xi^{1/2} \cosh^2 \tau}, \quad \tau = px - \frac{\alpha^2 Y c p}{6\xi^{1/2}} - 4p^3 T, \quad p = \text{const.}$$

Это решение также представляет процесс распространения кривой волны по сингулярной поверхности (см. рис. 2 при фиксированном значении $x = -5$).

Рис. 2

5. Граничные задачи для дискретных систем. Описанный выше метод вполне применим к решению граничных задач для интегрируемых $2 + 1$ -мерных цепочек. Рассмотрим эту процедуру на примере двумерной цепочки Тоды (1.2). Для удобства перепишем ее в других обозначениях:

$$u_{XY}(X, Y, n) = w(X, Y, n-1) - w(X, Y, n), \quad (5.1)$$

где $w(X, Y, n) = \exp(u(X, Y, n) - u(X, Y, n+1))$.

Эта модель вместе с соответствующим представлением Лакса и интегралами движения была предложена в работе [2]. Нелинейная цепочка (5.1) является условием совместности следующей пары линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \Psi_X(n) &= -u_X(n)\Psi(n) + \Psi(n+1) = A^0\Psi(n), \\ \Psi_Y(n) &= -w(n-1)\Psi(n-1) = L^0\Psi(n), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где L^0 , A^0 – разностные лаксовы операторы. Основываясь на этом факте, авторы работ [13], [14] развили подход к системам типа (5.1) со стороны метода обратной задачи. В статьях [15], [16] был предъявлен соответствующий цепочке Тоды метод

одевания. В результате был получен широкий класс явных решений уравнения (5.1), в том числе иерархия многосолитонных решений. Вопрос об отыскании интегрируемых постановок граничных задач для цепочки Тоды (5.1) обсуждался в работе [11] (см. также [17]).

В данной статье мы опишем целый класс интегрируемых граничных задач для (5.1) и приведем примеры их явных решений. С идейной точки зрения этот метод аналогичен примененному выше к уравнению Кадомцева–Петвиашвили (1.1), поэтому описание его приведем вкратце.

Метод одевания Захарова–Шабата для цепочки (5.1) состоит в следующем. Введем оператор $\hat{F}$ такой, что

$$(\hat{F}\Psi)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n, k)\Psi(k), \quad (5.3)$$

$$[\partial_X - A, F] = 0, \quad [\partial_Y - L, F] = 0. \quad (5.4)$$

Предположим, что оператор $\hat{F}$ допускает треугольную факторизацию:

$$1 + \hat{F} = (1 + \hat{K})^{-1}(1 + \hat{K}^-), \quad (5.5)$$

где

$$(\hat{K}\Psi)(n) = \sum_{j=n}^{\infty} K(n, j)\Psi(j), \quad (\hat{K}^-\Psi)(n) = \sum_{j=-\infty}^{n-1} K^-(n, j)\Psi(j). \quad (5.6)$$

Определив операторы L^1 и A^1 той же разностной структуры, что и L^0 , A^0 соответственно, с помощью системы

$$\begin{aligned} (\partial_X - A^1)(1 + K) &= (1 + K)(\partial_X - A^0), \\ (\partial_Y - L^1)(1 + K) &= (1 + K)(\partial_Y - L^0), \end{aligned} \quad (5.7)$$

получим выражение для нового решения цепочки Тоды u^1 через прежнее решение u^0 :

$$u^1(n) = u^0(n) - \log(1 + K(n, n)). \quad (5.8)$$

Матрица K является решением разностного аналога уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко (ГЛМ), возникающего из (5.5), (5.6):

$$K(n, m) + F(n, m) + \sum_{k=n}^{\infty} K(n, k)F(k, m) = 0, \quad m \geq n. \quad (5.9)$$

Для запуска процедуры одевания нужно решить линейные уравнения (5.4), имеющие следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_X F_{nm} &= F_{n+1, m} - F_{n, m-1} + F_{nm}(u_X(m) - u_X(n)), \\ \partial_Y F_{nm} &= w(m)F_{n, m+1} - w(n-1)F_{n-1, m}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Легко убедиться, что система (5.10) обладает решениями вида $F_{nm} = \Psi(n)\hat{\Psi}(m)$, где $\Psi(n)$ решает уравнения (5.2), а $\hat{\Psi}(n)$ – “сопряженную” систему

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_X(n) &= u_X(n)\hat{\Psi}(n) - \hat{\Psi}(n-1), \\ \hat{\Psi}_Y(n) &= w(n)\hat{\Psi}(n+1). \end{aligned} \quad (5.11)$$

В таком случае искомые решения уравнения ГЛМ (5.9) принимают следующий вид:

$$K(n, m) = -\frac{\Psi(n)\widehat{\Psi}(m)}{1 + \sum_{j=n}^{\infty} \Psi(j)\widehat{\Psi}(j)}. \quad (5.12)$$

Осталось подставить выражение (5.12) в формулу (5.8), получить “одетые” решения, а затем с помощью определения 1 выделить из их множества те, что удовлетворяют интегрируемому граничному условию.

6. Интегрируемые граничные задачи для цепочки Тоды. В системах линейных уравнений (5.2) и (5.11) введем замену переменных $(X, Y) \rightarrow (x, y)$ с помощью функций $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$ и перепишем эти системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi_x(n) &= \frac{1}{\Delta} \{f_{22}[-(f_{11}u_x(n) + f_{12}u_y(n))\Psi(n) + \Psi(n+1)] + f_{12}w(n-1)\Psi(n-1)\}, \\ \Psi_y(n) &= -\frac{1}{\Delta} \{f_{21}[-(f_{11}u_x(n) + f_{12}u_y(n))\Psi(n) + \Psi(n+1)] + f_{11}w(n-1)\Psi(n-1)\}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_x(n) &= \frac{1}{\Delta} \{f_{22}[-(f_{11}u_x(n) + f_{12}u_y(n))\widehat{\Psi}(n) - \widehat{\Psi}(n-1)] - f_{12}w(n)\widehat{\Psi}(n+1)\}, \\ \widehat{\Psi}_y(n) &= -\frac{1}{\Delta} \{f_{21}[(f_{11}u_x(n) + f_{12}u_y(n))\widehat{\Psi}(n) - \widehat{\Psi}(n-1)] - f_{11}w(n)\widehat{\Psi}(n+1)\}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где f_{ij} – частные производные: $f_{11} = x_X$, $f_{12} = y_X$, $f_{21} = x_Y$, $f_{22} = y_Y$, $\Delta = f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}$. Полагаем, что величина $u(n)$ решает интегрируемую граничную задачу, поэтому в силу определения 1 линейная связь

$$\widehat{\Psi}(n) = B(n)\Psi(n) \quad (6.3)$$

должна иметь место на границе $x = x_0$ или, в терминах переменных X, Y , на параметрической кривой $X = X(x_0, y)$, $Y = Y(x_0, y)$. Подставим условие (6.3) во второе уравнение системы (6.2), далее, используя (6.1), соберем коэффициенты при функциях $\Psi(n)$, $\Psi(n \pm 1)$ и получим явный вид для множителя $B(n)$:

$$B(n) = e^{u(n)} \left(-\frac{f_{21}}{f_{11}} \right)^n d(y) \Big|_{x=x_0} \quad (6.4)$$

и для граничного условия:

$$n\partial_y \left(\log \frac{f_{21}}{f_{11}} \right) + u_y(n) + \frac{2f_{21}}{\Delta} (f_{11}u_x(n) + f_{12}u_y(n)) + \partial_y \log d(y) \Big|_{x=x_0} = 0, \quad (6.5)$$

где $\partial_y = \partial/\partial y$, $d(y)$ – произвольная функция. Потребуем также выполнения следующих условий:

$$f_{11} \neq 0, \quad f_{21} \neq 0, \quad \Delta \neq 0. \quad (6.6)$$

7. Явные решения граничных задач. Проиллюстрируем эффективность описанного метода на нескольких примерах.

1. Рассмотрим следующее преобразование переменных:

$$X(x, y) = e^{a(x)+b(y)}, \quad Y(x, y) = e^{c(a(x)-b(y))}, \quad (7.1)$$

где $a(x)$, $b(y)$ – произвольные дифференцируемые функции, c – ненулевой параметр. Тогда граничным контуром является кривая $YX^c = e^{2ca(x_0)} = D = \text{const}$

на (X, Y) -плоскости. На этом контуре должно выполняться следующее граничное условие, вытекающее из формулы (6.5):

$$u_x(n)|_{x=x_0} = a'(x_0) \left[(1+c)n + \frac{d'(y)}{b'(y)d(y)} \right], \quad (7.2)$$

а системы линейных уравнений (6.1), (6.2) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \Psi_x(n) &= a'(x)X\Psi(n+1) - \frac{1}{2} \left(u_x(n) + \frac{a'(x)u_y(n)}{b'(y)} \right) \Psi(n) - ca'(x)Y u(n-1)\Psi(n-1), \\ \Psi_y(n) &= b'(y)X\Psi(n+1) \\ &\quad - \frac{b'(y)}{2a'(x)} \left(u_x(n) + \frac{a'(x)u_y(n)}{b'(y)} \right) \Psi(n) + cb'(y)Y u(n-1)\Psi(n-1), \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_x(n) &= ca'(x)Y u(n)\widehat{\Psi}(n+1) + \frac{1}{2} \left(u_x(n) + \frac{a'(x)u_y(n)}{b'(y)} \right) \widehat{\Psi}(n) - a'(x)X\widehat{\Psi}(n-1), \\ \widehat{\Psi}_y(n) &= -cb'(y)Y u(n)\widehat{\Psi}(n+1) \\ &\quad + \frac{b'(y)}{2a'(x)} \left(u_x(n) + \frac{a'(x)u_y(n)}{b'(y)} \right) \widehat{\Psi}(n) - b'(y)X\widehat{\Psi}(n-1). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Теперь применим описанную выше процедуру интегрирования к граничной задаче (7.1), (7.2) при $d(y) \equiv 0$. Стартуем со следующего простого решения задачи (7.1), (7.2):

$$u^0(n) = (1+c)na(x). \quad (7.5)$$

Подставим (7.5) в коэффициенты систем линейных уравнений (7.1), (7.2) и найдем их решения: при $c \neq 1$

$$\begin{aligned} \Psi(n) &= \exp \left(-\frac{n}{2}(1+c)(a(x) + b(y)) \right) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^N k_j p_j^n \exp \left[\frac{2e^{(1-c)/2b(y)}}{1-c} \left(p_j e^{(1-c)/2a(x)} + \frac{c}{p_j} e^{(c-1)/2a(x)} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}(n) &= \exp \left(\frac{n}{2}(1+c)(a(x) + b(y)) \right) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^N l_j q_j^n \exp \left[-\frac{2e^{(1-c)/2b(y)}}{1-c} \left(\frac{1}{q_j} e^{(1-c)/2a(x)} + cq_j e^{(c-1)/2a(x)} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.7)$$

где $k_j, l_j, p_j, q_j, j = 1, 2, \dots, N$, – произвольные параметры. Теперь наложим условие интегрируемости

$$\widehat{\Psi}(n) = B(n)\Psi(n)|_{x=x_0}, \quad (7.8)$$

где

$$B(n) = (-1)^n e^{n(2a(x_0) - \log c + (1+c)b(y))}, \quad (7.9)$$

и получим следующие соотношения на параметры:

$$l_j = k_j, \quad q_j = -\frac{p_j}{c} e^{(1-c)a(x_0)}. \quad (7.10)$$

Далее примем решение уравнения ГЛМ в виде (5.12):

$$K(n, m) = -\frac{\Psi(n)\widehat{\Psi}(m)}{1 + \sum_{j=n}^{\infty} \Psi(j)\widehat{\Psi}(j)}, \quad (7.11)$$

и подставим его в формулу

$$u(n) = u^0(n) - \log(1 + K(n, n)), \quad (7.12)$$

что дает “одетое” решение цепочки Тоды, формально ассоциируемое с N -солитонными решениями. В простейшем ($N = 1$) случае имеем явный вид

$$K(n, n) = -\left\{ \nu^{-n} \exp \left[\frac{2e^{(1-c)/2b(y)}}{c-1} \left(\frac{c}{p}(1-\nu)e^{(c-1)/2a(x)} + p \left(1 - \frac{1}{\nu} \right) e^{(1-c)/2a(x)} \right) \right] + \frac{1}{1-\nu} \right\}^{-1},$$

что после подстановки в (7.12) дает простейшее “одетое” решение граничной задачи. Теперь предъявим основные формулы в терминах исходных переменных X , Y . Граничное условие:

$$Xu_X + cYu_Y = (1+c)n, \quad (7.13)$$

граничный контур

$$X^c Y = e^{2ca(x_0)} = D = \text{const}, \quad (7.14)$$

простейшее “одетое” решение цепочки Тоды представлено формулой (7.12), где

$$u^0(n) = \frac{1}{2}(1+c)n \left(\log X + \frac{1}{c} \log Y \right), \quad (7.15)$$

$$K(n, n) = \left[\frac{1}{\nu-1} - \nu^{-n} \exp \left(\frac{2}{c-1} \left(\frac{c}{p}(1-\nu)Y^{(c-1)/(2c)} + p \left(1 - \frac{1}{\nu} \right) X^{(1-c)/2} \right) \right) \right]^{-1}, \quad (7.16)$$

$$\nu = -\frac{p^2}{c} D^{(1-c)/(2c)}.$$

В случае $c = 1$ соответствующие результаты принимают следующий вид: граничное условие

$$Xu_X + Yu_Y = 2n,$$

граничный контур

$$XY = D,$$

простейшее “одетое” решение определяется формулой (7.12), где

$$u^0(n) = n(\log X + \log Y), \quad (7.17)$$

$$K(n, n) = -\left[(-p^2)^{-n} \left(\frac{Y}{X} \right)^{p+1/p} + \frac{1}{1+p^2} \right]^{-1}. \quad (7.18)$$

2. Теперь рассмотрим преобразование переменных

$$X = e^{a(x)} \sin b(y), \quad Y = ce^{a(x)} \cos b(y), \quad (7.19)$$

обуславливающее замкнутый граничный контур. Вычисления, определяющие соответствующую интегрируемую граничную задачу и ее явные решения, идейно аналогичны приведенным выше, поэтому укажем лишь конечный результат в исходных

переменных: граничное условие

$$Y u_X + c^2 X u_Y + n \left(\frac{Y}{X} + c^2 \frac{X}{Y} \right) = 0,$$

граничный контур

$$X^2 + \frac{Y^2}{c^2} = e^{2a(x_0)} = D, \quad (7.20)$$

“одетое” решение дают формулы

$$u^0(n) = -n \log(XY),$$

$$K(n, n) = - \left\{ \left(-\frac{p^2}{c^2} \right)^{-n} \exp \left[\frac{1}{2} \left(p + \frac{c^2}{p} \right) \left(\frac{Y^2}{c^2} - X^2 \right) \right] + \frac{1}{1 + p^2/c^2} \right\}^{-1}, \quad (7.21)$$

p – произвольный параметр.

Рис. 3 иллюстрирует “одетое” решение с граничным контуром (7.20) в виде окружности ($c = 1$) при фиксированном значении переменной $n = 10$.

Рис. 3

3. Наконец приведем пример регулярного решения. Положим $c = -1$ в формулах (7.1)–(7.16) и получим следующее: граничное условие

$$X u_X - Y u_Y = 0,$$

граничный контур

$$Y/X = e^{2a(x_0)} = D. \quad (7.22)$$

Исходное решение выбираем постоянным: $u^0(n) = u^0$ и

$$K(n, n) = \left[\frac{1}{\nu - 1} - \nu^{-n} \exp \left(\frac{1 - \nu}{p} Y - p \left(1 - \frac{1}{\nu} \right) X \right) \right]^{-1}, \quad (7.23)$$

где $\nu = p^2/D$. Формула (7.12) дает решение, регулярное при условии $0 < \nu < 1$. Это решение представляет собой солитон, движущийся вдоль прямой границы (7.22), так что эффектов отражения нет.

8. Заключение. В данной работе показано, что

- 1) интегрируемые в смысле определения 1 граничные задачи для уравнения Кадомцева–Петвиашвили и двумерной цепочки Тоды могут быть решены явным образом. Мы описываем метод и иллюстрируем его эффективность на конкретных примерах;

2) множество интегрируемых граничных задач, включающих граничные контуры и соответствующие граничные условия, достаточно велико.

Этот факт иллюстрируется формулами (3.5), (3.6), (6.5), (6.6).

Автор выражает благодарность И. Т. Хабибуллину за ценные советы и консультации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, “Об устойчивости уединенных волн в среде со слабой дисперсией”, *Докл. АН СССР*, **192**:4 (1970), 753–756.
- [2] А. В. Михайлов, “Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Toda”, *Письма в ЖЭТФ*, **30**:7 (1979), 443–448.
- [3] С. П. Новиков, С. В. Манаков, Л. П. Питаевский, В. Е. Захаров, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [4] В. С. Дрюма, “Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)”, *Письма в ЖЭТФ*, **19**:12 (1974), 753–755.
- [5] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I”, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.
- [6] Е. К. Склинин, “Граничные условия для интегрируемых уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **21**:2 (1987), 86–87.
- [7] И. Т. Хабибуллин, “Граничные задачи на полуплоскости для уравнения Ишимори, совместимые с методом обратной задачи рассеяния”, *ТМФ*, **91**:3 (1992), 363–376.
- [8] И. Т. Хабибуллин, Е. В. Гудкова, “Краевые условия для многомерных интегрируемых уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:2 (2004), 71–83.
- [9] И. Т. Хабибуллин, Е. В. Гудкова, “Уравнение Кадомцева–Петвиашвили на полуплоскости”, *ТМФ*, **140**:2 (2004), 230–240.
- [10] V. Adler, B. Gürel, M. Gürses, I. T. Habibullin, “Boundary conditions for integrable equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:10 (1997), 3505–3513.
- [11] M. Gürses, I. Habibullin, K. Zheltukhin, “Integrable boundary value problems for elliptic type Toda lattice in a disk”, *J. Math. Phys.*, **48**:10 (2007), 102702.
- [12] J. Stefan, “Über die Theorie der Eiseibuidung, Insbesondere Über die Eiseibildung im Polarmeere”, *Sitzungsber. Wien. Akad. Math. Naturwiss.*, **98** (1890), 473–484.
- [13] A. V. Mikhailov, “The reduction problem and the inverse scattering method”, *Phys. D*, **3**:1–2 (1981), 73–117.
- [14] K. Ueno, K. Takasaki, “Toda lattice hierarchy”, *Group Representations and Systems of Differential Equations*, Adv. Stud. Pure Math., **4**, North-Holland, Amsterdam, 1984, 1–95.
- [15] A. Nakamura, “Exact Bessel type solution of the two-dimensional Toda lattice equation”, *J. Phys. Soc. Japan*, **52**:2 (1983), 380–387.
- [16] М. В. Бабич, В. Б. Матвеев, М. А. Салль, “Бинарное преобразование Дарбу для цепочки Toda”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*, 5, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **145**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1985, 34–45.
- [17] I. T. Habibullin, A. N. Vil’danov, “Integrable boundary conditions for nonlinear lattices”, *SIDE III – Symmetries and Integrability of Difference Equations*, CRM Proc. Lecture Notes, **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 173–180.

В. Л. Верещагин

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа

E-mail: v_vereschagin@mail.ru

Поступило

17.01.2011