Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Калябин, Точные константы в одномерных неравенствах типа Пуанкаре, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 4, 634–636

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9063>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 02:30:07

Точные константы в одномерных неравенствах типа Пуанкаре

Г. А. Калябин

1. Обозначения и формулировка результата. Пусть $W_2^1(-1, 1)$ – пространство Соболева всех вещественнозначных функций $f(t)$, абсолютно непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ и таких, что $f' \in L_2(-1, 1)$, снабженное полунормой

$$\|f\|_{W_2^1(-1,1)} := \|f'\|_{L_2(-1,1)} := \left(\int_{-1}^1 (f'(t))^2 dt \right)^{1/2}. \quad (1)$$

Для $m \in \mathbb{N}$ обозначим через $W_{2,m}^1$ подпространство в $W_2^1(-1, 1)$, состоящее из всех функций f , ортогональных пространству алгебраических полиномов степени $\leq m-1$, т.е. удовлетворяющих m интегральным условиям

$$\int_{-1}^1 t^k f(t) dt = 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, m-1\}. \quad (2)$$

На этих подпространствах величина (1) является *нормой*.

Наша цель – для произвольного $x \in [-1, 1]$ найти наименьшие возможные константы $B_m(x)$ в неравенствах

$$|f(x)| \leq B_m(x) \|f'\|_{L_2(-1,1)} \quad \text{для всех } f \in W_{2,m}^1. \quad (3)$$

Частичный ответ на данный вопрос содержится в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА. *Имеют место равенства*

$$(i) \quad B_m^2(\pm 1) = \frac{2}{m(m+2)}, \quad (ii) \quad B_1^2(x) = \frac{1+3x^2}{6}, \quad (iii) \quad B_2^2(0) = \frac{1}{6}. \quad (4)$$

2. Доказательство. Отметим, прежде всего, что числа $B_m(x)$ связаны с решением экстремальной задачи, а именно

$$B_m^{-2}(x) = \min\{J[y] : y \in W_{2,m}^1, y(x) = 1\}, \quad J[y] := \int_{-1}^1 (y'(t))^2 dt. \quad (5)$$

Кроме того, очевидно, что $B_m(-x) = B_m(x)$.

Более простым является случай (i), когда x есть концевая точка отрезка.

ЛЕММА 1. *Для $x = 1$ минимум функционала $J[y]$ в (5) достигается на функции*

$$\tilde{y}_m(t) = \tilde{y}_m(1; t) := \frac{(m+2)P_m(t) + mP_{m+1}(t)}{2(m+1)}, \quad (6)$$

где $P_n(t)$ – классические многочлены Лежандра, и при этом

$$J[\tilde{y}_m] = \frac{m(m+2)}{2}. \quad (7)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00744а, 09-01-00093, 10-01-091331) и Немецкого исследовательского общества (грант DFG GZ SCHM 969/12-1).

Действительно, экстремали изопериметрической задачи

$$J[y] \rightarrow \min, \quad \int_{-1}^1 t^k y(t) dt = \alpha_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \{0, 1, \dots, m-1\}, \quad y(1) = 1, \quad (8)$$

должны удовлетворять условию трансверсальности на свободном конце ($y'(-1) = 0$) (см., например [1; 1.5.4]) и уравнению Эйлера $y''(t) = Q_{m-1}(t)$, $t \in (-1, 1)$, где $Q_{m-1}(t)$ – произвольный алгебраический многочлен степени $\leq m-1$, и, следовательно, $\tilde{y}_m(t) = Q_{m+1}(t)$.

Поскольку в силу (2) все числа α_k в (8) равны 0, многочлен $Q_{m+1}(t)$ с необходимостью должен быть линейной комбинацией двух последовательных многочленов Лежандра $P_m(t)$ и $P_{m+1}(t)$:

$$\tilde{y}_m(t) = c_{m,0}P_m(t) + c_{m,1}P_{m+1}(t). \quad (9)$$

Для вычисления коэффициентов $c_{m,0}$ и $c_{m,1}$ примем во внимание записанные ранее краевые условия $\tilde{y}_m(1) = 1$, $\tilde{y}'_m(-1) = 0$ и классические равенства (см., например, [2; 10.10]) $P_n(1) = 1$, $P'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n-1}n(n+1)/2$, что приводит к системе линейных уравнений

$$c_{m,0}(t) + c_{m,1} = 1, \quad mc_{m,0} - (m+2)c_{m,1} = 0, \quad (10)$$

решение которой легко находится:

$$c_{m,0} = \frac{m+2}{2(m+1)}, \quad c_{m,1} = \frac{m}{2(m+1)},$$

откуда непосредственно вытекает (6).

Далее, интегрируя по частям, получаем

$$J[\tilde{y}_m] = \int_{-1}^1 (\tilde{y}'_m(t))^2 dt = \tilde{y}'_m(t)\tilde{y}_m(t)|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \tilde{y}'_m(t)\tilde{y}_m(t) dt = \tilde{y}'_m(1), \quad (11)$$

поскольку по построению $\tilde{y}_m(t)$ ортогональна $\tilde{y}'_m(t)$. Наконец,

$$J[\tilde{y}_m] = \tilde{y}'_m(1) = c_{m,0}P'_m(1) + c_{m,1}P'_{m+1}(1) = \frac{m(m+2)}{2}. \quad (12)$$

В частности,

$$\tilde{y}_1(1; t) = \frac{3}{8}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{1}{8}, \quad B_1^2(\pm 1) = \frac{2}{3}. \quad (13)$$

3. Доказательство части (ii): $m = 1$, $-1 < x < 1$. С помощью растяжений и сдвигов из (7) выводится

ЛЕММА 2. Пусть $a < b$, Y – множество таких функций $y(t) \in W_2^1(a, b)$, которые равны 1 на одном из концов отрезка $[a, b]$, $c \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\min_{y \in Y} \left\{ \int_a^b (y'(t))^2 dt : \frac{1}{b-a} \int_a^b y(t) dt = c \right\} = \frac{3(1-c)^2}{b-a}. \quad (14)$$

Применяя лемму 2 к множеству Y_x функций $y(t) \in W_{2,1}^1(-1, 1)$ таких, что $y(x) = 1$, по отдельности на каждом из отрезков $[-1, x]$ и $[x, 1]$ получаем равенство

$$\min\{J[y] : y \in Y_x\} = 3 \left(\frac{(1-\tilde{c})^2}{1+x} + \frac{(1-\hat{c})^2}{1-x} \right) =: G(\tilde{c}, \hat{c}), \quad (15)$$

где $\tilde{c}$, $\hat{c}$ – средние значения $y(t)$ на указанных отрезках, связанные соотношением

$$(1+x)\tilde{c} + (1-x)\hat{c} = 0, \quad (16)$$

которое выражает условие ортогональности $y(t)$ константам на всем отрезке $[-1, 1]$.

Для нахождения минимума $G(\tilde{c}, \hat{c})$ при ограничении (16) составляем функцию Лагранжа

$$L(\tilde{c}, \hat{c}, \lambda) := 3 \left(\frac{(1 - \tilde{c})^2}{1 + x} + \frac{(1 - \hat{c})^2}{1 - x} \right) + \lambda((1 + x)\tilde{c} + (1 - x)\hat{c}) \quad (17)$$

и приравниваем нулю ее производные по λ и $\tilde{c}$, $\hat{c}$, что приводит к линейной системе, состоящей из (16) и уравнений

$$6(1 - \tilde{c}) = \lambda(1 + x)^2, \quad 6(1 - \hat{c}) = \lambda(1 - x)^2. \quad (18)$$

Умножая первое равенство (18) на $(1 + x)$, а второе – на $(1 - x)$ и складывая, получаем с учетом (16)

$$12 = ((1 + x)^3 + (1 - x)^3) \text{ влечет } \lambda = \frac{6}{1 + 3x^2}. \quad (19)$$

Используя найденное значение λ , выводим из (18), что

$$1 - \tilde{c} = \frac{(1 + x)^2}{1 + 3x^2}, \quad 1 - \hat{c} = \frac{(1 - x)^2}{1 + 3x^2}, \quad (20)$$

и подставляя эти величины в (15), приходим к соотношению (см. также (5))

$$B_0^{-2}(x) = \min\{G(\tilde{c}, \hat{c}) : (1 + x)\tilde{c} + (1 - x)\hat{c} = 0\} = \frac{3((1 + x)^3 + (1 - x)^3)}{(1 + 3x^2)^2} = \frac{6}{1 + 3x^2}. \quad (21)$$

Если же $m = 1$ и $x = 0$ (случай (iii)), то из (20) следует, что $\tilde{c} = \hat{c} = 0$, и экстремальная функция в (5) будет четной и поэтому автоматически ортогональной на $[-1, 1]$ не только константам, но и первой степени t ; следовательно, $B_2(0) = B_1(0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно вычислить (ср. (13)), что

$$\tilde{y}_1(0; t) = \frac{3}{2}t^2 - 3|t| + 1. \quad (22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Случаи, когда $m = 2$, $0 < |x| < 1$, а, тем более, $m > 2$, $|x| < 1$, остаются пока не исследованными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1976. [2] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1973.

Г. А. Калябин

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: gennadiy.kalyabin@gmail.com

Поступило

02.03.2011