Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Завизион, И. Г. Ключник, Система дифференциальных уравнений с аналитической нелинейностью, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 621–623

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9064>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:50:32

Система дифференциальных уравнений с аналитической нелинейностью

Г. В. Завизион, И. Г. Ключник

В [1], [2] проведена локальная линеаризация и выведены условия сходимости линеаризующего преобразования сингулярно возмущенного дифференциального уравнения первого порядка с аналитичностью по всем переменным и параметром. В [3] методом регуляризации строились асимптотические решения системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с аналитической нелинейностью. В данной статье предлагаются методы асимптотического интегрирования задачи Коши для сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с аналитической нелинейностью в виде сходящегося ряда экспонент.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon, x), \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(0, \varepsilon) = x_0, \quad (2)$$

где ε – малый параметр, $f(t, \varepsilon, x)$, $x(t, \varepsilon)$, x_0 – n -мерные векторы, $A(t, \varepsilon)$ – $(n \times n)$ -матрица. Предполагаем выполнение следующих условий:

- 1) вектор $f(t, \varepsilon, x)$ имеет разложения в равномерно сходящийся ряд

$$f(t, \varepsilon, x) = \sum_{|r|=2}^{\infty} a_r(t, \varepsilon)x^r,$$

где $a_r(t, \varepsilon)$ – n -мерные векторы, $x^r = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$, x_i – компоненты вектора $x(t, \varepsilon)$, $|x_i| < R$, r_i , $i = 1, \dots, n$, – целые неотрицательные числа, $|r| = \sum_{i=1}^n r_i$;

- 2) $A(t, \varepsilon)$, $a_r(t, \varepsilon)$ имеют разложения по степеням малого параметра

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(t), \quad a_r(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s a_{rs}(t);$$

- 3) $A_s(t)$, $a_{rs}(t)$, $s = 0, 1, \dots$, бесконечно дифференцируемы на отрезке $[0; L]$;
- 4) корни $\lambda_{i0}(t)$, $i = 1, \dots, n$, характеристического уравнения простые.

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Если выполняются условия 1)–4) и

$$\sum_{j=1}^n r_j \lambda_{j0}(t) \neq \lambda_{i0}(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad |r| \geq 2, \quad (3)$$

то для любого вектора $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ такого, что $|x_{0i}| < \delta$, $0 < \delta < R$, $i = 1, \dots, n$, формальное решение задачи Коши (1), (2) имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n u_{1i}(t, \varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_i(t, \varepsilon) dt\right) c_i(\varepsilon) + \sum_{|r|=2}^{\infty} u_r(t, \varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (r, \lambda(t, \varepsilon)) dt\right) c^r, \quad (4)$$

где

$$(r, \lambda(t, \varepsilon)) = \sum_{j=1}^n r_j \lambda_j(t, \varepsilon), \quad c = (c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon), \dots, c_n(\varepsilon)), \quad c^r = c_1^{r_1}(\varepsilon) \cdots c_n^{r_n}(\varepsilon),$$

$u_r(t, \varepsilon)$, $u_{1i}(t, \varepsilon)$ – n -мерные векторы, $\lambda_i(t, \varepsilon)$ – скалярные функции, которые имеют разложения

$$u_{1i}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s u_{1is}(t), \quad \lambda_i(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \lambda_{is}(t), \quad u_r(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s u_{rs}(t). \quad (5)$$

Доказательство. Подставляя (5) в (1) и сравнивая выражения, которые имеют одинаковые аргументы, получим уравнения

$$\varepsilon u'_{1i}(t, \varepsilon) + \lambda_i(t, \varepsilon) u_{1i}(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon) u_{1i}(t, \varepsilon), \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

$$\varepsilon u'_r(t, \varepsilon) + (r, \lambda(t, \varepsilon)) u_r(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon) u_r(t, \varepsilon) + f_r(t, \varepsilon), \quad (7)$$

где вектор $f_r(t, \varepsilon)$ определяется по $a_l(t, \varepsilon)$, $2 \leq |l| \leq |r|$, в произведении компонент векторов $u_{j_1}(t, \varepsilon), u_{j_2}(t, \varepsilon), \dots, u_{j_{|l|}}(t, \varepsilon)$, $j_i = 0, \dots, |l|$, $i = 1, \dots, |l|$.

Учитывая (5), решение уравнения (6) находится методом из [4]. Разложив $f_r(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s f_{rs}(t)$ и воспользовавшись (3), (6), (7), получим

$$u_{rs}(t) = \left(A_0(t) - \left(\sum_{j=1}^n r_j \lambda_{j0}(t) \right) E \right)^{-1} b_{rs}(t),$$

где

$$f_{rs}(t) = \frac{\partial^s f_r(t, \varepsilon)}{s! \partial \varepsilon^s} \Big|_{\varepsilon=0},$$

$$b_{rs}(t) = -u'_{r,s-1}(t) + \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^n r_j \lambda_{jk}(t) u_{r,s-k}(t) - \sum_{k=1}^s A_k(t) u_{r,s-k}(t) - f_{rs}(t),$$

при $|r| \geq 2$, $s = 0, 1, \dots$. Далее, $c_i(\varepsilon)$ будем искать в виде $c_i(\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s c_{is}$, $i = 1, \dots, n$, и раскладывая $c^r = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \alpha_{rj}(c_{i0}, c_{i1}, \dots, c_{ij})$, а потом подставляя в (2), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_{1i0}(0) c_{i0} + \sum_{|r|=2}^{\infty} c_0^r u_{r0}(0) &= x_0, \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^s u_{1ij}(0) c_{i,s-j} + \sum_{|r|=2}^{\infty} \sum_{j=0}^s u_{rj}(0) \alpha_{r,s-j}(c_{i0}, c_{i1}, \dots, c_{i,s-j}) &= 0, \quad s = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\alpha_{r0} = c_0^r = c_{10}^{r_1} \dots c_{n0}^{r_n}, \quad \alpha_{rj}(c_{i0}, c_{i1}, \dots, c_{ij}) = \frac{1}{j!} \frac{d^j c^r}{d\varepsilon^j} \Big|_{\varepsilon=0}.$$

В силу того, что $u_{1i0}(t)$, $i = 1, \dots, n$, – собственные векторы матрицы $A_0(t)$, по теореме о неявной функции существует единственное решение уравнения (8) относительно c_{is} , $s = 0, 1, \dots$, в некоторой окрестности точки $\{x_0 \mid |x_{0i}| < \delta\}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если выполняются условия теоремы 1 и неравенства

$$\operatorname{Re} \lambda_{i0}(t) < \alpha < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [0; L], \quad (9)$$

то ряд (4) абсолютно равномерно сходится на некотором подмножестве $[0; L]$.

ТЕОРЕМА 3. Если выполняются условия 1)–4) и условие: существуют целые неотрицательные числа $r_j^{(0)}$, $j = 1, \dots, n$, $|r^{(0)}| \geq 2$ такие, что выполняются соотношения

$$\sum_{j=1}^n r_j^{(0)} \lambda_{j0}(t) \equiv \lambda_{k_0}(t), \quad 1 \leq k_0 \leq n,$$

а при других значениях $r_j^{(1)}$

$$\sum_{j=1}^n r_j^{(1)} \lambda_{j0}(t) \neq \lambda_k(t), \quad k = 1, \dots, n, \quad k \neq k_0, \quad t \in [0; L],$$

то задача Коши (1), (2) имеет формальное решение вида (4), в котором векторы $u_{1i}(t, \varepsilon)$, $i = 1, \dots, n$, имеют разложения

$$u_{1i}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+1} u_{1is}(t),$$

а $\lambda_i(t, \varepsilon)$, $u_r(t, \varepsilon)$, $|r| \geq 2$, имеют разложения (5).

ТЕОРЕМА 4. Если выполняются условия 1)–4) и соотношения (3), то формальное решение задачи Коши (1), (2) имеет вид (5), в котором скалярные функции $\lambda_i(t, \varepsilon)$ и векторы $u_{1i}(t, \varepsilon)$, $i = 1, \dots, n$, имеют разложения (5), а $c_i(\varepsilon)$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^n u_{1i}(0, \varepsilon) c_i(\varepsilon) = x_0.$$

Таким образом, построены асимптотические решения задачи Коши сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с аналитической нелинейностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Y. Sibuya, *J. Math. Mech.*, **9** (1960), 369–397. [2] В. В. Басов, *Вестн. С.-Петербургск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., астроном.*, 1993, № 2, 62–66. [3] С. А. Ломов, В. Ф. Сафонов, *Матем. заметки*, **25:6** (1979), 871–889. [4] А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища школа, Київ, 2000.

Г. В. Завизион

Кировоградский государственный педагогический
университет им. В. Винниченко, Украина
E-mail: ZavizionG@rambler.ru

Поступило

20.02.2011

Исправленный вариант

10.06.2011

И. Г. Ключник

Кировоградский государственный педагогический
университет им. В. Винниченко, Украина
E-mail: klyuchnyk.i@mail.ru