Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Ярмухаметов, Гигантская компонента в случайных дистанционных графах специального вида, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 3, 463–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9066>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:41:40

Гигантская компонента

в случайных дистанционных графах специального вида

А. Р. Ярмухаметов

В статье рассматривается вопрос о пороговой вероятности для существования гигантской компоненты в определенной серии случайных дистанционных графов. Полученные результаты обобщают классические теоремы Эрдёша–Реньи в случае геометрических графов специального вида.

Библиография: 11 названий.

1. Введение

1.1. Классические результаты Эрдёша и Реньи о существовании гигантской компоненты в случайном графе. В 1959 г. П. Эрдёш и А. Реньи предложили следующую модель случайного графа (см. [1]–[4]): рассматривается вероятностное пространство

$$G(N, p) = (\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathcal{P}_{N,p}),$$

где Ω_N – множество всех графов $G = (V_N, E)$ без петель, кратных ребер и ориентации, а $V_N = \{1, \dots, N\}$ (т.е. $|\Omega_N| = 2^{C_N^2}$), $\mathcal{F}_N = 2^{\Omega_N}$,

$$\mathcal{P}_{N,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_N^2-|E|}, \quad p \in (0, 1).$$

Иными словами, мы проводим то или иное ребро между вершинами случайного графа с вероятностью p независимо от остальных ребер.

Будем говорить, что случайный граф обладает некоторым свойством *асимптотически почти наверное* (кратко АПН), если вероятностная мера множества графов, обладающих таким свойством, стремится к 1 при $N \rightarrow \infty$. Отметим, что вероятность ребра p есть, вообще говоря, функция от N .

В 1960–1961 гг. Эрдёшом и Реньи был получен следующий результат для “пороговой вероятности” существования гигантской компоненты в случайном графе (см. [5]).

Величина $p_1^* = 1/N$ является “пороговой вероятностью” для существования “гигантской компоненты” в случайном графе, а именно: если $c < 1$ и при всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $p \leq c/N$, то АПН случайный граф в пространстве $G(N, p)$ будет состоять из компонент, количество вершин в каждой из которых

равно $O(\ln N)$; если же $c > 1$ и при всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $p \geq c/N$, то случайный граф АПН будет содержать “гигантскую компоненту” размера $\Omega(N)$ (при этом все остальные вершины будут содержаться в компонентах размера $O(\ln N)$).

По тематике случайных графов существует обширная литература – например, книги [1], [5], [6].

1.2. Постановка основной задачи. Введем вероятностное пространство, которое будем называть *пространством случайных дистанционных графов*. Для этого положим $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, $N = C_n^{n/2}$ и рассмотрим полный дистанционный граф $\mathcal{G}_N = (\mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N)$, у которого

$$\mathcal{V}_N = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = 2k = \frac{n}{2} \right\},$$

$$\mathcal{E}_N = \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{V}_N \times \mathcal{V}_N : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k = \frac{n}{4} \right\}.$$

Таким образом, вершины полного дистанционного графа являются точками из $\{0, 1\}^n$ и этих вершин ровно N . При этом ребра графа $\mathcal{G}_N$ суть пары его вершин, удаленных друг от друга на расстояние $\sqrt{n/2}$. Именно этим и обусловлено название графа. Рассмотрение подобных графов глубоко мотивировано задачами комбинаторной геометрии (см. [7], [8]).

Определим новое вероятностное пространство

$$\mathcal{G}^{\text{dist}}(N, p) = (\Omega_N^{\text{dist}}, \mathcal{F}_N^{\text{dist}}, \mathcal{P}_{N,p}^{\text{dist}}),$$

где Ω_N^{dist} — множество всех остовных подграфов $G = (\mathcal{V}_N, E)$ полного дистанционного графа $\mathcal{G}_N$, $\mathcal{F}_N^{\text{dist}} = 2^{\Omega_N^{\text{dist}}}$,

$$\mathcal{P}_{N,p}^{\text{dist}}(G) = p^{|E|}(1-p)^{|\mathcal{E}_N| - |E|}, \quad p \in (0, 1).$$

В следующем разделе мы сформулируем результат для графа $\mathcal{G}^{\text{dist}}(N, p)$ о пороговой вероятности существования гигантской компоненты.

2. Формулировки результатов

Сделаем несколько предварительных замечаний.

В соответствии с формулой Стирлинга общее число вершин в полном дистанционном графе $\mathcal{G}_N$ есть

$$N = C_n^{n/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot (1 + \delta'_1(n)), \quad n = \frac{\ln N}{\ln 2} \cdot (1 + \delta'_2(N)),$$

где $\delta'_1(n) = o(1)$ и $\delta'_2(N) = o(1)$.

Граф $\mathcal{G}_N$ — регулярный. Обозначим через N_1 степень каждой из его вершин. В соответствии с формулой Стирлинга

$$N_1 = (C_{n/2}^{n/4})^2 = \frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \cdot (1 + \delta'_3(N)),$$

где $\delta'_3(N) = o(1)$.

ТЕОРЕМА. Пусть $p_* = 1/N_1$. Тогда

- а) если $c > 1$ и при всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $p \geq sp_*$, то случайный граф АПН будет содержать “гигантскую компоненту” размера

$$\Omega(N) = N(1 - t_c)(1 + o(1)),$$

где

$$t_c = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} (ce^{-c})^k,$$

при этом все остальные вершины будут содержаться в компонентах размера $o(N)$;

- б) если $c < 1$ и при всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $p \leq sp_*$, то случайный граф в пространстве $\mathcal{G}^{\text{dist}}(N, p)$ АПН будет состоять из компонент, количество вершин в каждой из которых равно $O(\ln N)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для введенного значения t_c верны следующие соотношения: $t_c = 1$ при $c < 1$, $t_c < 1$ при $c > 1$. Доказательство этого факта можно найти, например, в [5].

Доказательству теоремы будет посвящен раздел 4.

3. Вспомогательные утверждения и леммы

В этом разделе мы сформулируем и докажем несколько вспомогательных результатов, которые будут использованы в разделе 4 при доказательстве основной теоремы. Формулировки утверждений будут даны в п. 3.1, их доказательства – в пп. 3.2, 3.5–3.9. В пп. 3.3 и 3.4 будут сформулированы и доказаны лемма 1 и лемма 2.

3.1. Формулировки вспомогательных утверждений. В работе [9] в утверждении 2 было доказано, что при фиксированном k число различных k -вершинных деревьев в полном дистанционном графе $\mathcal{G}_N$, обозначаемое $T_{k,N}$, при $N \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$T_{k,N} \sim N \cdot N_1^{k-1} \cdot \frac{k^{k-2}}{k!}.$$

Следующее утверждение некоторым образом напоминает утверждение 2 из [9].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. 1) Пусть $2 \leq k \leq N_1^{1/4}$. Тогда при достаточно больших N имеет место равенство

$$T_{k,N} = N \cdot N_1^{k-1} \cdot \frac{k^{k-2}}{k!} (1 + \delta'(N)),$$

где $|\delta'(N)| \leq 2/\sqrt{N_1}$.

- 2) Пусть $2 \leq k \leq N_1^{3/4}$. Тогда имеет место неравенство

$$T_{k,N} \leq N \cdot N_1^{k-1} \cdot \frac{k^{k-2}}{k!}.$$

Доказательство утверждения 1 будет приведено в п. 3.2 раздела 3.

Обозначим через $Y_{k,N}$ ($3 \leq k \leq [N^{1/4}]$) число различных k -вершинных компонент связности, не являющихся деревьями, в случайном графе G в пространстве $\mathcal{G}^{\text{dist}}(N, p)$.

Обозначим также через Z_N число вершин, содержащихся в таких компонентах, т.е.

$$Z_N = \sum_{k=3}^{[N^{1/4}]} kY_{k,N}.$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если $p = c/N_1$ ($c \neq 1$), то АПН выполнено соотношение

$$Z_N = o(\ln N).$$

Доказательство утверждения 2 будет приведено в п. 3.5 раздела 3.

Пусть случайная величина $X_{N,k}$ обозначает количество древесных компонент размера k ($k \geq 2$) в случайном графе в пространстве $\mathcal{G}^{\text{dist}}(N, p)$. Пусть $X_{N,1}$ есть количество изолированных вершин в случайном графе в пространстве $\mathcal{G}^{\text{dist}}(N, p)$. Пусть случайная величина X_N есть количество вершин в древесных компонентах размера, не превышающего $N_1^{1/4}$, плюс количество изолированных вершин, иными словами,

$$X_N = \sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} kX_{N,k}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. При $p = c/N_1$ (где $c \neq 1$) имеет место равенство

$$EX_N = Nt_c(1 + \delta_1(N)),$$

где $\delta_1(N) = o(1)$.

Доказательство утверждения 3 будет приведено в п. 3.6 раздела 3.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. При $p = c/N$ (где $c \neq 1$) АПН имеет место равенство

$$X_N = Nt_c(1 + \delta_2(N)),$$

где $\delta_2(N) = o(1)$.

Доказательство утверждения 4 будет приведено в п. 3.7 раздела 3.

Пусть случайная величина $U_{N,k}$ обозначает количество компонент связности размера k ($k \geq 2$) в случайном графе в пространстве $\mathcal{G}^{\text{dist}}(N, p)$. Пусть случайная величина $U_N(h)$ есть количество вершин в связных компонентах размера большего, чем $h \ln N$, и не превышающего $N_1^{3/4}$, иными словами,

$$U_N(h) = \sum_{k=[h \ln N]+1}^{[N_1^{3/4}]} kU_{N,k}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. При $p = c/N$, $c \neq 1$, существует $h = h(c)$ такое, что АПН

$$U_N(h) = 0.$$

Доказательство утверждения 5 будет приведено в п. 3.8 раздела 3.

В завершении доказательства пункта а) теоремы нам понадобится также следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. При $(\alpha + \beta)p < 1$, где $p < 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, имеет место неравенство

$$(1-p)^\alpha + (1-p)^\beta - (1-p)^{\alpha+\beta} \leq (1-p^2)^{\alpha\beta/3}.$$

Доказательство утверждения 6 будет приведено в п. 3.9 раздела 3.

3.2. Доказательство утверждения 1. Возьмем конкретное k -вершинное дерево в графе $\mathcal{G}_N$. Выделим любую вершину этого дерева покраской этой вершины в синий цвет, обозначим выделенную вершину через A . Далее будем считать не число деревьев $T_{k,N}$, а $T'_{k,N}$ – число деревьев с выделенной вершиной. Пусть также $\theta'_{k,N}$ – множество деревьев с выделенной вершиной. Очевидно, что $|\theta'_{k,N}| = T'_{k,N} = kT_{k,N}$, так как выделенной может быть любая из k вершин.

Обозначим через r максимальное расстояние между вершиной A и какой-либо вершиной данного дерева (расстоянием считается количество ребер минимального пути между вершинами графа). Пусть k_i ($1 \leq i \leq r$) – число вершин, расстояние от которых до первой вершины равняется i .

Очевидны ограничения на k_i :

$$k_1 + \dots + k_r = k - 1, \quad k_i \geq 1 \quad \text{для любого} \quad 1 \leq i \leq r. \quad (1)$$

В свою очередь, для любого дерева, построенного на данных k вершинах, фиксирован набор параметров $(r, k_1, \dots, k_r)$, удовлетворяющих (1).

Таким образом, для любого k -вершинного дерева с конкретной выделенной вершиной A фиксирован набор параметров $(A, r, k_1, \dots, k_r)$. Через $\mathcal{B}_{A,r,k_1,\dots,k_r,N}$ обозначим множество всех k -вершинных деревьев из $\theta'_{k,N}$ с таким же набором параметров.

Очевидно, что $\theta'_{k,N}$ представляется в виде

$$\theta'_{k,N} = \bigsqcup_{A \in \mathcal{V}_N} \bigsqcup_{r=1}^{k-1} \bigsqcup_{\substack{k_1+\dots+k_r=k-1 \\ k_1,\dots,k_r>0}} \mathcal{B}_{A,r,k_1,\dots,k_r,N}.$$

Отсюда следует, что

$$T'_{k,N} = |\theta'_{k,N}| = \sum_{A \in \mathcal{V}_N} \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=k-1 \\ k_1,\dots,k_r>0}} |\mathcal{B}_{A,r,k_1,\dots,k_r,N}|. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЧАСТИ 1 УТВЕРЖДЕНИЯ 1. В лемме 1, которая приведена в п. 3.3, будет доказано, что при $2 \leq k \leq N_1^{1/4}$ имеет место равенство

$$|\mathcal{B}_{A,r,k_1,\dots,k_r,N}| = \frac{N_1^{k-1}}{k_1! \dots k_r!} k_1^{k_2} \cdot k_2^{k_3} \cdot \dots \cdot k_{r-1}^{k_r} \cdot (1 + \delta_3(k, N_1)), \quad (3)$$

где $|\delta_3(k, N_1)| \leq (2k^2)/N_1$.

Из (2) и (3) следует, что

$$\begin{aligned} T_{k,N} &= \frac{N}{k} \cdot \left(\sum_{r=1}^{k-1} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=k-1 \\ k_1, \dots, k_r > 0}} \frac{N_1^{k-1}}{k_1! \dots k_r!} k_1^{k_2} \cdot k_2^{k_3} \dots k_{r-1}^{k_r} \right) \cdot (1 + \delta_4(N_1)) \\ &= \frac{N \cdot N_1^{k-1}}{k \cdot (k-1)!} \left(\sum_{r=1}^{k-1} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=k-1 \\ k_1, \dots, k_r > 0}} \frac{(k-1)!}{k_1! \dots k_r!} k_1^{k_2} \cdot k_2^{k_3} \dots k_{r-1}^{k_r} \right) \cdot (1 + \delta_4(N_1)) \\ &= N \cdot N_1^{k-1} \cdot \frac{k^{k-2}}{k!} \cdot (1 + \delta_4(N_1)), \end{aligned}$$

где $|\delta_4(N_1)| \leq 2/\sqrt{N_1}$. Последнее равенство следует из утверждения 1 из [9].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЧАСТИ 2 УТВЕРЖДЕНИЯ 1 аналогично доказательству первой части утверждения.

В лемме 2, которая приведена в п. 3.4, будет доказано, что при $2 \leq k \leq N_1^{3/4}$ имеет место неравенство

$$|\mathcal{B}_{A,r,k_1,\dots,k_r,N}| \leq \frac{N_1^{k-1}}{k_1! \dots k_r!} k_1^{k_2} \cdot k_2^{k_3} \dots k_{r-1}^{k_r}. \quad (4)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\begin{aligned} T_{k,N} &\leq \frac{N}{k} \cdot \left(\sum_{r=1}^{k-1} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=k-1 \\ k_1, \dots, k_r > 0}} \frac{N_1^{k-1}}{k_1! \dots k_r!} k_1^{k_2} \cdot k_2^{k_3} \dots k_{r-1}^{k_r} \right) \\ &= \frac{N \cdot N_1^{k-1}}{k \cdot (k-1)!} \left(\sum_{r=1}^{k-1} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=k-1 \\ k_1, \dots, k_r > 0}} \frac{(k-1)!}{k_1! \dots k_r!} k_1^{k_2} \cdot k_2^{k_3} \dots k_{r-1}^{k_r} \right) = N \cdot N_1^{k-1} \cdot \frac{k^{k-2}}{k!}. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из утверждения 1 из [9].

3.3. Формулировка и доказательство леммы 1.

ЛЕММА 1. В использованных ранее обозначениях при достаточно больших N при $2 \leq k \leq N_1^{1/4}$

$$|\mathcal{B}_{A,r,k_1,\dots,k_r,N}| = \frac{N_1^{k-1}}{k_1! \dots k_r!} k_1^{k_2} \cdot k_2^{k_3} \dots k_{r-1}^{k_r} \cdot (1 + \delta_3(k, N_1)),$$

где $|\delta_3(k, N_1)| \leq 2k^2/N_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать утверждение индукцией по r .

При $r = 1$ утверждение тривиально. В самом деле, число способов выбрать k_1 вершин первого уровня, очевидно, есть $C_{N_1}^{k_1}$, так как степень выделенной вершины равняется N_1 . Следовательно, учитывая, что $k_1 = k - 1$, имеем

$$\frac{N_1^{k-1}}{k_1!} \geq |\mathcal{B}_{A,1,k_1,N}| = C_{N_1}^{k_1} = \frac{N_1^{k_1}}{k_1!} = \frac{N_1^{k-1}}{k_1!} \cdot \frac{N_1^{k-1}}{N_1^{k-1}}$$

$$\geq \frac{N_1^{k-1}}{k_1!} \cdot \left(\frac{N_1 - k + 1}{N_1} \right)^{k-1} = \frac{N_1^{k-1}}{k_1!} \cdot (1 + \delta_5(N_1)),$$

где

$$|\delta_5(N_1)| = 1 - \left(1 - \frac{k-1}{N_1} \right)^{k-1} \leq \frac{(k-1)^2}{N_1} \leq \frac{2k^2}{N_1},$$

$a^b = a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-b+1)$ при $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{N}$.

Считаем, что лемма доказана для любого $r \leq i-1$ и докажем ее при $r = i$.

Возьмем конкретное дерево $\chi \in \mathcal{B}_{A,i,k_1,\dots,k_i,N}$. Рассмотрим дерево $f(\chi)$, полученное из дерева χ отбрасыванием из него всех вершин уровня i и всех ребер, соединенных с вершинами уровня i . Очевидно, что $f(\chi) \in \mathcal{B}_{A,i-1,k_1,\dots,k_{i-1},N}$. Обозначим через $\mathcal{D}_\varphi$ (где $\varphi \in \mathcal{B}_{A,i-1,k_1,\dots,k_{i-1},N}$) множество всех деревьев $\chi \in \mathcal{B}_{A,i,k_1,\dots,k_i,N}$, таких, что $f(\chi) = \varphi$.

Очевидно, что

$$\mathcal{B}_{A,i,k_1,\dots,k_i,N} = \bigsqcup_{\varphi \in \mathcal{B}_{A,i-1,k_1,\dots,k_{i-1},N}} \mathcal{D}_\varphi.$$

Отсюда следует, что

$$|\mathcal{B}_{A,i,k_1,\dots,k_i,N}| = \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{A,i-1,k_1,\dots,k_{i-1},N}} |\mathcal{D}_\varphi|. \quad (5)$$

Теперь возьмем конкретное $\varphi \in \mathcal{B}_{A,i-1,k_1,\dots,k_{i-1},N}$ и подсчитаем размер $\mathcal{D}_\varphi$.

На $(i-1)$ -м уровне дерева φ находится k_{i-1} вершин. Обозначим их $A_1, \dots, A_{k_{i-1}}$. Пусть M_j – множество вершин в полном дистанционном графе, соединенных с A_j ($1 \leq j \leq k_{i-1}$), исключая вершины, находящиеся на уровнях $0, 1, \dots, k_{i-1}$ дерева φ . Очевидно, что $N_1 - k < |M_j| \leq N_1$. Занумеруем вершины каждого из множеств M_j и обозначим l -ю вершину множества M_j через $B_{j,l}$ ($1 \leq j \leq k_{i-1}$, $1 \leq l \leq |M_j|$). При этом не исключено, что при некоторых j, j', l, l' ($1 \leq j \leq k_{i-1}$, $1 \leq l \leq |M_j|$, $1 \leq j' \leq k_{i-1}$, $1 \leq l' \leq |M_{j'}|$) вершины $B_{j,l}$ и $B_{j',l'}$ будут совпадать.

Обозначим через $\mathcal{D}_{\varphi,d(1),\dots,d(k_{i-1})}$ (где $d(1) + \dots + d(k_{i-1}) = k_i$) подмножество множества $\mathcal{D}_\varphi$, состоящее из таких деревьев, что в каждом из этих деревьев число вершин i -го уровня, соединенных с вершиной A_j , равняется $d(j)$ для любого $1 \leq j \leq k_{i-1}$. Очевидно, что

$$\mathcal{D}_\varphi = \bigsqcup_{\substack{d(1)+\dots+d(k_{i-1})=k_i \\ d(1),\dots,d(k_{i-1}) \geq 0}} \mathcal{D}_{\varphi,d(1),\dots,d(k_{i-1})}.$$

Отсюда следует, что

$$|\mathcal{D}_\varphi| = \sum_{\substack{d(1)+\dots+d(k_{i-1})=k_i \\ d(1),\dots,d(k_{i-1}) \geq 0}} |\mathcal{D}_{\varphi,d(1),\dots,d(k_{i-1})}|. \quad (6)$$

Очевидно, что

$$|\mathcal{D}_{\varphi,d(1),\dots,d(k_{i-1})}| = \sum_{\substack{l(1,1),\dots,l(1,d(1))=1 \\ l(1,1) < \dots < l(1,d(1))}}^{|M_1|} \dots \sum_{\substack{l(k_{i-1},1),\dots,l(k_{i-1},d(k_{i-1}))=1 \\ l(k_{i-1},1) < \dots < l(k_{i-1},d(k_{i-1}))}}^{|M_{k_{i-1}}|} R,$$

где

$$R = R(B_{1,l(1,1)}, \dots, B_{1,l(1,d(1))}, \dots, B_{k_{i-1},l(k_{i-1},1)}, \dots, B_{k_{i-1},l(k_{i-1},d(k_{i-1}))}) \\ = \begin{cases} 1, & \text{если все вершины } B_{1,l(1,1)}, \dots, B_{1,l(1,d(1))}, \dots, \\ & B_{k_{i-1},l(k_{i-1},1)}, \dots, B_{k_{i-1},l(k_{i-1},d(k_{i-1}))} \text{ различны,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим

$$W_1 = \sum_{\substack{l(1,1), \dots, l(1,d(1))=1 \\ l(1,1) < \dots < l(1,d(1))}}^{|M_1|} \dots \sum_{\substack{l(k_{i-1},1), \dots, l(k_{i-1},d(k_{i-1}))=1 \\ l(k_{i-1},1) < \dots < l(k_{i-1},d(k_{i-1}))}}^{|M_{k_{i-1}}|} 1, \\ W_2 = \sum_{\substack{l(1,1), \dots, l(1,d(1))=1 \\ l(1,1) < \dots < l(1,d(1))}}^{|M_1|} \dots \sum_{\substack{l(k_{i-1},1), \dots, l(k_{i-1},d(k_{i-1}))=1 \\ l(k_{i-1},1) < \dots < l(k_{i-1},d(k_{i-1}))}}^{|M_{k_{i-1}}|} (1 - R).$$

Имеем

$$|\mathcal{D}_{\varphi, d(1), \dots, d(k_{i-1})}| = W_1 - W_2.$$

Очевидно, что

$$W_1 = \prod_{j=1}^{k_{i-1}} C_{|M_j|}^{d(j)} = \frac{\prod_{j=1}^{k_{i-1}} |M_j|^{d(j)}}{d(1)! \dots d(k_{i-1})!}.$$

Имеем

$$N_1^{k_i} = N_1^{d(1)+\dots+d(k_{i-1})} \geq \prod_{j=1}^{k_{i-1}} |M_j|^{d(j)} \geq (N_1 - k)^{k_i} \\ \geq N_1^{k_i} \left(\frac{N_1 - k - k_i}{N_1} \right)^{k_i} = N_1^{k_i} \left(1 - \frac{k + k_i}{N_1} \right)^{k_i},$$

а также

$$W_2 \leq N_1^{k_{i-1}} \cdot \frac{d(1) + \dots + d(k_{i-1})}{d(1)! \dots d(k_{i-1})!} + N_1^{k_{i-2}} \cdot \frac{(d(1) + \dots + d(k_{i-1}))^2}{d(1)! \dots d(k_{i-1})!} + \dots \\ + N_1^{\max\{d(1), \dots, d(k_{i-1})\}} \cdot \frac{(d(1) + \dots + d(k_{i-1}))^{d(1)+\dots+d(k_{i-1})-\max\{d(1), \dots, d(k_{i-1})\}}}{d(1)! \dots d(k_{i-1})!} \\ \leq \frac{N_1^{k_i}}{d(1)! \dots d(k_{i-1})!} \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{d(1) + \dots + d(k_{i-1})}{N_1} \right)^t \\ = \frac{N_1^{k_i}}{d(1)! \dots d(k_{i-1})!} \cdot \frac{q}{1 - q} \leq \frac{N_1^{k_i}}{d(1)! \dots d(k_{i-1})!} \cdot \frac{2k_i}{N_1},$$

где

$$q = \frac{d(1) + \dots + d(k_{i-1})}{N_1}.$$

Отметим, что последнее неравенство выполнено при достаточно больших N_1 .

Из приведенных выше выкладок следует, что

$$|\mathcal{D}_{\varphi, d(1), \dots, d(k_{i-1})}| = \frac{N_1^{k_i}}{d(1)! \dots d(k_{i-1})!} \cdot (1 + \delta_6(k_i, k, N_1)), \quad (7)$$

где

$$|\delta_6(k_i, k, N_1)| \leq 1 - \left(1 - \frac{k + k_i}{N_1}\right)^{k_i} + \frac{2k_i}{N_1} \leq \frac{(k_i + k)k_i}{N_1} + \frac{2k_i}{N_1} \leq \frac{k_i^2 + kk_i + 2k_i}{N_1}.$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_{\varphi}| &= \sum_{\substack{d(1) + \dots + d(k_{i-1}) = k_i \\ d(1), \dots, d(k_{i-1}) \geq 0}} |\mathcal{D}_{\varphi, d(1), \dots, d(k_{i-1})}| \\ &= \left(\sum_{\substack{d(1) + \dots + d(k_{i-1}) = k_i \\ d(1), \dots, d(k_{i-1}) \geq 0}} \frac{N_1^{k_i}}{d(1)! \dots d(k_{i-1})!} \right) \cdot (1 + \delta_7(k_i, k, N_1)) \\ &= \frac{N_1^{k_i}}{k_i!} \cdot \left(\sum_{\substack{d(1) + \dots + d(k_{i-1}) = k_i \\ d(1), \dots, d(k_{i-1}) \geq 0}} \frac{k_i!}{d(1)! \dots d(k_{i-1})!} \right) \cdot (1 + \delta_7(k_i, k, N_1)) \\ &= \frac{N_1^{k_i}}{k_i!} \cdot k_{i-1}^{k_i} \cdot (1 + \delta_7(k_i, k, N_1)), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$|\delta_7(k_i, k, N_1)| \leq \frac{k_i^2 + kk_i + 2k_i}{N_1}.$$

Мы знаем, что выполнено предположение индукции для $r = i - 1$, т.е.

$$|\mathcal{B}_{A, i-1, k_1, \dots, k_{i-1}, N}| = \frac{N_1^{k_1 + \dots + k_{i-1}}}{k_1! \dots k_{i-1}!} k_1^{k_2} \cdot k_2^{k_3} \dots k_{i-2}^{k_{i-1}} \cdot (1 + \delta_8(k - k_i, N_1)),$$

где

$$|\delta_8(k - k_i, N_1)| \leq \frac{2(k - k_i)^2}{N_1}.$$

Значит, из (5), (8) и предположения индукции следует утверждение леммы при $r = i$ (т.е. доказан индуктивный шаг).

Действительно

$$|\mathcal{B}_{A, i, k_1, \dots, k_i, N}| = \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{A, i-1, k_1, \dots, k_{i-1}, N}} |\mathcal{D}_{\varphi}| = \frac{N_1^{k-1}}{k_1! \dots k_i!} k_1^{k_2} \cdot k_2^{k_3} \dots k_{i-1}^{k_i} \cdot (1 + \delta_9(N_1)),$$

где

$$\begin{aligned} |\delta_9(N_1)| &\leq |\delta_7(k_i, k, N_1)| + |\delta_8(k - k_i, N_1)| + |\delta_7(k_i, k, N_1)| \cdot |\delta_8(k - k_i, N_1)| \\ &\leq \frac{k_i^2 + kk_i + 2k_i}{N_1} + \frac{2(k - k_i)^2}{N_1} + \frac{k_i^2 + kk_i + 2k_i}{N_1} \cdot \frac{2(k - k_i)^2}{N_1} \\ &\leq \frac{k_i^2 + kk_i + 2k_i}{N_1} + \frac{2(k - k_i)^2}{N_1} + \frac{4k^4}{N_1^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{k_i^2 + kk_i + 2k_i + 2(k - k_i)^2 + 4}{N_1} = \frac{2k^2 + 3k_i(k_i - k) + 2k_i + 4}{N_1} \\ &\leq \frac{2k^2 - 6k_i + 2k_i + 4}{N_1} = \frac{2k^2 - 4k_i + 4}{N_1} \leq \frac{2k^2}{N_1}. \end{aligned}$$

В неравенствах выше использовалось, что $1 \leq k_i \leq k - 2$ и $k \leq N_1^{1/4}$.

Таким образом, методом математической индукции лемма 1 доказана.

3.4. Формулировка и доказательство леммы 2.

ЛЕММА 2. В использованных ранее обозначениях при $2 \leq k \leq N_1^{3/4}$

$$|\mathcal{B}_{A,r,k_1,\dots,k_r,N}| \leq \frac{N_1^{k-1}}{k_1! \dots k_r!} k_1^{k_2} \cdot k_2^{k_3} \dots k_{r-1}^{k_r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать утверждение индукцией по r .

При $r = 1$ утверждение тривиально. В самом деле, число способов выбрать k_1 вершин первого уровня, очевидно, есть $C_{N_1}^{k_1}$, так как степень выделенной вершины равняется N_1 . Следовательно, учитывая, что $k_1 = k - 1$, имеем

$$|\mathcal{B}_{A,1,k_1,N}| \leq \frac{N_1^{k-1}}{k_1!}.$$

Считаем, что лемма доказана для любого $r \leq i - 1$ и докажем ее при $r = i$.

Ниже мы будем использовать обозначения, которые были введены в доказательстве леммы 1. Для соответствующих объектов выполнены соотношения (5) и (6).

Очевидно, что

$$|\mathcal{D}_{\varphi,d(1),\dots,d(k_{i-1})}| \leq \prod_{j=1}^{k_{i-1}} C_{N_1}^{d(j)} \leq \prod_{j=1}^{k_{i-1}} \frac{N_1^{d(j)}}{d(j)!} = \frac{N_1^{k_i}}{d(1)! \dots d(k_{i-1})!}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_{\varphi}| &= \sum_{\substack{d(1)+\dots+d(k_{i-1})=k_i \\ d(1),\dots,d(k_{i-1}) \geq 0}} |\mathcal{D}_{\varphi,d(1),\dots,d(k_{i-1})}| \leq \sum_{\substack{d(1)+\dots+d(k_{i-1})=k_i \\ d(1),\dots,d(k_{i-1}) \geq 0}} \frac{N_1^{k_i}}{d(1)! \dots d(k_{i-1})!} \\ &= \frac{N_1^{k_i}}{k_i!} \left(\sum_{\substack{d(1)+\dots+d(k_{i-1})=k_i \\ d(1),\dots,d(k_{i-1}) \geq 0}} \frac{k_i!}{d(1)! \dots d(k_{i-1})!} \right) = \frac{N_1^{k_i}}{k_i!} k_{i-1}^{k_i}. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как выполнено предположение индукции для $r = i - 1$, т.е.

$$|\mathcal{B}_{A,i-1,k_1,\dots,k_{i-1},N}| \leq \frac{N_1^{k_1+\dots+k_{i-1}}}{k_1! \dots k_{i-1}!} k_1^{k_2} \cdot k_2^{k_3} \dots k_{i-2}^{k_{i-1}},$$

из (5), (9) и предположения индукции следует утверждение леммы при $r = i$ (т.е. доказан индуктивный шаг).

Действительно

$$|\mathcal{B}_{A,i,k_1,\dots,k_i,N}| = \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_{A,i-1,k_1,\dots,k_{i-1},N}} |\mathcal{D}_{\varphi}| \leq \frac{N_1^{k-1}}{k_1! \dots k_i!} k_1^{k_2} \cdot k_2^{k_3} \dots k_{i-1}^{k_i}.$$

Таким образом, лемма 2 доказана.

3.5. Доказательство утверждения 2. Оценим математическое ожидание величины $Y_{k,N}$ сверху. В соответствии с утверждением 1

$$\begin{aligned}
 EY_{k,N} &\leq T_{k,N} \cdot C_k^2 \cdot p^k \cdot (1-p)^{kN_1-2C_k^2} \\
 &\leq N \cdot N_1^{k-1} \cdot \frac{k^{k-2}}{k!} \frac{k(k-1)}{2} \left(\frac{c}{N_1}\right)^k \left(1 - \frac{c}{N_1}\right)^{kN_1} \cdot (1 + \delta_{10}(N)) \\
 &= \frac{N}{N_1} \cdot \frac{k^{k-2}}{2(k-2)!} (ce^{-c(1+\delta_{11}(N))})^k \cdot (1 + \delta_{10}(N)) \\
 &= \sqrt{\ln N} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}(1 + \delta'_3(N))} \cdot \frac{k^{k-2}}{2(k-2)!} (ce^{-c(1+\delta_{11}(N))})^k \cdot (1 + \delta_{10}(N)) \\
 &= \sqrt{\ln N} \cdot \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}} \cdot \frac{k^{k-2}}{2(k-2)!} (ce^{-c(1+\delta_{11}(N))})^k \cdot (1 + \delta_{12}(N)) \right],
 \end{aligned}$$

где $\delta_{10}(N) = o(1)$, $\delta_{11}(N) = o(1)$, $\delta_{12}(N) = o(1)$ (не зависят от k).

Следовательно, математическое ожидание случайной величины Z_N имеет вид

$$\begin{aligned}
 EZ_N &= \sum_{k=3}^{[N^{1/4}]} k EY_{k,N} \\
 &\leq \sqrt{\ln N} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}} \cdot (1 + \delta_{12}(N)) \sum_{k=3}^{t[N^{1/4}]} \left[\frac{k^{k-1}}{2(k-2)!} (ce^{-c(1+\delta_{11}(N))})^k \right].
 \end{aligned}$$

Рассмотрим k -й член последнего ряда. В соответствии с формулой Стирлинга при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{k^{k-1}}{2(k-2)!} (ce^{-c(1+\delta_{11}(N))})^k \sim \frac{k-1}{2} \frac{k^k}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}} (ce^{-c(1+\delta_{11}(N))})^k \\
 &= \frac{k-1}{2\sqrt{2\pi k}} (ce^{1-c(1+\delta_{11}(N))})^k = b_k.
 \end{aligned}$$

Значит, существует k_0 такое, что при $k > k_0$ имеет место неравенство $a_k < 2b_k$. Значит, сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, если таковая имеет место, влечет за собой сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Проверим сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Очевидно, что существует величина $q < 1$ такая, что при достаточно больших N

$$ce^{1-c(1+\delta_{11}(N))} \leq q = q(c) < 1.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, а значит, сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Обозначим его сумму T_c .

Таким образом, имеем

$$EZ_N \leq \sqrt{\ln N} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 2}} \cdot (1 + \delta_{13}(N)) \cdot T_c,$$

где $\delta_{13}(N) = o(1)$.

Значит, в соответствии с неравенством Чебышева имеем

$$P(Z_N \geq (\ln N)^{3/4}) \leq \frac{EZ_N}{(\ln N)^{3/4}} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Утверждение доказано.

3.6. Доказательство утверждения 3. Используя утверждение 1, имеем

$$\begin{aligned} EX_N &= \sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} k EX_{N,k} = \sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} k \sum_{j=1}^{T_{k,N}} p^{k-1} (1-p)^{f(k,N,j)} (1-p)^{kN_1-2f(k,N,j)} \\ &= \sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} kN \cdot N_1^{k-1} \frac{k^{k-2}}{k!} (1 + \delta_{14}(k, N)) \left(\frac{c}{N_1} \right)^{k-1} (1-p)^{kN_1}, \end{aligned}$$

где $0 \leq f(k, N, j) \leq C_k^2 \leq N_1^{1/2}/2$ ($f(k, N, j)$ – количество ребер в полном дистанционном графе, которое нужно убрать, чтобы индуцировать необходимое дерево), $T_{1,N} = N$ и $|\delta_{14}(k, N)| \leq (2+c)/\sqrt{N_1}$. Далее,

$$EX_N = N(1 + \delta_{15}(N)) \sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} \frac{k^{k-1}}{k!} c^{k-1} \left(1 - \frac{c}{N_1} \right)^{kN_1},$$

где $\delta_{15}(N) = o(1)$.

С учетом того, что при достаточно больших N_1

$$e^{-c-c^2/N_1} \leq \left(1 - \frac{c}{N_1} \right)^{N_1} \leq e^{-c}$$

получаем, что при достаточно больших N

$$\begin{aligned} N(1 + \delta_{15}(N)) \sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} \frac{k^{k-1}}{k!} c^{k-1} (e^{-c-c^2/N_1})^k \\ \leq EX_N \leq N(1 + \delta_{15}(N)) \sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} \frac{k^{k-1}}{k!} c^{k-1} (e^{-c})^k. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$EX_N = \frac{N}{c} (1 + \delta_{16}(N)) \sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} \frac{k^{k-1}}{k!} (ce^{-c})^k,$$

где $\delta_{16}(N) = o(1)$.

Так как $c \neq 1$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} (ce^{-c})^k,$$

очевидно, сходится, а значит, утверждение 3 доказано.

3.7. Доказательство утверждения 4. Как следует из утверждения 3,

$$|EX_N - Nt_c| = o(N).$$

Следовательно, остается доказать, что АПН

$$|X_N - EX_N| = o(N).$$

Если $k \neq l$, то

$$E(X_{N,k}X_{N,l}) \leq EX_{N,k}EX_{N,l}(1-p)^{-kl}.$$

Также для любого k верно, что

$$E(X_{N,k}^2) = E(X_{N,k}(X_{N,k} - 1)) + EX_{N,k} \leq (EX_{N,k})^2(1-p)^{-k^2} + EX_{N,k}.$$

Последние два неравенства имеют место, так как для двух подмножеств из $V(\mathcal{G}_N)$ размера a и b в случайном дистанционном графе вероятность того, что обе компоненты являются компонентами связности, равна нулю, если эти подмножества вершин пересекаются, и не превосходит произведения соответствующих вероятностей, помноженного на $(1-p)^{-ab}$, если эти подмножества вершин не пересекаются.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} E(X_N^2) &= E\left\{\left(\sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} kX_{N,k}\right)^2\right\} = \sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} (k^2 EX_{N,k}^2) + 2 \sum_{k < l} \{kl E(X_{N,k}X_{N,l})\} \\ &\leq \sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} k^2 EX_{N,k} + \sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} k^2 (EX_{N,k})^2 (1-p)^{-k^2} \\ &\quad + 2 \sum_{k < l} \{kl \cdot EX_{N,k}EX_{N,l}(1-p)^{-kl}\} \\ &\leq \sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} k^2 EX_{N,k} + \sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} k^2 (EX_{N,k})^2 \left(1 + \frac{2ck^2}{N_1}\right) \\ &\quad + 2 \sum_{k < l} \left\{kl \cdot EX_{N,k}EX_{N,l} \left(1 + \frac{2ckl}{N_1}\right)\right\} \\ &\leq [N_1^{1/4}] \sum_{k=1}^{[N_1^{1/4}]} k EX_{N,k} + \left(1 + \frac{2c}{\sqrt{N_1}}\right) (EX_N)^2 \\ &= [N_1^{1/4}] EX_N + \left(1 + \frac{2c}{\sqrt{N_1}}\right) (EX_N)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, в соответствии с неравенством Чебышева

$$\begin{aligned} P(|X_N - EX_N| \geq N_1^{4/5}) &\leq \frac{EX_N^2 - (EX_N)^2}{N_1^{8/5}} \\ &\leq \frac{[N_1^{1/4}] EX_N + (2c/\sqrt{N_1})(EX_N)^2}{N_1^{8/5}} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Что и доказывает данное утверждение.

3.8. Доказательство утверждения 5. Поскольку в любом связном графе можно так убрать несколько ребер, чтобы вершины вместе с оставшимися ребрами образовывали дерево, то, пользуясь частью 2 утверждения 1, имеем

$$\begin{aligned} EU_{N,k} &\leq T_{k,N} p^{k-1} (1-p)^{kN_1-2C_k^2} \\ &\leq NN_1^{k-1} \frac{k^{k-2}}{k!} \frac{c^{k-1}}{N_1^{k-1}} \left(1 - \frac{c}{N_1}\right)^{kN_1-2C_k^2} \leq Nc^{k-1} \frac{k^{k-2}}{k!} e^{-c(k-2C_k^2/N_1)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$EU_N(h) = \sum_{k=[h \ln N]+1}^{[N_1^{3/4}]} k EU_{N,k} \leq \frac{N}{c} \sum_{k=[h \ln N]+1}^{[N_1^{3/4}]} kc^k \frac{k^{k-2}}{k!} e^{-c(k-2C_k^2/N_1)}.$$

Пользуясь неравенством $k! \geq (k/e)^k$, имеем

$$\begin{aligned} a_k &= kc^k \frac{k^{k-2}}{k!} e^{-c(k-2C_k^2/N_1)} \leq c^k \frac{k^{k-1}}{k^k e^{-k}} e^{-c(k-2C_k^2/N_1)} \\ &= \frac{1}{k} [ce^{-(c-1)+2c \cdot C_k^2/(kN_1)}]^k \leq \frac{1}{k} [ce^{-(c-1)+2c/(N_1^{1/4})}]^k. \end{aligned}$$

Очевидно, что существует величина $q < 1$ такая, что при достаточно больших N

$$ce^{-(c-1)+2c/(N_1^{1/4})} \leq q = q(c) < 1.$$

Следовательно, если положить $h = -1/\ln q$, то

$$EU_N(h) \leq \frac{N}{c} \sum_{[h \ln N]+1}^{[N_1^{3/4}]} \frac{1}{k} q^k \leq \frac{N}{ch \ln N} \frac{q^{h \ln N}}{1-q} \leq \frac{Nq^{\log_{1/q} N}}{ch(1-q) \ln N} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Следовательно, в соответствии с неравенством Чебышева

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(U_N(h) = 0) = 1.$$

Утверждение доказано.

3.9. Доказательство утверждения 6. Имеем

$$\begin{aligned} (1-p)^\alpha + (1-p)^\beta - (1-p)^{\alpha+\beta} &= \sum_{i=0}^{\alpha} C_{\alpha}^i (-1)^i p^i + \sum_{i=0}^{\beta} C_{\beta}^i (-1)^i p^i - \sum_{i=0}^{\alpha+\beta} C_{\alpha+\beta}^i (-1)^i p^i \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha+\beta} \frac{\alpha^i + \beta^i - (\alpha+\beta)^i}{i!} (-1)^i p^i = 1 - \alpha\beta p^2 + \sum_{i=3}^{\alpha+\beta} \frac{\alpha^i + \beta^i - (\alpha+\beta)^i}{i!} (-1)^i p^i \\ &\leq 1 - \alpha\beta p^2 + \alpha\beta p^2 \cdot \frac{3((\alpha+\beta-2)p)}{3!} + \sum_{i=5}^{\alpha+\beta} \frac{\alpha^i + \beta^i - (\alpha+\beta)^i}{i!} (-1)^i p^i. \end{aligned}$$

Так как $(x + y)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j x^j y^{n-j}$, то при $i \geq 5$ имеем

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^i - \alpha^i - \beta^i &= \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j \alpha^j \beta^{i-j} = \sum_{j=1}^{i-1} C_{i-2}^{j-1} \left(\frac{C_i^j}{C_{i-2}^{j-1}} \right) \alpha^j \beta^{i-j} \\ &\leq \alpha \beta \sum_{j=1}^{i-1} 2(1+i-2) C_{i-2}^{j-1} \alpha^{j-1} \beta^{i-2-(j-1)} \leq 2\alpha\beta i (\alpha + \beta)^{i-2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (1-p)^\alpha + (1-p)^\beta - (1-p)^{\alpha+\beta} &\leq 1 - \alpha\beta p^2 + \alpha\beta p^2 \cdot \frac{3((\alpha + \beta - 2)p)}{3!} + \alpha\beta p^2 \cdot 2 \sum_{i=5}^{\alpha+\beta} \frac{((\alpha + \beta)p)^{i-2}}{(i-1)!} \\ &\leq 1 - \alpha\beta p^2 \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{(k)!} \right) \leq 1 - \frac{\alpha\beta p^2}{3}. \end{aligned}$$

4. Доказательство теоремы

Пункт б) теоремы доказан в [10] с помощью техники ветвящихся процессов. При этом из утверждения 3 следует, что все вершины, за исключением $o(N)$, содержатся в компонентах, являющихся деревьями.

Существенно более нетривиальным является пункт а) теоремы. Для его доказательства проведем следующий трюк. Случайный выбор ребер при построении графов из пространства $\mathcal{G}^{\text{dist}}(N, p)$ с вероятностью $p = c/N_1$ (где $c > 1$) проведем в два этапа: сначала ребра данного дистанционного графа выбираем с вероятностью $p_1 = c_1/N_1 < p$, где $1 < c_1 < c$, а затем те ребра, которые не были выбраны на первом этапе, выбираем с вероятностью $p_2 = (p - p_1)/(1 - p_1)$, т.е. выполнено соотношение $p = p_1 + (1 - p_1)p_2$. Заметим, что $p_2 = \gamma/N_1 \geq (c - c_1)/N_1$ (где $\gamma > 0$). Выберем c_1 таким, чтобы выполнялось условие $\gamma < 1$. Заметим, что γ , вообще говоря, зависит от N .

Проанализируем, что получается после первого этапа.

Так как $c_1 > 1$, из утверждений 2, 4 и 5 имеем, что количество вершин графа в компонентах размера, не превышающего $h \ln N$ (где $h = h(c)$), АПН равняется

$$X'_N = N t_{c_1}(1 + \delta_{17}(N)),$$

где $\delta_{17}(N) = o(1)$. Следовательно, в соответствии с утверждением 5 $N(1 - t_{c_1}) \times (1 + o(1))$ вершин содержатся в компонентах, размер которых превышает $[N_1^{3/4}]$. Если эти вершины содержатся в одной компоненте, то, очевидно, они останутся в одной компоненте и после второго этапа. Предположим, что эти вершины содержатся в разных компонентах. Назовем такие компоненты *плохими компонентами*.

Докажем, что в таком случае после второго этапа между двумя любыми плохими компонентами будет существовать путь из ребер.

Для этого рассмотрим две произвольные плохие компоненты (обозначим их φ и χ). Оценим сверху вероятность того, что между этими компонентами после второго этапа не существует пути.

Пусть $|\varphi| = M$, $|\chi| = K$. Как было доказано в утверждении 2 из [10], число общих соседних вершин для двух любых различных вершин графа $\mathcal{G}_N$ при достаточно больших N не меньше, чем

$$N_2 = 10^{-4} \frac{N}{\ln N}.$$

Обозначим через $\omega_{A,B}$ множество общих соседних вершин для вершин A и B , где $A \in \varphi$, $B \in \chi$. Пусть также

$$\Omega = \bigcup_{A \in \varphi, B \in \chi} \omega_{A,B}.$$

Пусть $\Omega = \{A_1, \dots, A_s\}$. Пусть, наконец, $A_1, \dots, A_h \in \varphi$, $A_{h+1}, \dots, A_g \in \chi$, $A_{g+1}, \dots, A_s \notin \varphi \cup \chi$.

Для каждой вершины $A_i \in \Omega$ введем α_i и β_i , обозначающие количество ребер, связывающих вершину A_i с вершинами множеств φ и χ соответственно. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i \beta_i \geqslant M K N_2.$$

Тогда имеет место хотя бы одно из неравенств

$$\sum_{i=1}^g \alpha_i \beta_i \geqslant \frac{M K N_2}{2} \quad (10)$$

или

$$\sum_{i=g+1}^s \alpha_i \beta_i \geqslant \frac{M K N_2}{2}. \quad (11)$$

Если имеет место (10), то либо $\sum_{i=1}^h \alpha_i \beta_i \geqslant M K N_2 / 4$, в таком случае

$$\sum_{i=1}^h \beta_i \geqslant \frac{K N_2}{4},$$

либо $\sum_{i=h+1}^g \alpha_i \beta_i \geqslant M K N_2 / 4$, в таком случае

$$\sum_{i=h+1}^g \alpha_i \geqslant \frac{M N_2}{4}.$$

Таким образом, при достаточно больших N количество ребер между вершинами множеств φ и χ оценивается следующим образом:

$$\text{edge}(\varphi, \chi) \geqslant \min(M, K) \frac{N_2}{4} \geqslant N^{13/8}.$$

Значит, вероятность того, что компоненты φ и χ останутся несвязными после второго этапа, это

$$p_1(\varphi, \chi) \leqslant \left(1 - \frac{\gamma}{N_1}\right)^{\text{edge}(\varphi, \chi)} \leqslant \exp(-\gamma \cdot N^{5/8}).$$

Пусть теперь имеет место (11). Оценим вероятность того, что компоненты φ и χ останутся несвязными после второго этапа следующим образом:

$$p_2(\varphi, \chi) \leq \prod_{i=g+1}^s ((1-p_2)^{\alpha_i} + (1-p_2)^{\beta_i} - (1-p_2)^{\alpha_i+\beta_i}).$$

Так как $(\alpha + \beta) \leq N_1$, а $p < 1/N_1$, то $(\alpha + \beta)p < 1$, а значит, можно воспользоваться утверждением 6. Следовательно,

$$\begin{aligned} p_2(\varphi, \chi) &\leq \prod_{i=g+1}^s (1-p^2)^{\alpha_i\beta_i/3} \leq (1-p^2)^{\sum_{i=g+1}^s \alpha_i\beta_i/3} \\ &\leq (1-p^2)^{MKN_2/6} \leq \left(1 - \frac{\gamma^2}{N_1^2}\right)^{N_1^{7/3}} \leq \exp(-\gamma^2 \cdot N_1^{1/3}). \end{aligned}$$

Общее количество плохих компонент при достаточно больших N не больше, чем $N/N_1^{3/4} \leq N^{1/3}$. Следовательно, вероятность того, что после второго этапа останется пара компонент, между которыми нет пути, оценивается так:

$$p_{(2)} \leq N^{2/3} \exp(-N^{1/4}) \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Таким образом, доказано, что после второго этапа, по меньшей мере, $N(1-t_{c_1}) \times (1+o(1))$ вершин содержатся в одной компоненте, назовем ее *гигантской компонентой*. Кроме того, из утверждений 2, 4 и 5 имеем, что $Nt_c(1+o(1))$ вершин содержатся в компонентах, размер которых не превышает $h \ln N$. Обозначим размер самой крупной, после гигантской, компоненты через D . Из вышесказанного следует, что $D \leq N(t_{c_1} - t_c)(1+o(1))$.

Так как $t_{c_1} \rightarrow t_c$ при $c_1 \rightarrow c$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $c_1 \in (c - \delta; c)$ для достаточно больших N имеем

$$t_{c_1} \in (t_c; t_c + \varepsilon) \quad \implies \quad \frac{D}{N} < 2\varepsilon \quad \implies \quad \frac{D}{N} = o(1) \Rightarrow D = o(N).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.
- [2] P. Erdős, A. Rényi, "On random graphs. I", *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959), 290–297.
- [3] P. Erdős, A. Rényi A., "On the evolution of random graphs", *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5** (1960), 17–61.
- [4] P. Erdős, A. Rényi, "On the strength of connectedness of a random graph", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **12**:1-2 (1961), 261–267.
- [5] B. Bollobás, *Random Graphs*, Academic Press, New York, 1985.
- [6] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Теория вероятностей и математическая статистика, Физматлит, М., 2000.
- [7] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.

- [8] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146.
- [9] А. Р. Ярмухаметов, “Древесные компоненты в случайных дистанционных графах специального вида”, *Современная математика и ее приложения*, **20** (2011), 98–110.
- [10] А. Р. Ярмухаметов, “О связности случайных дистанционных графов специального вида”, *Чебышевский сб.*, **10**:1(29) (2009), 95–108.
- [11] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Т. 1, Мир, М., 1984.

А. Р. Ярмухаметов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ayarmuhametov@yandex.ru

Поступило

02.03.2011

Исправленный вариант

20.06.2011