Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Куликова, О проблеме сопряженности в группе $F/N_1 \cap N_2$, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 6, 853–868

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9068>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 11:23:06

О проблеме сопряженности в группе $F/N_1 \cap N_2$

О. В. Куликова

Пусть N_1 (соответственно N_2) – нормальное замыкание конечного симметризованного множества R_1 (соответственно R_2) в конечнопорожденной свободной группе $F = F(A)$. Известно, что если R_i удовлетворяет условию $C(6)$, то в группе F/N_i разрешима проблема сопряженности. В работе доказывается, что если к условию $C(6)$ на множестве $R_1 \cup R_2$ добавить условие аторичности копредставления $\langle A \mid R_1, R_2 \rangle$, то проблема сопряженности будет разрешима и в группе $F/N_1 \cap N_2$. В частности, для разрешимости проблемы сопряженности в $F/N_1 \cap N_2$ достаточно потребовать, чтобы множество $R_1 \cup R_2$ удовлетворяло условию $C(7)$.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm9068

Введение. Пусть $F = F(A)$ – свободная группа, порожденная конечным алфавитом A . Пусть N_1 (соответственно N_2) – нормальное замыкание конечного непустого множества R_1 (соответственно R_2) элементов в F . Считаем, что множество R_i , $i = 1, 2$, симметризовано, т.е. все элементы из R_i циклически приведены и для каждого r из R_i все циклические перестановки элементов r и r^{-1} также лежат в R_i .

Будут использоваться следующие обозначения. Графическое (побуквенное) равенство слов $u, v \in F$ будет обозначаться $u \equiv v$. Свободное равенство будет обозначаться $u = v$. Если слова $u, v \in F$ представляют равные элементы в некоторой группе H , будем писать: $u = v$ в H .

Если два слова $u, v \in F$ равны как в группе F/N_1 , так и в группе F/N_2 , то, очевидно, они равны и в группе $F/N_1 \cap N_2$. Естественно спросить, если u и v сопряжены как в F/N_1 , так и в F/N_2 , будет ли из этого следовать, что u и v сопряжены в $F/N_1 \cap N_2$? Очевидно, ответ на этот вопрос отрицательный. В качестве примера, показывающего это, можно рассмотреть свободную группу $F = F(a, b, c)$, множества $R_1 = \{a^{\pm 1}\}$, $R_2 = \{b^{\pm 1}\}$ и слова $u = c^2ba$ и $v = cbca$.

В данной работе рассматривается вопрос, какие условия надо наложить на R_1 и R_2 , чтобы из разрешимости проблемы сопряженности в F/N_1 и F/N_2 следовала бы разрешимость проблемы сопряженности в $F/N_1 \cap N_2$.

Отметим, что данная задача естественным образом связана с подпрямыми произведениями. Действительно, $F/N_1 \cap N_2$ можно рассматривать, как подгруппу прямого произведения F/N_1 и F/N_2 , при этом $F/N_1 \cap N_2$ является подпрямым произведением F/N_1 и F/N_2 . И наоборот, для любого подпрямого произведения H некоторых

групп G_1 и G_2 существуют нормальные подгруппы N_1 и N_2 в некоторой свободной группе F такие, что

$$F/N_i \cong G_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{и} \quad F/N_1 \cap N_2 \simeq H.$$

В свою очередь подпрямое произведение двух групп тесно связано с конструкцией расслоенного произведения в категории групп, где под *расслоенным произведением* понимается подгруппа

$$H = \{(x, y) \in G_1 \times G_2 \mid \Psi_1(x) = \Psi_2(y)\},$$

соответствующая паре коротких точных последовательностей групп

$$1 \rightarrow L_i \rightarrow G_i \xrightarrow{\Psi_i} Q \rightarrow 1, \quad i = 1, 2.$$

В [1] доказано, что подгруппа $H \leq G_1 \times G_2$ является подпрямым произведением групп G_1 и G_2 тогда и только тогда, когда существует группа Q и сюръективные гомоморфизмы $\Psi_i: G_i \rightarrow Q$ такие, что H является расслоенным произведением гомоморфизмов Ψ_1 и Ψ_2 .

Вопрос о разрешимости проблемы сопряженности подпрямых произведений для некоторых групп уже рассматривался ранее (см., например, [1]–[3]). Так, в работе Миллера [2] приводится пример расслоенного произведения, для которого $G_1 = G_2$ и эта группа является конечно порожденной нециклической свободной группой, $L_1 = L_2$, $\Psi_1 = \Psi_2$, а Q является некоторой конечно представленной группой с неразрешимой проблемой равенства, при этом в H неразрешима проблема сопряженности. Таким образом, естественный вопрос, а не будет ли всегда из разрешимости проблемы сопряженности в F/N_1 и F/N_2 следовать разрешимость проблемы сопряженности в $F/N_1 \cap N_2$, имеет отрицательный ответ. Так как группа Q изоморфна $F/N_1 N_2$, из примера Миллера получается, что для разрешимости проблемы сопряженности в $F/N_1 \cap N_2$ необходимо требовать, как минимум, разрешимость проблемы равенства в $F/N_1 N_2$.

Чтобы сформулировать основные результаты настоящей работы, напомним определения геометрических объектов, называемых картинками. Картинки были введены в [4], [5]. Этот объект является удобным инструментом при решении различных задач комбинаторной теории групп (см., например, [6], [7] и ссылки, данные в этих работах).

Пусть N – нормальное замыкание симметризованного множества R слов в свободной группе $F(A)$.

Картинкой P над копредставлением $\hat{G} = \langle A \mid R \rangle$ на ориентированной поверхности T называется конечный набор “вершин” $V_1, \dots, V_n \in T$ вместе с конечным набором простых связных попарно непересекающихся ориентированных “ребер”

$$E_1, \dots, E_m \in T \setminus \{\{V_1, \dots, V_n\} \cup \partial T\},$$

помеченных словами из $F(A)$. При этом ребро может соединять две (возможно совпадающие) вершины, вершину и точку на ∂T или две различные точки на ∂T . Более того, некоторые ребра могут не иметь ни начала, ни конца и являться циклами, такие ребра будут называться *ребрами-циклами*.

Ниже в работе будут рассматриваться только такие пути на T , которые не проходят через вершины и пересекают ребра картинка P конечное число раз (более того, если путь пересекает ребро, то он действительно пересекает, а не просто касается его). При движении вдоль произвольного ориентированного пути γ в положительном направлении, мы встречаем последовательность ребер $E_{i_1}, \dots, E_{i_k}$ с метками $g_{i_1}, \dots, g_{i_k}$ соответственно. Эти метки образуют слово $g_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \cdots g_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}}$, где $\varepsilon_{i_j} \in \{1, -1\}$ равняется локальному индексу пересечения ребра E_{i_j} и пути γ . Это слово будет называться *словом вдоль пути γ* (или *меткой γ*) и обозначаться через $\text{Lab}^+(\gamma)$. Подслово $g_{i_j}^{\varepsilon_{i_j}}$, $j = 1, \dots, k$, будет называться *вкладом ребра E_{i_j} в метку пути γ* , подслово $g_{i_j}^{\varepsilon_{i_j}} g_{i_{j+1}}^{\varepsilon_{i_{j+1}}}$, $j = 1, \dots, k-1$, будет называться *вкладом ребер E_{i_j} и $E_{i_{j+1}}$ в метку пути γ* и т.д. Движение по γ в отрицательном направлении дает слово $\text{Lab}^-(\gamma) \equiv \text{Lab}^+(\gamma)^{-1}$.

Если путь γ замкнутый, рассмотрим некоторую точку p на γ , не лежащую ни на каком ребре картинка P . Слово, читаемое вдоль γ , начиная с точки p , будет обозначаться через $\text{Lab}_p^+(\gamma)$ или через $\text{Lab}_p^-(\gamma)$ (в зависимости от направления движения вдоль γ). Меняя расположение точки p , мы получаем то же слово с точностью до циклической перестановки. Если направление движения вдоль γ будет неважно, слово вдоль γ будет обозначаться через $\text{Lab}_p(\gamma)$.

Для каждой вершины V картинка P рассмотрим окружность Σ маленького радиуса с центром в V и точку $p \in \Sigma$, не принадлежащую никакому ребру картинка P . Слово $\text{Lab}_p^+(\Sigma)$ называется *меткой вершины V* . Для окончательного определения картинка над копредставлением $\hat{G} = \langle A \mid R \rangle$ на поверхности T остается потребовать, чтобы метки всех вершин в P принадлежали R .

Ниже мы будем рассматривать картинка на поверхности T , где T – тор (торические картинка), диск (дисковые картинка) или кольцо (кольцевые картинка).

В картинке на диске *граничной меткой* картинка называется слово $\text{Lab}_{\bar{p}}^+(\bar{\Sigma})$, где $\bar{\Sigma}$ – окружность около границы диска ∂T , а $\bar{p}$ – точка на окружности $\bar{\Sigma}$, не принадлежащая ребрам.

Следующая лемма – хорошо известный результат (его можно получить из теоремы 1.1 и леммы 1.2 гл. V в [8] и двойственности):

ЛЕММА 1. Пусть W – непустое слово в алфавите A . Тогда W представляет единицу в группе $\hat{G} = F/N$ тогда и только тогда, когда существует дисковая картинка над копредставлением $\langle A \mid R \rangle$ группы $\hat{G}$ с граничной меткой, равной W .

Диполем называются две различные вершины V_1 и V_2 картинка P , соединенные ребром, параллельно которому можно провести простой путь ψ , не пересекающий никакие ребра и не проходящий через вершины, соединяющий точки p_1 и p_2 на окружностях Σ_1 и Σ_2 вокруг этих вершин, так что

$$\text{Lab}_{p_1}^+(\Sigma_1) \equiv \text{Lab}_{p_2}^-(\Sigma_2).$$

Копредставление $\hat{G} = \langle A \mid R \rangle$ называется *аторическим* (см., например, [9]), если любая связная торическая картинка над копредставлением $\hat{G} = \langle A \mid R \rangle$, содержащая вершины, содержит диполь.

Следующая теорема 1 будет доказана в п. 1.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – свободная группа, порожденная конечным алфавитом A , N_1 (соответственно N_2) – нормальное замыкание конечного непустого симметризованного множества R_1 (соответственно R_2) элементов в F .

Пусть для группы $G_i = F/N_i$, $i = 1, 2$, выполняются следующие условия:

- 1.1) в G_i разрешима проблема сопряженности;
- 1.2) в G_i существует алгоритм, позволяющий по несократимому слову $x \in F$, $x \neq 1$, определить все $z \in F$ такие, что $x = \langle z \rangle$ в G_i , причем таких различных элементов z из G_i конечное число.

И пусть для группы $G = F/N_1 N_2$ выполняется следующее:

- 2.1) в G разрешима проблема вхождения в циклическую подгруппу;
- 2.2) копредставление $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$ является аторическим.

Тогда в $F/N_1 \cap N_2$ разрешима проблема сопряженности.

Отметим, что условие 2.2 теоремы 1 обеспечивает равенство $N_1 \cap N_2 = [N_1, N_2]$ для непересекающихся R_1 и R_2 (см., например, [10], [11]).

Прежде чем сформулировать теорему 2, напомним определение малых сокращений $C(k)$ (см. [8]). Предположим, что r_1 и r_2 – различные элементы из R такие, что $r_1 \equiv bc_1$ и $r_2 \equiv bc_2$. В этом случае элемент b называется *куском относительно множества R* . Говорят, что множество R удовлетворяет *условию $C(k)$* , где k – некоторое натуральное число, если никакой элемент из R не является произведением менее, чем k кусков.

В обозначениях теоремы 1 имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Если множество $R_1 \cup R_2$ удовлетворяет условию $C(6)$ и копредставление $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$ является аторическим, то в группе $F/N_1 \cap N_2$ разрешима проблема сопряженности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Покажем, что теорема 2 следует из теоремы 1. Так как $R_1 \cup R_2$ удовлетворяет условию $C(6)$, условию $C(6)$ удовлетворяют и подмножества R_1 и R_2 . Значит, условие 1.1 для G_1 и G_2 следует из теоремы 7.6 [8]; условие 2.1 следует из теоремы 1 [12]; условие 1.2 выводятся из теоремы 1 [12], теоремы 2 [12] и (если в G_i есть элементы конечного порядка) теоремы 1.4 [13] с учетом теоремы 13.3 [9].

Известно, что условие $C(7)$ обеспечивает аторичность (доказательство этого факта аналогично теореме 13.3 в [9]), поэтому из теоремы 2 (в обозначениях теоремы 1) получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если множество $R_1 \cup R_2$ удовлетворяет условию $C(7)$, то в группе $F/N_1 \cap N_2$ разрешима проблема сопряженности.

1. Предложение 1 и вывод из него теоремы 1. Ниже в доказательстве, не оговаривая особо, будем использовать тот факт, что из условия 1.1 (соответственно 2.1) теоремы 1 следует разрешимость проблемы равенства в группе G_i , $i \in \{1, 2\}$ (соответственно G).

Пусть u и v – два несократимых слова в F . Для каждого $i \in \{1, 2\}$ по условию 1.1 теоремы 1 существует алгоритм, определяющий, представляют ли u и v сопряженные элементы в $G_i = F/N_i$. Если u и v оказались не сопряженными в G_i хотя бы для одного i , то, очевидно, u и v не сопряжены и в $F/N_1 \cap N_2$. Поэтому далее считаем,

что для каждого $i \in \{1, 2\}$ u и v сопряжены в G_i словом $h_i \in F$. Следовательно, слово $h_i^{-1}uh_iv^{-1}$ равно единице в G_i .

По условию 1.1 теоремы 1 слово $h_1^{-1}uh_1v^{-1}$ выражается через определяющие соотношения R_1 группы G_1 в виде

$$\prod_{s=1}^{m_1} g_{1,s} r_{1,s} g_{1,s}^{-1}, \quad \text{где } r_{1,s} \in R_1, \quad g_{1,s} \in F.$$

По этому выражению построим дисковую картинку P_1 над копредставлением $G_1 = \langle A \mid R_1 \rangle$ с граничной меткой, равной $h_1^{-1}uh_1v^{-1}$, так чтобы в P_1 ребра были помечены буквами. При этом на границе ∂P_1 картинки P_1 зафиксируем четыре точки a_1, b_1, c_1, d_1 , не лежащие на ребрах и разбивающие ∂P_1 на четыре подпути так, чтобы вдоль подпутей $[a_1, b_1]$, $[b_1, c_1]$, $[c_1, d_1]$, $[d_1, a_1]$ были написаны слова, тождественно равные $h_1^{-1}u, h_1, v^{-1}$ соответственно. Склеиваем P_1 по подпутям $[a_1, b_1]$ и $[d_1, c_1]$ и получаем кольцевую картинку $\bar{P}_1$ с двумя граничными циклами, образованными подпутем $[b_1, c_1]$ с меткой u и подпутем $[d_1, a_1]$ с меткой v^{-1} . При этом точки b_1 и c_1 (соответственно d_1 и a_1) склеились в одну точку $(bc)_1$ (соответственно $(ad)_1$). Склеенные подпути $[a_1, b_1]$ и $[d_1, c_1]$ образуют подпуть, который обозначим через Conj_1 .

Аналогично, заменяя в обозначениях индекс 1 на индекс 2, по слову $h_2^{-1}u^{-1}h_2v$ строится кольцевая картинка $\bar{P}_2$ над копредставлением $G_2 = \langle A \mid R_2 \rangle$ с той особенностью, что метка граничного цикла, образованного подпутем $[b_2, c_2]$, равна u^{-1} , а метка граничного цикла, образованного $[d_2, a_2]$, равна v .

Склеиваем $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ по их границам и получаем картинку P на торе T над копредставлением $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$. При этом цикл $[d_1, a_1]$ (соответственно $[b_1, c_1]$), склеиваясь с $[a_2, d_2]$ (соответственно $[c_2, b_2]$), образует цикл $\underline{\text{Equ}}$ (соответственно $\overline{\text{Equ}}$). Точки $(ad)_1$ и $(ad)_2$ (соответственно $(bc)_1$ и $(bc)_2$) склеились в одну точку p_v (соответственно p_u). Цикл на торе, образованный склеенными подпутями Conj_1 и Conj_2 , обозначим через Conj . Циклы $\underline{\text{Equ}}$ и $\overline{\text{Equ}}$ будут называться *экваторами*. Точки p_u, p_v будут называться *полюсами*.

Имеем, $\text{Lab}_{p_v}(\underline{\text{Equ}})$ равна v^{-1} или v , $\text{Lab}_{p_u}(\overline{\text{Equ}})$ равна u или u^{-1} в зависимости от направления движения вдоль $\underline{\text{Equ}}$ и $\overline{\text{Equ}}$. Зафиксируем положительное направление движения вдоль экваторов так, чтобы $\text{Lab}_{p_v}^+(\underline{\text{Equ}})$ равнялось v , $\text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}})$ равнялось u .

Экваторы $\underline{\text{Equ}}$ и $\overline{\text{Equ}}$ делят тор T на два кольца (соответствующие $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$). Кольцо, содержащее вершины с метками из R_1 (соответственно R_2), назовем R_1 -*кольцом* (соответственно R_2 -*кольцом*).

В дальнейшем к картинке P на торе T будут применяться так называемые *допустимые преобразования*, т.е. такие, что после этих преобразований:

- (i) $\text{Lab}_{p_v}^+(\underline{\text{Equ}})$ и $\text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}})$ заменяются на слова, равные соответственно v и u с точностью до элементов из $N_1 \cap N_2$;
- (ii) все обобщенные вершины с метками из N_1 находятся только в R_1 -кольце, все обобщенные вершины с метками из N_2 – только в R_2 -кольце, где под *обобщенными вершинами* понимаются вершины (можно считать “маленькие” дисковые картинки), метки которых могут быть произвольными необязательно приведенными словами из N_1 (или N_2);
- (iii) экваторы и Conj остаются неизменными.

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся предложением 1, которое будет доказано в п. 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть копредставление $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$ является аторическим (условие 2.2 теоремы 1). Тогда существует конечная последовательность допустимых преобразований картинки P , в результате которой метки экваторов примут один из следующих видов:

$$(1) \text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}}) = \alpha(\omega' \nu_1 \nu_2) \alpha^{-1}, \text{Lab}_{p_v}^+(\text{Equ}) = \beta(\omega' \nu_1 \nu_2) \beta^{-1};$$

$$(2) \text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}}) = \alpha(\omega^k \nu_1 \omega^{-l} \nu_2 \omega^l) \alpha^{-1}, \text{Lab}_{p_v}^+(\text{Equ}) = \beta(\omega^k \nu_1 \nu_2) \beta^{-1},$$

где $\nu_i \in N_i$, $\alpha, \beta, \omega, \omega' \in F$, $l, k \in \mathbb{Z}$, $l \neq 0$ определяются в конце по картинке P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По предложению 1 получаем, что возможны два случая представления слов u и v с точностью до элементов из $N_1 \cap N_2$. Если u и v имеют вид (1), то они, очевидно, сопряжены в $F/N_1 \cap N_2$ словом $h = \alpha^{-1}\beta$. Рассмотрим случай, когда u и v имеют вид (2). Введем следующие обозначения:

$$\tilde{u} = \alpha^{-1}u\alpha, \quad \tilde{v} = \beta^{-1}v\beta,$$

$$\text{Roots}_{G_1}(\tilde{v}) = \{c \in F \mid \exists s = s(c) \in \mathbb{Z}: \tilde{v} = c^s \text{ в } G_1\},$$

$$\text{Roots}_{G_2}(\tilde{v}) = \{d \in F \mid \exists t = t(d) \in \mathbb{Z}: \tilde{v} = d^t \text{ в } G_2\}.$$

ЛЕММА 2. Пусть копредставление $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$ является аторическим (условие 2.2 теоремы 1) и имеютя равенства

$$u = \alpha(\omega^k \nu_1 \omega^{-l} \nu_2 \omega^l) \alpha^{-1}, \quad v = \beta(\omega^k \nu_1 \nu_2) \beta^{-1} \quad \text{в } F/N_1 \cap N_2.$$

Тогда u и v сопряжены в $F/N_1 \cap N_2$ в том и только том случае, когда существуют $c \in \text{Roots}_{G_1}(\tilde{v})$, $d \in \text{Roots}_{G_2}(\tilde{v})$, $\bar{s}, \bar{t} \in \mathbb{Z}$ с условием $0 \leq \bar{s} < s(c)$, $0 \leq \bar{t} < t(d)$ такие, что $d^{-\bar{t}} c^{-\bar{s}} \omega^l$ принадлежит циклической подгруппе $\langle \tilde{v} \rangle$ группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Допустим, существует такое $h \in F$, что

$$u = h^{-1}vh \quad \text{в } F/N_1 \cap N_2.$$

Тогда $u = h^{-1}vh$ как в F/N_1 , так и в F/N_2 . Очевидно, что u и v сопряжены словом h тогда и только тогда, когда $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ сопряжены словом x , где $x = \alpha^{-1}h\beta$. Поэтому далее будем рассматривать $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ и исследовать слово x .

В $G_1 = F/N_1$ слово $\tilde{u}$ равно $\omega^{-l}(\omega^k \nu_2) \omega^l$, а слово $\tilde{v}$ равно $\omega^k \nu_2$. Так как $\tilde{u} = x^{-1}\tilde{v}x$ в G_1 , получаем, что $\omega^l x^{-1}$ и $\tilde{v}$ перестановочны в G_1 . По условию 2.2 теоремы 1 копредставление $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$ является аторическим, значит, и копредставление $G_1 = \langle A \mid R_1 \rangle$ является аторическим. По теореме 13.5 [9] из этого следует, что существуют $c \in \text{Roots}_{G_1}(\tilde{v})$ такое, что

$$\tilde{v} = c^s, \quad \omega^l x^{-1} = c^{m_1}$$

в группе G_1 для некоторых $s = s(c)$, $m_1 \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ равны $\omega^k \nu_1$ в $G_2 = F/N_2$. Так как $\tilde{u} = x^{-1}\tilde{v}x$ в G_2 , получаем, что x^{-1} и $\tilde{v}$ перестановочны в G_2 . А значит, по условию 2.2 теоремы 1 и теоремы 13.5 [9] существует $d \in \text{Roots}_{G_2}(\tilde{v})$ такое, что

$$\tilde{v} = d^t, \quad x^{-1} = d^{m_2} \quad \text{в } G_2$$

для некоторых $t = t(d)$, $m_2 \in \mathbb{Z}$.

Из равенств $\omega^l x^{-1} = c^{m_1}$ в G_1 и $x^{-1} = d^{m_2}$ в G_2 получаем, что $\omega^l = c^{m_1} d^{-m_2}$ в группе $G = F/N_1 N_2$. Так как $\tilde{v} = c^s$ в G_1 , $\tilde{v} = d^t$ в G_2 , имеем $\omega^l = c^{\bar{s}} d^{\bar{t}} \tilde{v}^p$ в группе G для $0 \leq \bar{s} < s$, $0 \leq \bar{t} < t$ и некоторого целого числа p , т.е. $d^{-\bar{t}} c^{-\bar{s}} \omega^l = \tilde{v}^p$ в G .

Проверим обратное утверждение. Пусть $d^{-\bar{t}} c^{-\bar{s}} \omega^l = \tilde{v}^p$ в $G = F/N_1 N_2$. Докажем, что u и v сопряжены в $F/N_1 \cap N_2$. Так как $d^{-\bar{t}} c^{-\bar{s}} \omega^l = \tilde{v}^p$ в G , слово $\tilde{v}^{-p} d^{-\bar{t}} c^{-\bar{s}} \omega^l$ представляется в виде $\tilde{\nu}_2 \tilde{\nu}_1^{-1}$ для некоторых слов $\tilde{\nu}_i \in N_i$, $i = 1, 2$. Откуда получаем равенство $c^{-\bar{s}} \omega^l \tilde{\nu}_1 = d^{\bar{t}} \tilde{v}^p \tilde{\nu}_2$ в F . Проверим, что в качестве x можно взять $c^{-\bar{s}} \omega^l \tilde{\nu}_1 = d^{\bar{t}} \tilde{v}^p \tilde{\nu}_2$. Действительно, в группе G_1 :

$$x^{-1} \tilde{v} x = x^{-1} c^s x = \omega^{-l} c^{\bar{s}} c^s c^{-\bar{s}} \omega^l = \omega^{-l} c^s \omega^l = \omega^{-l} \tilde{v} \omega^l = \omega^{-l} (\omega^k \nu_2) \omega^l = \tilde{u},$$

в группе G_2 :

$$x^{-1} \tilde{v} x = x^{-1} d^t x = \tilde{v}^{-p} d^{-\bar{t}} d^t d^{\bar{t}} \tilde{v}^p = \tilde{v}^{-p} \tilde{v} \tilde{v}^p = \tilde{v} = \tilde{u}.$$

Значит, $x^{-1} \tilde{v} x = \tilde{u}$ в $F/N_1 \cap N_2$. Поэтому $u = h^{-1} v h$ в $F/N_1 \cap N_2$ для $h = \alpha x \beta^{-1}$.

Из леммы 2 получаем следующий алгоритм.

По слову $\tilde{v}$ определяем конечные множества $\text{Roots}_{G_1}(\tilde{v})$, $\text{Roots}_{G_2}(\tilde{v})$ (это возможно по условию 1.2 теоремы 1). Для каждого $c \in \text{Roots}_{G_1}(\tilde{v})$ и $d \in \text{Roots}_{G_2}(\tilde{v})$, используя условие 1.1 теоремы 1 находим наименьшие модулю числа $s = s(c)$, $t = t(d) \in \mathbb{Z}$, для которых $\tilde{v} = c^s$ в G_1 и $\tilde{v} = d^t$ в G_2 . Далее, используя условие 2.1 теоремы 1, проверяем, существует ли целое число p такое, что $d^{-\bar{t}} c^{-\bar{s}} \omega^l = \tilde{v}^p$ в G для каких-нибудь чисел $\bar{s}$, $\bar{t}$ с условием $0 \leq \bar{s} < s(c)$, $0 \leq \bar{t} < t(d)$. Если такое p нашлось, то выражаем $\tilde{v}^{-p} d^{-\bar{t}} c^{-\bar{s}} \omega^l$ через определяющие соотношения $R_1 \cup R_2$ группы G (это возможно по условию 2.1 теоремы 1) и представляем $\tilde{v}^{-p} d^{-\bar{t}} c^{-\bar{s}} \omega^l$ в виде $\tilde{\nu}_2 \tilde{\nu}_1^{-1}$, где $\tilde{\nu}_i \in N_i$, $i = 1, 2$. В качестве сопрягающего u и v слова h можно взять $\alpha c^{-\bar{s}} \omega^l \tilde{\nu}_1 \beta^{-1}$. Если ни для каких $c \in \text{Roots}_{G_1}(\tilde{v})$ и $d \in \text{Roots}_{G_2}(\tilde{v})$ таких p не существует, то делаем вывод, что слова u и v не сопряжены в $F/N_1 \cap N_2$. Тем самым, теорема 1 доказана.

2. Допустимые преобразования, используемые для доказательства предложения 1. Ниже будем называть *картой* любую область $M \subset T$, гомеоморфную квадрату $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$, вместе с принадлежащими ей вершинами и частями ребер. Также если задан путь (ребро) на торе T , будем называть *отрезком* пути (ребра) любую часть пути (ребра), гомеоморфную $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$. Будем говорить, что в некоторой области на торе *ничего не содержится*, если в ней нет полюсов, нет вершин и отрезков ребер картинки P . И будем говорить, что в некоторой области на торе *абсолютно ничего не содержится*, если в ней ничего не содержится и нет точек из $\overline{\text{Equ}} \cup \overline{\text{Equ}} \cup \text{Conj}$.

Перечислим допустимые преобразования, которые нам потребуются для доказательства предложения 1.

2.1. Изотопия. *Изотопией* картинки P называется замена картинки P на изотопную ей картинку $F_1(P)$, где $F_t: T \times [0, 1] \rightarrow T \times [0, 1]$ – некоторая непрерывная изотопия тора T такая, что

- (i) изотопия F_t оставляет неподвижными все вершины и оба полюса, т.е. для каждого $t \in [0, 1]$ и каждой вершины V_i выполняется

$$F_t(V_i) = V_i, \quad F_t(p_u) = p_u, \quad F_t(p_v) = p_v;$$

- (ii) для каждого $t \in [0, 1]$ и каждого ребра E_j пересечение ребра $F_t(E_j)$ с экваторами $\underline{\text{Equ}}$, $\overline{\text{Equ}}$ и Conj состоит из конечного числа точек, более того, если $\underline{\text{Equ}}$, или $\overline{\text{Equ}}$, или Conj пересекает $F_1(E_j)$, то он действительно пересекает, а не просто касается его.

Рис. 1

Изотопия картинке P является допустимым преобразованием, так как либо она соответствует вставке или сокращению взаимобратных слов в метки $\text{Lab}_{p_v}^+(\underline{\text{Equ}})$ и $\text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}})$, либо не меняет $\text{Lab}_{p_v}^+(\underline{\text{Equ}})$ и $\text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}})$ вообще (см. рис. 1).

2.2. Удаление лишних петель (частный случай изотопии). Пусть $\underline{\text{Equ}}$ (соответственно $\overline{\text{Equ}}$, Conj) пересекает какое-нибудь ребро E в двух точках, которые делят $\underline{\text{Equ}}$ (соответственно $\overline{\text{Equ}}$, Conj) на две части так, что одна из этих частей ζ не пересекается с ребрами и не содержит полюса. Обозначим через ϑ связную часть ребра E между этими точками. Если цикл $\zeta \sqcup \vartheta$ ограничивает на торе T диск, внутри которого абсолютно ничего не содержится, то ϑ называется *лишней петлей*. Очевидно, что вклад лишней петли в $\text{Lab}_{p_v}^+(\underline{\text{Equ}})$ равен единице в свободной группе. Поэтому лишнюю петлю можно удалить (см. рис. 1).

2.3. Элементарные преобразования. Пусть карта M не содержит абсолютно ничего, кроме двух ребер $\{x = -1/2, -1 < y < 1\}$ и $\{x = 1/2, -1 < y < 1\}$, имеющих противоположную ориентацию и помеченных одним и тем же словом g . Преобразование картинке P назовем *элементарным*, если оно не меняет P вне M и меняет P внутри M так, как это показано на рис. 2. Элементарное преобразование не меняет экваториальные метки и является допустимым.

Рис. 2

2.4. *Объединение ребер.* Пусть E_1 и E_2 – два ребра-цикла с метками g_1 и g_2 , которые синхронно пересекают $\underline{\text{Equ}}$, $\overline{\text{Equ}}$ и Conj и ограничивают на торе кольцо, ничего не содержащее, или E_1 и E_2 – два ребра с метками g_1 и g_2 , которые соединяют одни и те же вершины, синхронно пересекают $\underline{\text{Equ}}$, $\overline{\text{Equ}}$ и Conj и ограничивают на торе диск, ничего не содержащий. Удаляем E_2 . Если E_1 и E_2 имели одинаковую ориентацию, присваиваем E_1 метку g_1g_2 или g_2g_1 , иначе метку $g_1g_2^{-1}$ или $g_2^{-1}g_1$. При этом метка для E_1 выбирается так, чтобы ее вклад в экваториальные слова остался таким же, какой давали оба ребра E_1 и E_2 . Для определенности будем считать, что g_1 и $g_2^{\pm 1}$ перемножаются свободно.

2.5. *Разрезание полных диполей.* Полным R_1 -диполем будет называться такой диполь D_1 , у которого, во-первых, метки вершин равны $r_1^{\pm 1} \in R_1 \setminus R_2$, во-вторых, вершины соединены единственным ребром E_1 , метка которого равна r_1 .

В R_1 -кольце рассмотрим карту M , которая не содержит ничего, кроме части ребра E_1 : $\{x = 0\}$, идущего из точки $(0, -1)$ в точку $(0, 1)$. Из P вырезается карта M и заменяется на новую карту M' , которая не содержит ничего, кроме двух вершин V' , V'' с метками r_1 , r_1^{-1} и двух ребер, одно из которых идет из точки $(0, -1)$ в вершину V' , а другое идет из вершины V'' в точку $(0, 1)$. При этом вместо одного полного R_1 -диполя в P появляются два полных R_1 -диполя. Это преобразование не меняет экваториальные метки и является допустимым.

Аналогично определяется *полный R_2 -диполь*, метки вершин которого равны $r_2^{\pm 1} \in R_2 \setminus R_1$, и соответствующая операция над ним, производимая в R_2 -кольце. Также аналогично определяется *полный смешанный диполь* с метками вершин из $R_1 \cap R_2$.

2.6. *Сопряжение диполей.* Пусть $n_1 \in N_1$. *Обобщенным N_1 -диполем* с меткой n_1 назовем две обобщенные вершины с метками $n_1^{\pm 1}$ и ребро с меткой n_1 , их соединяющее. Например, полный R_1 -диполь является обобщенным с меткой $r_1 \in R_1 \subset N_1$.

Пусть D_1 – некоторый обобщенный N_1 -диполь с меткой n_1 и C – ребро-цикл с меткой $f \in F$, ограничивающее на торе T диск, внутри которого не содержится ничего кроме D_1 . При этом ребро диполя D_1 и ребро-цикл C синхронно пересекают $\underline{\text{Equ}}$, $\overline{\text{Equ}}$ и Conj и дают вклад $(fn_1f^{-1})^{\pm 1} \in N_1$ в метки $\underline{\text{Equ}}$, $\overline{\text{Equ}}$ и Conj . Удаляем C и присваиваем ребру диполя D_1 метку fn_1f^{-1} , а его обобщенным вершинам метки $(fn_1f^{-1})^{\pm 1}$. Это преобразование не меняет экваториальные метки и будет допустимым.

Аналогично определяется *обобщенный N_2 -диполь* и преобразование сопряжения над ним.

2.7. *Удаление диполей и ребер-циклов, не пересекающих экваторы.* Если ребро какого-нибудь обобщенного диполя или ребро-цикл не пересекается с $\underline{\text{Equ}}$ и $\overline{\text{Equ}}$, то оно не дает вклад в $\text{Lab}_{p_v}^+(\underline{\text{Equ}})$ и $\text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}})$. Поэтому его можно удалить.

2.8. *Сопряжение полюсов.* Рассмотрим полюс p_v (для p_u все аналогично). Пусть C – ребро-цикл с меткой $g \in F$, который ограничивает на торе T диск, внутри которого не содержится абсолютно ничего, кроме полюса p_v , одного отрезка экватора $\underline{\text{Equ}}$ и одного отрезка Conj . Ребро-цикл C и полюс p_v назовем *сопряженным полюсом p_v* . Сам полюс p_v также будем считать сопряженным полюсом (окруженным ребром-циклом C с меткой, равной единице свободной группы). Если сопряженный полюс p_v аналогичным образом окружен ребром-циклом $\tilde{C}$, то C и $\tilde{C}$ объединяются. Это преобразование не меняет экваториальные метки и будет допустимым.

2.9. *Удаление односторонних диполей.* Пусть ребро некоторого обобщенного N_1 -диполя D_1 (для обобщенного N_2 -диполя все аналогично) с меткой $n_1 \in N_1$ пересекает только один из экваторов (для определенности $\overline{\text{Equ}}$) и только два раза и не пересекает Conj . Такой обобщенный N_1 -диполь назовем *односторонним N_1 -диполем*.

Существует замкнутый диск O , не содержащий абсолютно ничего кроме D_1 и двух отрезков $[s_1, s_2]$ и $[t_1, t_2]$ экватора $\overline{\text{Equ}}$, где точки $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \partial O \cap \overline{\text{Equ}}$. Заметим, что метки отрезков $[s_1, s_2]$ и $[t_1, t_2]$ равны метке диполя n_1 и n_1^{-1} соответственно. При этом либо отрезок $[s_2, t_1]$, либо отрезок $[t_2, s_1]$ экватора $\overline{\text{Equ}}$ не содержит полюс. Для определенности будем считать, что таков $[s_2, t_1]$. Точки s_2, t_1 делят ∂O на два отрезка. Обозначим через ρ тот из них, который не содержит точки из R_1 -кольца. Тогда замкнутый путь $[s_2, t_1] \cup \rho$ ограничивает дисковую картинку над копредставлением $G = \langle A \mid R_2 \rangle$. По лемме 1 метка n_2 пути $[s_2, t_1] \cup \rho$ принадлежит N_2 . Так как ребра не пересекают ρ , то n_2 есть метка отрезка $[s_2, t_1]$. Таким образом, метка отрезка $[s_1, s_2] \cup [s_2, t_1] \cup [t_1, t_2]$ равна $n_1 n_2 n_1^{-1}$. Удалим D_1 из P . При этом метка отрезка $[s_1, s_2] \cup [s_2, t_1] \cup [t_1, t_2]$ становится равной n_2 . Это допустимое преобразование, потому что после преобразования метка $\text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}})$ изменилась на слово $n_1 n_2 n_1^{-1} n_2^{-1} \in N_1 \cap N_2$.

2.10. *Перестановка двусторонних диполей.* Пусть ребро некоторого обобщенного N_1 -диполя D_1 с меткой $n_1 \in N_1$ пересекает каждый из экваторов $\overline{\text{Equ}}$ и $\underline{\text{Equ}}$ ровно по одному разу и не пересекает Conj . Такой обобщенный N_1 -диполь назовем *двусторонним N_1 -диполем*.

Существует открытый диск O_1 , не содержащий абсолютно ничего, кроме D_1 и двух отрезков $[s_1, t_1] \in \overline{\text{Equ}}$ и $[q_1, p_1] \in \underline{\text{Equ}}$, где точки $s_1, t_1 \in \partial O_1 \cap \overline{\text{Equ}}$, $q_1, p_1 \in \partial O_1 \cap \underline{\text{Equ}}$. Заметим, что метки отрезков $[s_1, t_1]$ и $[q_1, p_1]$ равны метке диполя n_1 и n_1^{-1} соответственно.

Аналогично определяется *двусторонний N_2 -диполь*. Будем считать, что все сопутствующие обозначения для двустороннего N_2 -диполя такие же, как выше для двустороннего N_1 -диполя с заменой индекса 1 на индекс 2.

Итак, пусть в P есть двусторонний N_1 -диполь D_1 и двусторонний N_2 -диполь D_2 . Точки s_1, s_2, t_1, t_2 делят $\overline{\text{Equ}}$ на четыре отрезка. Допустим один из них, скажем $[t_1, s_2]$, не пересекается ребрами и не содержит полюс. Тогда метка отрезка $\sigma = [s_1, t_1] \cup [t_1, s_2] \cup [s_2, t_2]$ равна $n_1 n_2$. Переставим местами отрезки $[s_1, t_1]$ и $[s_2, t_2]$ (смотри рис. 3). После этого метка нового отрезка σ станет равной $n_2 n_1$. Это преобразование допустимое, так как после преобразования метка $\text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}})$ изменилась на слово $n_2^{-1} n_1^{-1} n_2 n_1 \in [N_1, N_2]$.

Аналогично определяется преобразование для экватора $\underline{\text{Equ}}$.

2.11. *Перекидывание ребер через диполи и полюса.* Пусть X – обобщенный N_1 -или N_2 -диполь (соответственно сопряженный p_u или p_v полюс), O_1, O_2, O_3 – три замкнутых диска на торе T , не содержащих ничего, кроме X таких, что $O_3 \subset O_2 \setminus \partial O_2$, $O_2 \subset O_1 \setminus \partial O_1$. Пусть E – некоторое ребро с меткой $g \in F$ такое, что $E \cap O_1 = \emptyset$ и можно провести простой путь γ , соединяющий точки $o \in E$ и $o_3 \in \partial O_3$, пересекающий E , ∂O_1 и ∂O_2 ровно в одной точке, не пересекающий другие ребра, экваторы и Conj и не проходящий через вершины. Таким образом $\text{Lab}^+(\gamma) \equiv g$. Вставим в P два противоположно ориентированных ребра-цикла $C_1 = \partial O_1$ и $C_2 = \partial O_2$ с метками $g \in F$ так, чтобы $\text{Lab}^+(\gamma)$ стала тождественно

Рис. 3

равной $gg^{-1}g$. Применяем к E и C_1 элементарное преобразование, а к X и C_2 – преобразование сопряжения. Очевидно, что это преобразование является допустимым, потому что оно соответствует либо вставке взаимообратных слов в экваториальные метки $\text{Lab}_{p_v}^+(\underline{\text{Equ}})$ и $\text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}})$, либо не меняет $\text{Lab}_{p_v}^+(\underline{\text{Equ}})$ и $\text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}})$ вообще.

3. Доказательство предложения 1.

Шаг 1. Выделение полных диполей. Так как копредставление $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$ является аторическим, то в картинке P на торе T найдется диполь D , т.е. пара вершин V_1 и V_2 , имеющих взаимообратные метки r и r^{-1} и соединенные ребром ρ . После не более $|r| - 1$ элементарного преобразования можно добиться того, чтобы все ребра из V_1 шли бы в V_2 рядом друг с другом параллельно ρ , а ρ осталось бы на месте. Объединение этих ребер делает диполь D полным.

Картинка P распадается на две непересекающиеся подкартинки $P_1 \sqcup P_2$, одна из которых (скажем P_1) не содержит ничего, кроме полного диполя D . Картинка P_2 – картинка на торе над копредставлением $G = \langle A \mid R_1 \cup R_2 \rangle$, содержит на две вершины меньше, чем P . Применяем к P_2 такое же преобразование, как к P . За не более чем $m_V/2$ таких шагов P распадется на $m_V/2$ полных диполей и ребра-циклы, где m_V – количество вершин в P .

Шаг 2. Преобразование всех диполей в двусторонние. После шага 1 картинка P состоит из ребер-циклов, полных R_1 -, R_2 -диполей и полных смешанных диполей. Если ребра каких-нибудь полных диполей не пересекают экваторы, то такие полные диполи удаляем. Также удаляем все полные смешанные диполи. Это изменяет экваториальные метки на элементы из $R_1 \cap R_2 \subset N_1 \cap N_2$. После этого P содержит только полные R_1 -, R_2 -диполи и ребра-цикла.

ОПЕРАЦИЯ 1. Рассмотрим полный R_1 -диполь D (для полного R_2 -диполя все аналогично). Пусть его ребро пересекает Conj_1 в точках $o_1, \dots, o_{\tilde{m}}$. В непосредственной близости от o_i , $i = 1, \dots, \tilde{m}$, разрезаем D на три полных диполя D_1, D_2, D_3 , один из которых D_2 целиком лежит в R_1 -кольце и его ребро пересекает Conj_1 ровно один раз (в o_i). Удаляем D_2 из P . Применяя это преобразование к каждому из $\tilde{m}$ пересечений, вместо одного полного R_1 -диполя получаем $\tilde{m} + 1$ полный R_1 -диполь, ни один из которых не пересекает Conj_1 .

После применения операции 1 к каждому полному R_1 - и R_2 -диполю получаем, что ребра полных R_1 -диполей не пересекают Conj_1 , а ребра полных R_2 -диполей не пересекают Conj_2 .

ОПЕРАЦИЯ 2. Рассмотрим Conj_1 (для Conj_2 все аналогично). Его могут пересекать только ребра полных R_2 -диполей и ребра-циклы. Пусть $\rho_1, \dots, \rho_k$ – не сопрягающие полюса ребра-цикла и ребра полных R_2 -диполей, последовательно пересекающие Conj_1 при движении от сопряженного полюса p_u к сопряженному полюсу p_v . Последовательно каждое ρ_i , начиная с ρ_1 , перекидывается через сопряженный полюс p_u . После этого ребра полных R_2 -диполей будут пересекать только Conj_2 . К этим полным R_2 -диполям применяется операция 1.

После операции 2, примененной к Conj_1 и Conj_2 , картинка P будет состоять из ребер-циклов и только из полных R_1 - и R_2 -диполей $D_1, \dots, D_{\tilde{m}}$, не пересекающих Conj . Для каждого D_i обозначим через m_i число пересечений ребра диполя D_i с экваторами. Заметим, что m_i четно. Можно считать, что $m_i > 0$, иначе соответствующий диполь D_i можно удалить из P . Каждый диполь D_i , у которого $m_i > 2$, разрезается на $m_i/2$ полных диполей, каждый из которых будет пересекать экваторы ровно два раза. После этого все полные диполи картинки P станут либо двусторонними, либо односторонними. Все односторонние диполи из P удаляются.

Шаг 3. Избавление от стягиваемых ребер-циклов. После шага 2 картинка P состоит только из двусторонних диполей и ребер-циклов. Назовем ребро-цикл *стягиваемым*, если оно делит тор на две части, одна из которых гомеоморфна диску. Эту часть будем называть *внутренним диском* ребра-цикла.

После удаления лишних петель с экваторов и Conj каждый стягиваемый ребро-цикл будет принадлежать одному из трех типов:

- I) внутри стягиваемого ребра-цикла абсолютно ничего не содержится;
- II) внутри стягиваемого ребра-цикла не содержится ничего, кроме одного двустороннего диполя или одного сопряженного полюса;
- III) внутри стягиваемого ребра-цикла содержится не менее двух двусторонних диполей, или хотя бы один двусторонний диполь и хотя бы один сопряженный полюс, или два сопряженных полюса.

Все ребра-циклы типа I удаляем из P . Ко всем ребрам-циклам типа II применяем операцию сопряжения диполей или сопряжения полюсов соответственно. После этого в P останутся только $\tilde{m}$ ребер-циклов типа III.

Ребро-цикл типа III назовем *минимальным*, если в его внутреннем диске не содержатся другие ребра-циклы типа III.

ОПЕРАЦИЯ 3. Пусть C – минимальный ребро-цикл типа III, в котором содержится $\tilde{m}_1$ двусторонних диполей и $\tilde{m}_2$ сопряженных полюсов, $\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 \geq 2$. Очевидно, с помощью изотопии и $\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 - 1$ элементарного преобразования ребро-цикл C можно превратить в $\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2$ ребер-циклов типа II. К каждому из этих ребер-циклов типа II применяем операцию сопряжения.

После применения операции 3 в P становится на одно ребро-цикл меньше. Значит, после не более $\tilde{m}$ применений операции 3 все ребра-циклы в P будут нестягиваемыми.

Шаг 4. Объединение нестягиваемых ребер-циклов. После шага 3 картинка P содержит только нестягиваемые ребра-циклы $Z_1, \dots, Z_m$ и двусторонние диполи. Вырезание из тора одного из ребер-циклов (Z_1) превращает тор в поверхность,

гомеоморфную кольцу Ω , в котором любой не стягиваемый в точку простой замкнутый путь (т.е. Z_i , $i \neq 1$) гомотопен краю (т.е. Z_1) и любому другому не пересекающемуся с ним не стягиваемому в точку простому замкнутому пути (т.е. Z_j , $j \neq 1, i$). Ребра-циклы $Z_2, \dots, Z_m$ разбивают Ω на m непересекающихся частей $\Omega_1, \dots, \Omega_m$, гомеоморфных кольцу. Считаем, что ребра-циклы $Z_2, \dots, Z_m$ пронумерованы так, что кольцо Ω_1 ограничивают Z_1 и Z_2 , кольцо $\Omega_2 - Z_2$ и $Z_3, \dots$, кольцо $\Omega_m - Z_m$ и Z_1 .

Рассмотрим Ω_1 . Если внутри Ω_1 имеются сопряженные полюса или двусторонние диполи, то применяя изотопию и перекидывая Z_2 через эти диполи и полюса, приблизим Z_2 к Z_1 так, чтобы эти полюса и диполи из Ω_1 переместились в Ω_2 , причем Z_1 и Z_2 стали идти параллельно друг другу и синхронно пересекать экваторы и Conj . Далее, применяя такое же преобразование последовательно к каждому Ω_i , $i = 2, \dots, m-1$, перемещаем сопряженные полюса и обобщенные диполи из Ω_i в Ω_{i+1} . В конце концов получим, что все сопряженные полюса и двусторонние диполи картинки P будут располагаться только в кольце Ω_m , а ребра-циклы $Z_1, \dots, Z_m$ будут идти параллельно друг другу и синхронно пересекать экваторы и Conj . Объединяем $Z_1, \dots, Z_m$ и получаем одно ребро-цикл Z .

Шаг 5. Расположение двусторонних диполей по порядку. Выше на экваторах была введена ориентация. Совершая один оборот вдоль Ecu в положительном направлении, начиная от p_v , последовательно мы встречаем ребра диполей $D_1, \dots, D_s$, пересекающие Ecu . Скажем, что N_2 -диполь D_i и N_1 -диполь D_j образуют *инверсию* на Ecu , если $i < j$, иначе они образуют *порядок* на Ecu . Аналогично определяются понятия инверсии и порядка на $\overline{\text{Ecu}}$. Будем говорить, что один оборот вдоль каждого из экваторов в положительном направлении, начиная от полюса, есть движение *слева направо*.

Ребро-цикл Z разбивается экваторами на отрезки. Назовем *двусторонними R_2 -кусками* (соответственно *двусторонними R_1 -кусками*) такие из этих отрезков, которые целиком лежат в R_2 -кольце (соответственно в R_1 -кольце), начинаются на одном из экваторов, заканчиваются на другом и не пересекают Conj .

ЛЕММА 3. *С помощью конечного числа допустимых преобразований можно добиться того, чтобы в R_2 -кольце все ребра двусторонних N_1 -диполей находились левее двусторонних R_2 -кусков ребра-цикла Z .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Если в P нет двусторонних N_1 -диполей или двусторонних R_2 -кусков, то доказывать нечего. Иначе пусть m – это минимальное количество перестановок, которые надо совершить, чтобы все ребра двусторонних N_1 -диполей находились левее двусторонних R_2 -кусков. Если $m = 0$, то доказывать нечего. Иначе рассмотрим самый правый двусторонний N_1 -диполь D , левее которого есть двусторонний R_2 -кусочек ρ такой, что между D и ρ нет других N_1 -диполей и двусторонних R_2 -кусков. Перекидываем ρ правее D и уменьшаем m на 1. Далее применяем индукцию по m .

Ребра двусторонних N_1 -диполей последовательно пересекают Ecu (соответственно $\overline{\text{Ecu}}$). Из леммы 3, при необходимости удаляя лишние петли, получаем, что между соседними пересечениями o' и o'' экватора Ecu (соответственно $\overline{\text{Ecu}}$) ребрами двусторонних N_1 -диполей либо нет пересечений с ребром-циклом Z , либо там есть пересечение с ребрами двусторонних N_2 -диполей и ребро-цикл Z , пересекая

экватор $\underline{\text{Equ}}$ (соответственно $\overline{\text{Equ}}$) между o' и o'' и попадая в R_2 -кольцо, огибает вершину как минимум одного из этих двусторонних N_2 -диполей, снова идет к экватору $\underline{\text{Equ}}$ (соответственно $\overline{\text{Equ}}$) и возвращается в R_1 -кольцо.

ЛЕММА 4. *С помощью конечного числа допустимых преобразований можно добиться того, чтобы все двусторонние диполи в картинке P образовывали порядок.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Обозначим количество инверсий на экваторе $\underline{\text{Equ}}$ через m' , на экваторе $\overline{\text{Equ}}$ – через m'' . Если $m' + m'' = 0$, то доказывать нечего. Пусть $m' + m'' > 0$.

Если $m' > 0$, для начала рассмотрим экватор $\underline{\text{Equ}}$. Пусть D_1 и D_2 – два соседних двусторонних N_1 - и N_2 -диполя, образующих инверсию на $\underline{\text{Equ}}$, таких, что между ними нет других диполей. Можно считать, что N_2 -диполь D_2 не огибается ребром-циклом Z , иначе перекинем Z через D_2 . Переставляя диполи D_1 и D_2 , уменьшаем m' на 1. Применяем индукцию по m' и получаем, что все диполи образуют порядок на $\underline{\text{Equ}}$.

Если $m'' > 0$, то применяем аналогичные преобразования к экватору $\overline{\text{Equ}}$.

Аналогично лемме 3 доказывается

ЛЕММА 5. *С помощью конечного числа допустимых преобразований картинка P можно добиться того, чтобы в R_2 -кольце все ребра двусторонних N_2 -диполей находились левее двусторонних R_1 -кусков ребра-цикла Z .*

Итак, все двусторонние диполи в P образуют порядок как на $\overline{\text{Equ}}$, так и на $\underline{\text{Equ}}$. При этом двусторонние N_1 -диполи (соответственно N_2 -диполи) находятся и пересекают экваторы в непосредственной близости друг от друга. Все эти двусторонние N_1 -диполи (соответственно N_2 -диполи) заменяем на один двусторонний диполь Δ_1 (соответственно диполь Δ_2), метка ребра которого ν_1 (соответственно ν_2) есть произведение меток всех данных двусторонних N_1 -диполей (соответственно N_2 -диполей), т.е. принадлежит N_1 (соответственно N_2). Если ν_1 (соответственно ν_2) равно единице в F , то Δ_1 (соответственно Δ_2) удаляется.

Шаг 6. Финал. В итоге картинка P может содержать только не более одного ребра-цикла Z , не более одного двустороннего N_1 -диполя Δ_1 (с меткой ν_1), не более одного двустороннего N_2 -диполя Δ_2 (с меткой ν_2) и два сопряженных полюса p_u и p_v . Через α обозначим метку ребра, сопрягающего полюс p_u , через β – метку ребра, сопрягающего полюс p_v . Ниже к P будут применяться преобразования изотопии, перекидывание Z через Δ_1 и Δ_2 , сопряжения полюсов, при этом, чтобы не усложнять обозначения, метки Δ_1 и Δ_2 , метки ребер, сопрягающих p_u и p_v , снова будут обозначаться через ν_1 , ν_2 , α , β .

Возможны следующие три случая.

Случай А. Картинка P не содержит ребра-цикла Z . Имеем случай (1) предложения 1, т.е.

$$\text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}}) = \alpha(\nu_1\nu_2)\alpha^{-1}, \quad \text{Lab}_{p_v}^+(\underline{\text{Equ}}) = \beta(\nu_1\nu_2)\beta^{-1}.$$

Случай В. Ребро-цикл Z есть в P и гомотопно Conj . С помощью изотопии и перекидывания Z через Δ_1 , Δ_2 и сопряженные полюса можно расположить Z в непосредственной близости к Conj параллельно Conj так, чтобы Z пересекало бы

каждый из экваторов ровно по одному разу. Таким образом получаем случай (1) предложения 1, т.е.

$$\text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}}) = \alpha(\omega' \nu_1 \nu_2) \alpha^{-1}, \quad \text{Lab}_{p_v}^+(\underline{\text{Equ}}) = \beta(\omega' \nu_1 \nu_2) \beta^{-1},$$

где слово ω' – метка ребра-цикла Z .

Случай С. Ребро-цикл Z есть в P и гомотопен простому замкнутому пути, $|k|$ раз оборачивающемуся вдоль Conj и $|l| \geq 1$ раз вдоль экваторов, где $l, k \in \mathbb{Z}$.

Если в P нет Δ_2 , то с помощью изотопии и перекидывания Z через Δ_1 и сопряженные полюса можно добиться того, чтобы Z делало $|k|$ оборотов вдоль Conj в непосредственной близости от Conj и $|l|$ оборотов вдоль экваторов в R_1 -кольце. Тогда получаем случай (1) предложения 1, т.е.

$$\text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}}) = \alpha(\omega^k \nu_1) \alpha^{-1}, \quad \text{Lab}_{p_v}^+(\underline{\text{Equ}}) = \beta(\omega^k \nu_1) \beta^{-1},$$

где слово ω – метка ребра-цикла Z .

Осталось рассмотреть случай, когда в P есть Δ_2 . С помощью изотопии и перекидывания Z через Δ_1 , Δ_2 и сопряженные полюса можно добиться того, чтобы Z делало $|k|$ оборотов вдоль Conj в непосредственной близости от Conj , а $|l|$ оборотов вдоль экваторов начинались в R_1 -кольце, параллельно друг другу шли к ребру диполя Δ_2 , огибали его вершину, пересекая $\overline{\text{Equ}}$, и снова возвращались в R_1 -кольцо. Таким образом получаем случай (2) предложения 1, т.е.

$$\text{Lab}_{p_u}^+(\overline{\text{Equ}}) = \alpha(\omega^k \nu_1 \omega^{-l} \nu_2 \omega^l) \alpha^{-1}, \quad \text{Lab}_{p_v}^+(\underline{\text{Equ}}) = \beta(\omega^k \nu_1 \nu_2) \beta^{-1},$$

где слово ω – метка ребра-цикла Z .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства предложения 1 следует, что число $L = L(u, v, R_1, R_2)$ такое, что $|\alpha|, |\beta|, |\omega|, |l| \leq L$, можно взять равным

$$90(|h_1| + |h_2|)(1 + 2l_R + 2l_R^2 + \dots + 2l_R^{m_V/2-1}),$$

где l_R – длина самого длинного слова в $R_1 \cup R_2$, m_V – количество вершин в изначальной картинке P .

Автор выражает благодарность Н. В. Безверхнему и А. Ю. Муранову за полезные обсуждения во время подготовки этой работы и особенно А. Э. Минасяну, который, в частности, указал автору на пример Миллера и на связь данной работы с подпрямыми и расслоенными произведениями.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. R. Bridson, C. F. Miller III, “Structure and finiteness properties of subdirect products of groups”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **98**:3 (2009), 631–651.
- [2] C. F. Miller III, *On Group-Theoretic Decision Problems and Their Classification*, Ann. Math. Stud., **68**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
- [3] G. Baumslag, M. R. Bridson, C. F. Miller III, H. Short, “Fibre products, non-positive curvature, and decision problems”, *Comment. Math. Helv.*, **75**:3 (2000), 457–477.
- [4] K. Igusa, *The Generalized Grassmann Invariant*, Preprint, Brandeis Univ., Waltham, MA, 1979.

- [5] C. P. Rourke, “Presentations and the trivial group”, *Topology of Low-dimensional Manifolds*, Lecture Notes in Math., **722**, Springer-Verlag, Berlin, 1979, 134–143.
- [6] S. J. Pride, “Identities among relations of group presentations”, *Group Theory from a Geometrical Viewpoint*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, 687–717.
- [7] W. A. Bogley, S. J. Pride, “Calculating Generators of π_2 ”, *Two-dimensional Homotopy Theory and Combinatorial Group Theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **197**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, 157–188.
- [8] R. S. Lyndon, P. E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **89**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [9] А. Ю. Ольшанский, *Геометрия определяющих соотношений в группах*, Современная алгебра, Наука, М., 1989.
- [10] M. A. Gutiérrez, J. G. Ratcliffe, “On the second homotopy group”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **32**:1 (1981), 45–55.
- [11] O. V. Kulikova, “On intersections of normal subgroups in free groups”, *Algebra Discrete Math.*, 2003, № 1, 36–67.
- [12] Н. В. Безверхний, “Разрешимость проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группе с условием $C(6)$ ”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **5**:1 (1999), 39–46.
- [13] W. A. Bogley, S. J. Pride, “Aspherical relative presentations”, *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*, **35**:1 (1992), 1–39.

О. В. Куликова

Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана
E-mail: olga.kulikova@mail.ru

Поступило

22.02.2011

Исправленный вариант

07.09.2011