Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Ковалева, А. Л. Скубачевский, Разрешимость нелокальных эллиптических задач в пространствах с весом, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 6, 882–898

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm907>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 08:48:58

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

О. А. Ковалева, А. Л. Скубачевский

В работе рассматриваются эллиптические уравнения порядка $2m$ в ограниченной области $Q \in \mathbb{R}^n$ с границей ∂Q и нелокальными условиями, связывающими следы решения и его производных на $(n-1)$ -мерных гладких многообразиях Γ_i ($\bigcup_i \Gamma_i = \partial Q$) с их значениями на некотором компакте $\mathcal{F} \subset \overline{Q}$, где $\mathcal{F} \cap \partial Q \neq \emptyset$. Доказана фредгольмова разрешимость этих задач в весовых пространствах $V_{p,a}^{l+2m}(Q)$ при произвольном $1 < p < \infty$.

Библиография: 18 названий.

В настоящей работе изучаются эллиптические уравнения порядка $2m$ в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с границей ∂Q и нелокальными условиями, связывающими следы решения и его производных на $(n-1)$ -мерных гладких многообразиях Γ_i ($\bigcup_i \Gamma_i = \partial Q$) с их значениями на некотором компакте $\mathcal{F} \subset \overline{Q}$, где $\mathcal{F} \cap \partial Q \neq \emptyset$. Случай $\mathcal{F} \cap \partial Q \neq \emptyset$ является наиболее трудным в теории нелокальных эллиптических задач [1]–[7]. Подход носителя нелокальных членов к границе приводит к возникновению степенных особенностей у решений в точках некоторого множества $\mathcal{K} \subset \overline{Q}$. Поэтому естественно рассматривать нелокальные эллиптические задачи в весовых пространствах $V_{p,a}^{k+2m}(Q)$, используемых для исследования эллиптических уравнений в областях в угловыми точками и ребрами [8]–[10]. При $p = 2$ разрешимость нелокальных эллиптических задач общего вида для уравнений порядка $2m$ изучалась в [2]–[5]. В данной работе фредгольмова разрешимость этих задач установлена при произвольном $1 < p < \infty$, что требует существенного изменения методов работ [2]–[5]. Ряд результатов являются новыми даже в случае $p = 2$. Интерес к изучению произвольного показателя $1 < p < \infty$ связан с приложениями к теории полугрупп Феллера [11]–[13], стохастической теории управления [14] и спектральной теории.

В п. 1 рассматриваются некоторые свойства весовых пространств $V_{p,a}^l(Q)$. В п. 2 содержатся вспомогательные результаты для эллиптических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ – $(n-2)$ -мерная гиперплоскость. Они будут использоваться в п. 3 для исследования разрешимости эллиптических задач в $Q \setminus \mathcal{K}$. Рассмотрение таких задач, в свою очередь, вызвано тем, что нелокальные члены могут переносить степенные особенности решений с множества $\mathcal{K} \cap \partial Q$ на $\mathcal{K} \cap Q$. Утверждения из п. 3 позволяют доказать в п. 4 теорему о фредгольмовой разрешимости абстрактных локальных эллиптических задач. Этот результат применяется в п. 5 для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00028.

доказательства фредгольмовой разрешимости эллиптических задач с носителями не-локальных членов на сдвигах границы.

1. Весовые пространства

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) – ограниченная область с границей $\partial Q = \bigcup_i \bar{\Gamma}_i$ ($i = 1, \dots, N_0$), где Γ_i – открытые, связные (в топологии ∂Q) $(n-1)$ -мерные многообразия класса C^∞ . Будем предполагать, что в окрестности каждой точки $g \in \partial Q \setminus \bigcup_i \bar{\Gamma}_i$ область Q диффеоморфна n -мерному двугранному углу $\mathcal{D}_g = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : |\varphi| < w, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ со сторонами $\Gamma_g^\pm = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi = \pm w, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, если $n \geq 3$; и плоскому углу $K_g = \{x = y \in \mathbb{R}^2 : |\varphi| < w\}$ со сторонами $\gamma_g^\pm = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = \pm w\}$, если $n = 2$. Здесь $w = w(g)$, $w \in (0, \pi)$, (r, φ) – полярные координаты точки $y \in \mathbb{R}^2$.

Обозначим $\mathcal{P} = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : y = 0, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, если $n \geq 3$; и $\mathcal{P} = \{0\}$, если $n = 2$. Определим замкнутое множество $\mathcal{K} \subset \bar{\Omega}$ следующим образом: $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cap \mathcal{K}_3$, если $\Omega = Q$. Здесь $\mathcal{K}_1 = \partial Q \setminus \bigcup_i \bar{\Gamma}_i = \bigcup_\nu \mathcal{K}_{1\nu}$, $\mathcal{K}_2 = \bigcup_\nu \mathcal{K}_{2\nu} \subset \bigcup_i \bar{\Gamma}_i$, $\mathcal{K}_3 = \bigcup_\nu \mathcal{K}_{3\nu} \subset Q$, $\mathcal{K}_{j\nu}$ ($j = 1, 2, 3; \nu = 1, \dots, N_j$) – попарно непересекающиеся замкнутые $(n-2)$ -мерные связные многообразия класса C^∞ , если $n \geq 3$, или изолированные точки, если $n = 2$. Отметим, что множества $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$ могут быть пустыми. В случае, если $\Omega = \mathbb{R}^n$ или Ω – угол, множество $\mathcal{K}$ совпадает с $\mathcal{P}$.

Предположим, что в области $\Omega = Q$ существует функция $\rho = \rho(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K})$, которая в некоторой окрестности множества $\mathcal{K}$ совпадает с расстоянием от точки $x \in Q$ до множества $\mathcal{K}$ и $\rho(x) \geq c > 0$ вне этой окрестности.

В случае, когда $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\Omega = K_g$ или $\Omega = \mathcal{D}_g$, мы будем считать, что $\rho(x) = r$.

Введем пространство $V_{p,a}^l(\Omega)$ как пополнение множества $\dot{C}^\infty(\bar{\Omega} \setminus \mathcal{K})$ по норме

$$\|u\|_{V_{p,a}^l(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\Omega} \rho^{p(a-|\alpha|)} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

где $\dot{C}^\infty(\bar{\Omega} \setminus \mathcal{K})$ – множество бесконечно дифференцируемых функций в $\bar{\Omega}$ с компактными носителями, принадлежащими $\bar{\Omega} \setminus \mathcal{K}$; $l \geq 0$ – целое; $a \in \mathbb{R}$; $1 < p < \infty$; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$.

Через $V_{p,a}^{l-1/p}(\Gamma)$ ($l \geq 1$) обозначим пространство следов на гладком $(n-1)$ -мерном многообразии $\Gamma \subset \bar{\Omega}$ с нормой

$$\|\psi\|_{V_{p,a}^{l-1/p}(\Gamma)} = \inf_{u|_{\Gamma} = \psi} \|u\|_{V_{p,a}^l(\Omega)} \quad (u \in V_{p,a}^l(\Omega)).$$

В дальнейшем нам также понадобятся следующие функциональные пространства. Обозначим через $E_{p,a}^l(\Omega)$ пополнение $\dot{C}^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{0\})$ по норме

$$\|u\|_{E_{p,a}^l(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} |y|^{pa} \sum_{|\alpha| \leq l} (|y|^{p(|\alpha|-l)} + 1) |D_y^\alpha u(y)|^p dy \right\}^{1/p},$$

где $\Omega = \mathbb{R}^2$ или $\Omega = K_g$.

Через $E_{p,a}^{l-1/p}(\gamma_g^\pm)$ ($l \geq 1$) обозначим пространство следов функций $u \in E_{p,a}^l(K_g)$ на сторонах угла K_g с нормой

$$\|\psi\|_{E_{p,a}^{l-1/p}(\gamma_g^\pm)} = \inf_{u|_{\gamma_g^\pm} = \psi} \|u\|_{E_{p,a}^l(K_g)} \quad (u \in E_{p,a}^l(K_g)).$$

Рассмотрим теперь некоторые свойства весовых пространств.

ЛЕММА 1.1. Пусть область $\Omega = Q$. Тогда для любых $u \in V_{p,a}^l(\Omega)$ и $q > 0$ выполнена оценка

$$q^s \|u\|_{V_{p,a-s}^{l-s}(\Omega)} \leq c_{ls} (\|u\|_{V_{p,a}^l(\Omega)} + q^l \|u\|_{V_{p,a-l}^0(\Omega)}), \quad (1.1)$$

где $c_{ls} > 0$ не зависит от q и u ; $0 < s < l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $n \geq 3$.

I. Установим справедливость неравенства (1.1) для $\Omega = \mathcal{D}_g$.

Обозначим через $\{\xi_m\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ разбиение единицы на K_g , подчиненное покрытию угла K_g множествами $\theta_m = \{y \in K_g : 2^{m-1} < |y| < 2^{m+1}\}$, такое, что

$$|D^\alpha \xi_m(y)| \leq c_\alpha 2^{-|\alpha|m} \quad (y \in \theta_m; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.2)$$

Обозначим $G_m = \theta_m \times \mathbb{R}^{n-2}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

В силу теоремы о продолжении функций из области с липшицевой границей в $\mathbb{R}^n$ и интерполяционного неравенства для пространств Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ (см. [15, предложение 2.2]) для любых $v \in W_p^l(G_0)$ и $q > 0$ имеем

$$q^s \|v\|_{W_p^{l-s}(G_0)} \leq k_1 (\|v\|_{W_p^l(G_0)} + q^l \|v\|_{L_p(G_0)}). \quad (1.3)$$

Используя равенства $\text{supp } \xi_j \cap \bar{\theta}_m = \emptyset$ при $j \neq m-1, m, m+1$, замену переменных $x = 2^m x'$ и неравенство (1.3), получим

$$\begin{aligned} q^{ps} \|u\|_{V_{p,a-s}^{l-s}(\mathcal{D}_g)}^p &\leq k_2 q^{ps} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{|\alpha| \leq l-s} \int_{G_m} r^{p(a-l+|\alpha|)} |D_x^\alpha (\xi_m u)|^p dx \\ &\leq k_3 q^{ps} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{pm(a-l+n/p)} \sum_{|\alpha| \leq l-s} \int_{G_0} |D_{x'}^\alpha (\xi_m u)|^p dx' \\ &\leq k_4 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{pm(a-l+n/p)} \left\{ \sum_{|\alpha| \leq l} \int_{G_0} |D_{x'}^\alpha (\xi_m u)|^p dx' + q^{pl} \int_{G_0} |\xi_m u|^p dx' \right\}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $k_1, \dots, k_4 > 0$ не зависят от u и q .

В силу (1.2) $|D_{y'}^\alpha \xi(y')| \leq c_\alpha$ ($y' \in \theta_0$). Поэтому, возвращаясь в (1.4) к старым переменным x , получим неравенство (1.1).

II. Рассмотрим теперь случай $\Omega = \mathbb{R}^n$. Введем функцию $\xi(\varphi) \in \dot{C}^\infty(-\pi, \pi)$ так, что $\xi(\varphi) = 1$ при $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$, $\xi(\varphi) = 0$ при $\varphi \notin (-\pi/3, \pi/3)$. Представим функцию u в виде $u = \xi u + (1 - \xi)u$. Как показано в пункте I, для функций ξu и $(1 - \xi)u$ справедливо неравенство (1.1). Следовательно, в силу неравенства треугольника и ограниченности оператора умножения на функцию ξ в пространствах $V_{p,a}^l(\mathbb{R}^n)$ и $V_{p,a-l}^0(\mathbb{R}^n)$ неравенство (1.1) выполняется для функции u .

III. Используя разбиение единицы, эквивалентность норм в пространстве $V_{p,a}^l$ относительно невырожденной гладкой замены переменных и рассмотренные случаи I, II, получим неравенство (1.1) для ограниченной области Q .

ЛЕММА 1.2. Пусть Q, Q_1 – ограниченные области, удовлетворяющие условиям, приведенным в начале параграфа, такие, что $\overline{Q} \subset Q_1$. Пусть замкнутое множество, участвующее в определении нормы в $V_{p,a}^l(Q_1)$, совпадает с множеством $\mathcal{K}$, введенном при определении нормы в $V_{p,a}^l(Q)$.

Тогда для любой функции $u \in V_{p,a}^l(Q)$ существует функция $U \in V_{p,a}^l(Q_1)$ такая, что $U(x) = u(x)$ при $x \in Q$ и

$$\|U\|_{V_{p,a}^l(Q_1)} \leq c \|u\|_{V_{p,a}^l(Q)}, \quad (1.5)$$

где $c > 0$ не зависит от u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, положим $n \geq 3$. В силу принципа разбиения единицы и эквивалентности норм при невырожденной гладкой замене переменных достаточно показать, что для любой функции $u \in V_{p,a}^l(\mathcal{D}_g)$ существует функция $U \in V_{p,a}^l(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условиям $U(x) = u(x)$ при $x \in \mathcal{D}_g$ и

$$\|U\|_{V_{p,a}^l(\mathbb{R}^n)} \leq k_1 \|u\|_{V_{p,a}^l(\mathcal{D}_g)}. \quad (1.6)$$

Перейдем к новым переменным φ, t, z' , положив $t = \ln r, z' = r^{-1}z$. Очевидно, для любой функции $u \in V_{p,a}^l(\mathcal{D}_g)$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + |\alpha_3| \leq l} \int_{\Pi_w} \exp(p\beta t) |D_t^{\alpha_1} D_\varphi^{\alpha_2} D_{z'}^{\alpha_3} u|^p dt d\varphi dz' \right)^{1/p} \leq k_2 \|u\|_{V_{p,a}^l(\mathcal{D}_g)}, \quad (1.7)$$

где $\Pi_w = (-w, w) \times \mathbb{R}^{n-1}, \beta = a + n/p - l$.

Применяя метод Уитни–Хестенса продолжения функции так, что $U(\varphi, t, z') = u(\varphi, t, z')$ при $|\varphi| < w, U(\varphi, t, z') = 0$ при $(\pi + w)/2 < |\varphi| < \pi$, получим

$$\begin{aligned} \|U\|_{V_{p,a}^l(\mathbb{R}^n)} &\leq k_3 \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\Pi_\pi} \exp(p\beta t) |D^\alpha U|^p dt d\varphi dz' \right)^{1/p} \\ &\leq k_4 \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\Pi_w} \exp(p\beta t) |D^\alpha u|^p dt d\varphi dz' \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из неравенств (1.7) и (1.8) следует (1.6).

2. Модельные задачи

1. Рассмотрим уравнение

$$A_0(D_y)u = f_0(y) \quad (y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}), \quad (2.1)$$

где $A_0(D_y) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D_y^\alpha$ – правильно эллиптический оператор с постоянными коэффициентами.

Оператор $A_0(D_y): V_{p,a}^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \rightarrow V_{p,a}^l(\mathbb{R}^2)$ – ограниченный. В полярных координатах (r, φ) оператор $A_0(D_y)$ примет вид

$$A_0(D_y) = r^{-2m} \hat{A}(\varphi, D_\varphi, rD_r) = r^{-2m} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \leq 2m} a_{\alpha_1 \alpha_2}(\varphi) D_\varphi^{\alpha_1} (rD_r)^{\alpha_2},$$

где $a_{\alpha_1\alpha_2} \in C_{2\pi}^\infty[0, 2\pi]$, $C_{2\pi}^\infty[0, 2\pi]$ – множество 2π -периодических бесконечно дифференцируемых функций.

Обозначив $t = \ln r$, получим из (2.1) следующую задачу

$$\hat{A}(\varphi, D_\varphi, D_t)u = F_0(\varphi, t) \quad (0 < \varphi < 2\pi; \quad t \in \mathbb{R}), \quad (2.2)$$

$$D_\varphi^i u|_{\varphi=0} = D_\varphi^i u|_{\varphi=2\pi} \quad (t \in \mathbb{R}; \quad i = 0, 1, \dots, 2m-1), \quad (2.3)$$

где $F_0(\varphi, t) = e^{2mt} f_0(\varphi, t)$, $D_\varphi^j F_0|_{\varphi=0} = D_\varphi^j F_0|_{\varphi=2\pi}$ ($j = 0, 1, \dots, l-1$).

Рассмотрим также задачу на собственные функции и собственные значения

$$\hat{A}(\varphi, D_\varphi, \lambda)\hat{u} = 0 \quad (0 < \varphi < 2\pi), \quad (2.4)$$

$$D_\varphi^i \hat{u}|_{\varphi=0} = D_\varphi^i \hat{u}|_{\varphi=2\pi} \quad (i = 0, 1, \dots, 2m-1). \quad (2.5)$$

Обозначим $\varkappa = a+1-2/p+l$. Аналогично доказательству теоремы 6.4 из [10, гл. III] мы можем установить следующий результат.

ЛЕММА 2.1. *Оператор $A_0(D_y)$ является изоморфизмом $V_{p,\varkappa}^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ на $V_{p,\varkappa}^l(\mathbb{R}^2)$ тогда и только тогда, когда прямая $\text{Im } \lambda = a+1-2m$ не содержит собственных значений задачи (2.4), (2.5).*

2. Рассмотрим теперь уравнение

$$A_0(D_y, D_z)u(x) = f_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}), \quad (2.6)$$

где $n \geq 3$, $x = (y, z)$, $A_0(D_y, D_z) = \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=2m} a_{\alpha_1, \alpha_2} D_y^{\alpha_1} D_z^{\alpha_2}$ – правильно эллиптический оператор с постоянными коэффициентами.

Для исследования разрешимости уравнения (2.6) изучим вспомогательную задачу с параметром $\theta \in S^{n-3}$ относительно функции $v \in E_{p,\varkappa}^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$

$$A_0(D_y, \theta)v(y) = f_0(y) \quad (y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}), \quad (2.7)$$

где $f_0 \in E_{p,\varkappa}^l(\mathbb{R}^2)$, $S^{n-3} = \{z \in \mathbb{R}^{n-2} : |z| = 1\}$.

Оператор $A_0(D_y, \theta) : E_{p,\varkappa}^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \rightarrow E_{p,\varkappa}^l(\mathbb{R}^2)$ – ограниченный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Линейный непрерывный оператор A , действующий из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 , называется *фредгольмовым*, если его образ $\mathcal{R}(A)$ замкнут в B_2 , а подпространства $\ker A = \{z \in B_1 : Az = 0\}$ и $\text{coker } A = B_2/\mathcal{R}(A)$ конечномерны.

ЛЕММА 2.2. *Пусть на прямой $\text{Im } \lambda = a+1-2m$ нет собственных чисел задачи (2.4), (2.5). Тогда оператор $A_0(D_y, \theta) : E_{p,\varkappa}^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \rightarrow E_{p,\varkappa}^l(\mathbb{R}^2)$ фредгольмов для всех $\theta \in S^{n-3}$.*

Обратно, если при некотором $\theta \in S^{n-3}$ оператор $A_0(D_y, \theta)$ фредгольмов, то на прямой $\text{Im } \lambda = a+1-2m$ нет собственных значений задачи (2.4), (2.5).

В силу леммы 2.1 доказательство аналогично доказательству теоремы 6.3 из [9].

ЛЕММА 2.3. *Пусть на прямой $\text{Im } \lambda = a+1-2m$ нет собственных чисел задачи (2.4), (2.5), и пусть подпространства $\ker A_0(D_y, \theta)$ и $\text{coker } A_0(D_y, \theta)$ тривиальны при $l = 0$, $p = 2$ и всех $\theta \in S^{n-3}$. Тогда для каждого $l = 0, 1, 2, \dots$ и $1 < p < \infty$ оператор $A_0(D_y, D_z)$ осуществляет изоморфизм $V_{p,\varkappa}^{l+2m}(\mathbb{R}^n)$ на $V_{p,\varkappa}^l(\mathbb{R}^n)$.*

В силу леммы 2.2 доказательство аналогично доказательству теоремы 7.1 из [9].

3. Локальные эллиптические задачи в ограниченной области

1. В этом пункте мы рассмотрим эллиптические задачи в $Q \setminus \mathcal{K}$, где $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, определенная в п. 1. Мы приведем подробное доказательство фредгольмовой разрешимости указанных задач в весовых пространствах, основанное на построении регуляризатора. Это связано с тем, что при исследовании разрешимости нелокальных эллиптических задач в п. 4 нам потребуется конкретный вид регуляризатора локальной задачи.

Рассмотрим краевую задачу

$$A_0 u = f_0(x) \quad (x \in Q \setminus \mathcal{K}), \quad (3.1)$$

$$B_{i\mu} u|_{\Gamma_i} = f_{i\mu}(x) \quad (x \in \Gamma_i; \quad i = 1, \dots, N_0; \quad \mu = 1, \dots, m). \quad (3.2)$$

Здесь $A_0 = A_0(x, D_x)$ и $B_0 = B_{i\mu}(x, D_x)$ – однородные дифференциальные операторы с комплекснозначными коэффициентами из C^∞ порядков $2m$ и $m_{i\mu} \leq 2m + l - 1$ соответственно, для которых выполнены следующие условия.

УСЛОВИЕ III.1. $A_0(x, D_x)$ – правильно эллиптический при всех $x \in \overline{Q}$.

УСЛОВИЕ III.2. Система операторов $\{B_{i\mu}(x, D_x)\}_{\mu=1}^m$ удовлетворяет условию Лопатинского по отношению к оператору $A_0(x, D_x)$ при всех $x \in \overline{\Gamma}_i$ ($i = 1, \dots, N_0$).

УСЛОВИЕ III.3. Если $n \geq 3$, то $m_{i\mu} \leq 2m - 1$ и система операторов $\{B_{i\mu}(x, D_x)\}_{\mu=1}^m$ нормальная [16, с. 137] для всех $x \in \overline{\Gamma}_i$ ($i = 1, \dots, N_0$).

В отличие от нелокальных эллиптических задач (см. пп. 4, 5) будем называть задачу (3.1), (3.2) *локальной*.

Введем ограниченный оператор

$$\mathcal{L}_0: V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q) \rightarrow \mathcal{V}_{p,\mathcal{K}}^l(Q, \partial Q) = V_{p,\mathcal{K}}^l(Q) \prod_{i=1}^{N_0} \prod_{\mu=1}^m V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}-1/p}(\Gamma_i)$$

по формуле $\mathcal{L}_0 u = \{A_0 u, B_{i\mu} u|_{\Gamma_i}\}$.

Вначале будем предполагать, что $n \geq 3$.

2. Для произвольной фиксированной точки $g \in \mathcal{K}_{j\nu}$ ($j = 1, 2; \nu = 1, \dots, N_j$) выберем $\varepsilon = \varepsilon(g) > 0$ так, что $U_\varepsilon(g) \cap \mathcal{K}_{s\mu} = \emptyset$ ($(s, \mu) \neq (j, \nu)$), где $U_\varepsilon(g) = \{x \in \mathbb{R}^n: |x - g| < \varepsilon\}$. Кроме того, мы будем предполагать, что $U_\varepsilon(g) \cap \overline{\Gamma}_l = \emptyset$ ($l \notin I_{j\nu} = \{i: \mathcal{K}_{j\nu} \subset \overline{\Gamma}_i\}$). Очевидно, если $j = 1$, то множество $I_{j\nu}$ состоит из двух индексов i , а если $j = 2$, то множество $I_{j\nu}$ состоит из одного индекса. Согласно сделанному в п. 1 предположению об области Q если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то существует диффеоморфизм, отображающий $U_\varepsilon(g) \cap Q$ в пересечение $\mathcal{D}_g \cap V_g(0)$, где $V_g(0)$ – некоторая окрестность начала координат. При этом $\mathcal{K}_{j\nu} \cap U_\varepsilon(g)$ отображается в $\mathcal{D} \cap V_g(0)$. Множество $\Gamma_i \cap U_\varepsilon(g)$ ($i \in I_{j\nu}$) перейдет в $\Gamma_g^- \cap V_g(0)$ или в $\Gamma_g^+ \cap V_g(0)$, если $j = 1$, и в $(n - 1)$ -мерную гиперплоскость, если $j = 2$. Таким образом, $\Gamma_g^\pm = \{x \in \mathbb{R}^n: \varphi = \pm w_g, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ для $g \in \mathcal{K}_{1\nu}$ и $\Gamma_g^\pm = \{x \in \mathbb{R}^n: \varphi = \pm \pi/2, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ для $g \in \mathcal{K}_{2\nu}$.

Пусть $\text{supp } u \subset U_\varepsilon(g) \cap \overline{Q}$. В новых переменных задача (3.1), (3.2) примет вид

$$A^g(x', D_{y'}, D_{z'})u = f_0(x') \quad (x' \in \mathcal{D}_g \cap V_g(0)), \quad (3.3)$$

$$B_{i\mu}^g(x', D_{y'}, D_{z'})u|_{\Gamma_g^\pm} = f_{i\mu}(x') \quad (x' \in \Gamma_g^\pm \cap V_g(0)). \quad (3.4)$$

Еще раз обратим внимание на то, что i выбирается из условия $\mathcal{K}_{j\nu} \subset \bar{\Gamma}_i$. Переобозначим x' через x .

Рассмотрим следующую краевую задачу с постоянными коэффициентами

$$A_0^g(0, D_y, D_z)u = f_0(x) \quad (x \in \mathcal{D}_g), \quad (3.5)$$

$$B_{i\mu 0}^g(0, D_y, D_z)u|_{\Gamma_g^\pm} = f_{i\mu}(x) \quad (x \in \Gamma_g^\pm), \quad (3.6)$$

где $A_0^g(x, D_y, D_z)$ и $B_{i\mu 0}^g(x, D_y, D_z)$ – главные однородные части операторов $A^g(x, D_y, D_z)$ и $B_{i\mu}^g(x, D_y, D_z)$ соответственно,

$$f = \{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{V}_{p, \kappa}^l(\mathcal{D}_g, \Gamma_g) = V_{p, \kappa}^l(\mathcal{D}_g) \prod_{\pm} \prod_{\mu=1}^m V_{p, \kappa}^{l+2m-m_{i\mu}-1/p}(\Gamma_g^\pm).$$

Запишем операторы $A_0^g(0, D_y, 0)$ и $B_{i\mu 0}^g(0, D_y, 0)$ в полярных координатах r, φ , введенных на плоскости $\{y\}$:

$$\begin{aligned} A_0^g(0, D_y, 0) &= r^{-2m} \hat{A}_0^g(\varphi, D_\varphi, r D_r), \\ B_{i\mu 0}^g(0, D_y, 0) &= r^{-m_{i\mu}} \hat{B}_{i\mu 0}^g(\varphi, D_\varphi, r D_r). \end{aligned}$$

Обозначим через λ_g собственные числа задачи

$$\hat{A}_0^g(\varphi, D_\varphi, \lambda) \hat{u} = 0 \quad (|\varphi| < w_g), \quad (3.7)$$

$$\hat{B}_{i\mu 0}^g(\varphi, D_\varphi, \lambda) \hat{u}|_{\varphi=\pm w_g} = 0. \quad (3.8)$$

Введем оператор

$$\mathcal{L}_0^g(\theta): E_{2, \kappa}^{2m+l}(K_g) \rightarrow \mathcal{E}_{2, \kappa}^l(K_g, \gamma_g) = E_{2, \kappa}^l(K_g) \prod_{\pm} \prod_{\mu=1}^m E_{2, \kappa}^{2m+l-m_{i\mu}-1/p}(\gamma_g^\pm)$$

по формуле $\mathcal{L}_0^g(\theta)u = \{A_0^g(0, D_y, \theta)u, B_{i\mu 0}^g(0, D_y, \theta)u|_{\gamma_g^\pm}\}$, где $\theta \in S^{n-3}$.

Из [9, теорема 7.1] следует, что если на прямой $\text{Im } \lambda = a + 1 - 2m$ нет собственных чисел задачи (3.7), (3.8) и при $l = 0$ подпространства $\ker \mathcal{L}_0^g(\theta)$ и сокер $\mathcal{L}_0^g(\theta)$ тривиальны для всех $\theta \in S^{n-3}$, то задача (3.5), (3.6) однозначно разрешима в $V_{p, \kappa}^{2m+l}(\mathcal{D}_g)$ для любой правой части из $\mathcal{V}_{p, \kappa}^l(\mathcal{D}_g, \Gamma_g)$.

Построим продолжение операторов $A_0^g(x, D_y, D_z)$ и $B_{i\mu 0}^g(x, D_y, D_z)$, определенных в $V_g(0)$, на $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0^g(x, D_y, D_z) &= \eta(x) A_0^g(x, D_y, D_z) + (1 - \eta(x)) A_0^g(0, D_y, D_z), \\ \tilde{B}_{i\mu 0}^g(x, D_y, D_z) &= \eta(x) B_{i\mu 0}^g(x, D_y, D_z) + (1 - \eta(x)) B_{i\mu 0}^g(0, D_y, D_z), \end{aligned}$$

где $\eta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $\eta(x) = 1$ ($|x| < \delta$), $\eta(x) = 0$ ($|x| > 2\delta$), $\delta > 0$ таково, что $\overline{U_{2\delta}(0)} \subset V_g(0)$.

Операторы $\tilde{A}_0^g(x, D_y, D_z)$ и $\tilde{B}_{i\mu 0}^g(x, D_y, D_z)$ мало отличаются по норме от операторов $A_0^g(0, D_y, D_z)$ и $B_{i\mu 0}^g(0, D_y, D_z)$, если $\delta > 0$ достаточно мало. Поэтому если задача (3.5), (3.6) однозначно разрешима в $V_{p,\kappa}^{2m+l}(D_g)$ для любой правой части из $\mathcal{V}_{p,\kappa}^l(D_g, \Gamma_g)$, то и задача

$$\tilde{A}_0^g(x, D_y, D_z)u = f_0(x) \quad (x \in \mathcal{D}_g), \quad (3.9)$$

$$\tilde{B}_{i\mu 0}^g(x, D_y, D_z)u|_{\Gamma_g^\pm} = f_{i\mu}(x) \quad (x \in \Gamma_g^\pm) \quad (3.10)$$

имеет единственное решение $u \in V_{p,\kappa}^{2m+l}(\mathcal{D}_g)$ для любой $f \in \mathcal{V}_{p,\kappa}^l(\mathcal{D}_g, \Gamma_g)$.

Обозначим через

$$\mathcal{R}_0^g: \mathcal{V}_{p,\kappa}^l(\mathcal{D}_g, \Gamma_g) \rightarrow V_{p,\kappa}^{2m+l}(\mathcal{D}_g)$$

оператор, обратный к оператору, определенному по формуле $\{\tilde{A}_0^g(x, D_y, D_z)u, \tilde{B}_{i\mu 0}^g(x, D_y, D_z)u|_{\Gamma_g^\pm}\}$.

3. Пусть теперь $g \in \mathcal{K}_{3\nu}$ – произвольная фиксированная точка. Выберем $\varepsilon = \varepsilon(g) > 0$ так, что $U_\varepsilon(g) \cap \mathcal{K}_{s\mu} = \emptyset$ ($(s, \mu) \neq (3, \nu)$) и $U_\varepsilon(g) \cap \partial Q = \emptyset$. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то существует диффеоморфизм, преобразующий $U_\varepsilon(g)$ на некоторую окрестность начала координат $V_g(0)$ так, что множество $\mathcal{K}_{3\nu} \cap U_\varepsilon(g)$ отобразится на $\mathcal{P} \cap V_g(0)$.

Пусть $\text{supp } u \subset U_\varepsilon(g)$. Тогда в новых переменных уравнение (3.1) примет вид

$$A^g(x', D_{y'}, D_{z'})u = f_0(x') \quad (x' \in V_g(0) \setminus \mathcal{P}). \quad (3.11)$$

Пусть $A_0^g(x', D_{y'}, D_{z'})$ – главная однородная часть оператора $A^g(x', D_{y'}, D_{z'})$. Переобозначим x' через x .

Рассмотрим следующее уравнение

$$A_0^g(0, D_y, D_z)u = f_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}). \quad (3.12)$$

Оператор $A_0^g(0, D_y, 0)$ в полярных координатах r, φ примет вид $A_0^g(0, D_y, 0) = r^{-2m} \times \hat{A}_0^g(\varphi, D_\varphi, rD_r)$.

Обозначим через λ_g собственные числа задачи

$$\hat{A}_0^g(\varphi, D_\varphi, \lambda)u = 0 \quad (0 < \varphi < 2\pi), \quad (3.13)$$

$$D_\varphi^j u|_{\varphi=0} = D_\varphi^j u|_{\varphi=2\pi} \quad (j = 0, 1, \dots, 2m-1). \quad (3.14)$$

Введем оператор

$$\mathcal{L}_0^g(\theta): E_{2,\kappa}^{2m+l}(\mathbb{R}^2) \rightarrow E_{2,\kappa}^l(\mathbb{R}^2)$$

по формуле $\mathcal{L}_0^g(\theta)u = A_0^g(0, D_y, \theta)u$. В силу леммы 2.3 если на прямой $\text{Im } \lambda = a + 1 - 2m$ нет собственных чисел задачи (3.13), (3.14), а $\ker \mathcal{L}_0^g(\theta)$ и $\text{coker } \mathcal{L}_0^g(\theta)$ тривиальны для $l = 0$ и всех $\theta \in S^{n-3}$, то уравнение (3.12) однозначно разрешимо в $V_{p,\kappa}^{2m+l}(\mathbb{R}^n)$ для любой $f_0 \in V_{p,\kappa}^l(\mathbb{R}^n)$.

Продолжим коэффициенты оператора $A_0^g(x, D_y, D_z)$, определенного в $V_g(0)$, на все $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\tilde{A}_0^g(x, D_y, D_z) = \eta(x)A_0^g(x, D_y, D_z) + (1 - \eta(x))A_0^g(0, D_y, D_z),$$

где $\eta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $\eta(x) = 1$ ($|x| < \delta$), $\eta(x) = 0$ ($|x| > 2\delta$), $\delta > 0$ таково, что $\overline{U_{2\delta}(0)} \subset V_g(0)$.

Оператор $\tilde{A}_0^g(x, D_y, D_z)$ мало отличается по норме от оператора $A_0^g(0, D_y, D_z)$, если $\delta > 0$ достаточно мало. Поэтому существует ограниченный обратный оператор $\mathcal{R}_0^g = (\tilde{A}_0^g)^{-1}: V_{p,\kappa}^l(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_{p,\kappa}^{2m+l}(\mathbb{R}^n)$.

4. Прежде чем перейти к изучению задачи (3.1), (3.2), дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть A – линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 . Ограниченный оператор $R_1: B_2 \rightarrow B_1$ называется *левым регуляризатором* оператора A , если $R_1 A = I_1 + T_1$, где I_1 и T_1 – соответственно единичный и компактный операторы в пространстве B_1 . Ограниченный оператор $R_2: B_2 \rightarrow B_1$ называется *правым регуляризатором* оператора A , если $AR = I_2 + T_2$, где I_2 и T_2 – единичный и компактный операторы в пространстве B_2 .

ЛЕММА 3.1. Пусть $n \geq 3$ и выполнены условия III.1–III.3. Пусть, кроме того, на прямой $\text{Im } \lambda = a + 1 - 2t$ нет собственных чисел задачи (3.7), (3.8) для $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ и задачи (3.13), (3.14) для $g \in \mathcal{K}_3$, а подпространства $\ker \mathcal{L}_0^g(\theta)$, $\text{coker } \mathcal{L}_0^g(\theta)$ тривиальны при $l = 0$ и всех $\theta \in S^{n-3}$, $g \in \mathcal{K}$. Тогда оператор $\mathcal{L}_0: V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q) \rightarrow \mathcal{V}_{p,\mathcal{K}}^l(Q, \partial Q)$ фредгольмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно (см. [17, теоремы 14.3 и 15.2]), для доказательства достаточно построить оператор $\mathcal{R}_0$, который является правым и левым регуляризатором оператора $\mathcal{L}_0$.

Для произвольной точки $g \in \mathcal{K}$ выберем $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(g) > 0$ так, что $\varepsilon_0 < \varepsilon$, а образ шара $U_{\varepsilon_0}(g)$ при преобразовании переменных $x \rightarrow x'$ принадлежит шару $\{x': |x'| < \delta\}$. Каждое множество $\mathcal{K}_j$ ($j = 1, 2, 3$) покроем конечным числом шаров $U_{\varepsilon_0}(g_{js})$ ($g_{js} \in \mathcal{K}_j$; $s = 1, \dots, n_j$). При этом будем предполагать, что шары с центрами, принадлежащими разным многообразиям $\mathcal{K}_{j\nu}$, не пересекаются. Положим $\mathcal{K}^{\varepsilon_1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon_1\}$. Выберем число $\varepsilon_1 > 0$ так, что $\overline{\mathcal{K}^{\varepsilon_1}} \subset \bigcup_{j,s} U_{\varepsilon_0}(g_{js})$. Для каждой точки $g \in \overline{Q} \setminus \mathcal{K}^{\varepsilon_1}$ возьмем $0 < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(g) < \varepsilon_1/2$. Покроем множество $\overline{Q} \setminus \mathcal{K}^{\varepsilon_1}$ конечным числом шаров $U_{\varepsilon_0}(g_{js})$ ($j = 4, 5$; $s = 1, \dots, n_j$) так, что $g_{4s} \in \partial Q \setminus \mathcal{K}^{\varepsilon_1}$, $g_{5s} \in Q \setminus \mathcal{K}^{\varepsilon_1}$ и $\overline{U_{\varepsilon_0}(g_{5s})} \subset Q$.

Таким образом, шары $U_{\varepsilon_0}(g_{js})$ ($j = 1, \dots, 5$; $s = 1, \dots, n_j$) образуют покрытие $\overline{Q}$. Рассмотрим функции $\xi_{js} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что

$$\sum_{j=1}^5 \sum_{s=1}^{n_j} \xi_{js}(x) \equiv 1 \quad (x \in \overline{Q}) \quad (3.15)$$

и $\text{supp } \xi_{js} \subset U_{\varepsilon_0}(g_{js})$. Введем также функции $\chi_{js} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, что

$$\chi_{js}(x) \equiv 1 \quad (x \in \text{supp } \xi_{js}) \quad (3.16)$$

и $\text{supp } \xi_{js} \subset U_{\varepsilon_0}(g_{js})$.

Обозначим через $\mathcal{R}_{js}: \mathcal{V}_{p,\mathcal{K}}^l(D_g, \Gamma_g) \rightarrow V_{p,\mathcal{K}}^{2m+l}(D_g)$ ($g = g_{js}$; $j = 1, 2$; $s = 1, \dots, n_j$) и $\mathcal{R}_{3s}: V_{p,\mathcal{K}}^l(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_{p,\mathcal{K}}^{2m+l}(\mathbb{R}^n)$ ($g = g_{3s}$; $s = 1, \dots, n_3$) ограниченные операторы, определенные по формуле $\mathcal{R}_{js} = \mathcal{R}_0^{g_{js}}$ ($j = 1, 2, 3$; $s = 1, \dots, n_j$) (см. подпункты 2, 3 п. 3).

Хорошо известен способ построения регуляризаторов эллиптических операторов с мало меняющимися коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве $\mathbb{R}_+^n$ [18]. Поэтому мы можем ввести ограниченные операторы

$$\mathcal{R}_{4s}: \mathcal{W}_p^l(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}^{n-1}) = W_p^l(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{\mu=1}^m W_p^{l+2m-m_{i_\mu}-1/p}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow W_p^{l+2m}(\mathbb{R}_+^n),$$

если $g_{4s} \in \Gamma_i$ ($s = 1, \dots, n_4$), и $\mathcal{R}_{5s}: W_p^l(\mathbb{R}^n) \rightarrow W_p^{l+2m}(\mathbb{R}^n)$ ($s = 1, \dots, n_5$) такие, что

$$(\tilde{A}_0(x, D_x) \mathcal{R}_{4s} f, \tilde{B}_{i10}(x, D_x) \mathcal{R}_{4s} f|_{x_n=0}, \dots, \tilde{B}_{im0}(x, D_x) \mathcal{R}_{4s} f|_{x_n=0}) = f + T_{4s} f$$

и $\tilde{A}_0(x, D_x)\mathcal{R}_{5s}f_0 = f_0 + T_{5s}f_0$, где $T_{4s}: \mathcal{W}_p^l(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{W}_p^{l+l}(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}^{n-1})$ и $T_{5s}: W_p^l(\mathbb{R}^n) \rightarrow W_p^{l+1}(\mathbb{R}^n)$ – ограниченные операторы, а операторы $\tilde{A}_0(x, D_x)$ и $\tilde{B}_{i\mu 0}(x, D_x)$ определяются аналогично подпунктам 2, 3 п. 3.

Введем ограниченный оператор $\mathcal{R}_0: \mathcal{V}_{p,\kappa}^l(Q, \partial Q) \rightarrow V_{p,\kappa}^{l+2m}(Q)$ по формуле

$$\mathcal{R}_0 f = \sum_{j=1}^5 \sum_{s=1}^{n_j} \chi_{js} C_{js}^{-1} \mathcal{R}_{js} C_{js} \xi_{js} f. \quad (3.17)$$

Здесь C_{js} – оператор невырожденной гладкой замены переменных $x \rightarrow x'$ в шаре $U_\varepsilon(g_{js})$. Эти операторы были определены в подпунктах 2, 3 п. 3 для $j = 1, 2, 3$. Операторы C_{4s} соответствуют локальному распрямлению границы и отображают $U_\varepsilon(g_{4s} \cap Q)$ на $V_{g_{4s}}(0) \cap \mathbb{R}_+^n$, а операторы C_{5s} соответствуют сдвигу на вектор g_{5s} . Под $\xi_{js}f$ мы понимаем вектор-функцию $\{\xi_{js}f_0, \xi_{js}f_{i\mu}\}$ для $i \in \{i: U_{\varepsilon_0}(g_{js}) \cap \Gamma_i \neq \emptyset\}$ и $\mu = 1, \dots, m$. Очевидно, если $i = 3, 5$, то вместо $\xi_{js}f$ мы подставляем $\xi_{js}f_0$.

В силу формулы Лейбница, равенств (3.15), (3.16) и компактности оператора вложения $\mathcal{V}_{p,\kappa}^{l+1}(Q, \partial Q)$ в $\mathcal{V}_{p,\kappa}^l(Q, \partial Q)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \mathcal{R}_0 f &= \sum_{j,s} (T'_{js} C_{js}^{-1} \mathcal{R}_{js} C_{js} \xi_{js} f + \chi_{js} C_{js}^{-1} \tilde{\mathcal{L}}_0 \mathcal{R}_{js} C_{js} \xi_{js} f) \\ &= f + \sum_{j,s} (T'_{js} C_{js}^{-1} \mathcal{R}_{js} C_{js} \xi_{js} f + \chi_{js} C_{js}^{-1} T_{js} \xi_{js} f). \end{aligned}$$

Здесь $T'_{js}, T_{js}: \{F \in \mathcal{V}_{p,\kappa}^l(Q, \partial Q): \text{supp } F \subset \overline{U_{\varepsilon_0}(g_{js})}\} \rightarrow \{F \in \mathcal{V}_{p,\kappa}^l(Q, \partial Q): \text{supp } F \subset \overline{U_{\varepsilon_0}(g_{js})}\}$ – компактные операторы; $T_{js} = 0$, если $j = 1, 2, 3$; $\tilde{\mathcal{L}}_0$ – оператор $\mathcal{L}_0$ в новой системе координат. Таким образом, оператор $\mathcal{R}_0$ является правым регуляризатором оператора $\mathcal{L}_0$. Аналогично легко показать, что оператор $\mathcal{R}_0$ является левым регуляризатором оператора $\mathcal{L}_0$.

Из леммы 3.1, полной непрерывности оператора вложения

$$V_{p,\kappa}^{l+2m}(Q) \hookrightarrow V_{p,\kappa+1-l-2m}^0(Q)$$

и теоремы 7.1, [17] следует

ЛЕММА 3.2. Пусть выполнены условия леммы 3.1. Тогда для всех $u \in V_{p,\kappa}^{l+2m}(Q)$ имеет место оценка

$$\|u\|_{V_{p,\kappa}^{l+2m}(Q)} \leq c(\|\mathcal{L}_0 u\|_{\mathcal{V}_{p,\kappa}^l(Q, \partial Q)} + \|u\|_{V_{p,\kappa+1-l-2m}^0(Q)}), \quad (3.18)$$

где $c > 0$ не зависит от u .

5. Пусть теперь $n = 2$. Тогда $x = y$, а дифференциальные операторы в (3.5), (3.6) и (3.12), будут иметь вид $A_0(0, D_y)$ и $B_{i\mu 0}(0, D_y)$. Повторяя доказательства лемм 3.1 и 3.2, получим следующие утверждения.

ЛЕММА 3.3. Пусть $n = 2$ и выполнены условия III.1, III.2. Пусть на прямой $\text{Im } \lambda = a + 1 - 2t$ нет собственных значений λ_g задачи (3.7), (3.8) для $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ и задачи (3.13), (3.14) для $g \in \mathcal{K}_3$. Тогда оператор $\mathcal{L}_0: V_{p,\kappa}^{l+2m}(Q) \rightarrow \mathcal{V}_{p,\kappa}^l(Q, \partial Q)$ фредгольмов.

ЛЕММА 3.4. Пусть выполнены условия леммы 3.3. Тогда для всех $u \in V_{p,\kappa}^{l+2m}(Q)$ имеет место оценка (3.18).

4. Нелокальные эллиптические задачи в ограниченной области

1. Рассмотрим нелокальную задачу

$$Au = A_0u + A_1u = f_0(x) \quad (x \in Q \setminus \mathcal{K}), \quad (4.1)$$

$$B_{i\mu}u = B_{i\mu 0}u|_{\Gamma_i} + \sum_{r=1,2} B_{i\mu r}u = f_{i\mu}(x) \\ (x \in \Gamma_i; \quad i = 1, \dots, N_0; \quad \mu = 1, \dots, m). \quad (4.2)$$

Здесь $A_0 = A_0(x, D_x)$ и $B_{i\mu 0} = B_{i\mu 0}(x, D_x)$ – однородные дифференциальные операторы с комплексными коэффициентами из C^∞ порядков $2m$ и $m_{i\mu} \leq 2m + l - 1$ соответственно, удовлетворяющие условиям III.1–III.3; $A_1, B_{i\mu 1}, B_{i\mu 2}$ – операторы, для которых выполнено

УСЛОВИЕ IV.1. Операторы $A_1: V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m-1}(Q) \rightarrow V_{p,\mathcal{K}}^l(Q)$, $B_{i\mu 1}: V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m-1}(Q) \rightarrow V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}-1/p}(\Gamma_i)$, $B_{i\mu 2}: V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q) \rightarrow V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}-1/p}(\Gamma_i)$ – линейные ограниченные и существуют числа $\beta, \sigma > 0$ такие, что для всех $u \in V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q)$ выполняются неравенства

$$\|B_{i\mu 2}u\|_{V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}-1/p}(\Gamma_i)} \leq c_1 \|u\|_{V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q \setminus \mathcal{K}_1^{2\beta})}, \quad (4.3)$$

$$\|B_{i\mu 2}u\|_{V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}-1/p}(\Gamma_i \setminus \mathcal{K}_1^\beta)} \leq c_2 \|u\|_{V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q_\sigma)}, \quad (4.4)$$

где $c_1, c_2 > 0$ не зависят от u , $\mathcal{K}_1^\beta = \{x: \rho(x, \mathcal{K}_1) < \beta\}$, $Q_\sigma = \{x \in Q: \rho(x, \partial Q) > \sigma\}$.

2. Введем ограниченный оператор

$$\mathcal{L}: V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q) \rightarrow \mathcal{V}_{p,\mathcal{K}}^l(Q, \partial Q) = V_{p,\mathcal{K}}^l(Q) \prod_{i,\mu} V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}-1/p}(\Gamma_i)$$

по формуле $\mathcal{L}u = \{Au, B_{i\mu}u\}$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что выполнены условия III.1–III.3 и IV.1. Пусть на прямой $\text{Im } \lambda = a + 1 - 2m$ нет собственных чисел λ_g задачи (3.7), (3.8) для $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ и задачи (3.13), (3.14) для $g \in \mathcal{K}_3$, а в случае $n \geq 3$ подпространства $\ker \mathcal{L}_0^g(\theta)$, $\text{coker } \mathcal{L}_0^g(\theta)$ тривиальны для $l = 0$ и всех $\theta \in S^{n-3}$, $g \in \mathcal{K}$. Тогда оператор $\mathcal{L}: V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q) \rightarrow \mathcal{V}_{p,\mathcal{K}}^l(Q, \partial Q)$, соответствующий нелокальной задаче (4.1), (4.2), фредгольмов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Для доказательства достаточно построить оператор $\mathcal{R}$, который является правым и левым регуляризатором оператора $\mathcal{L}$.

Для этого введем ограниченные операторы $R_1: V_{p,\mathcal{K}}^l(Q) \rightarrow V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q)$ и $R_2: \mathcal{V}_{p,\mathcal{K}}^l(\partial Q) \rightarrow V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q)$ по формулам

$$R_1 f_0 = \mathcal{R}_0(f_0, 0), \quad R_2 f' = \mathcal{R}_0(0, f'),$$

где $\mathcal{R}_0$ – регуляризатор оператора $\mathcal{L}_0$, построенный в лемме 3.1; $f = (f_0, f')$, $f' = \{f_{i\mu}\}$; $\mathcal{V}_{p,\mathcal{K}}^l(\partial Q) = \prod_{i,\mu} V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}-1/p}(\Gamma_i)$.

Определим операторы $B, B_r: V_{p,\kappa}^{l+2m}(Q) \rightarrow \mathcal{V}_{p,\kappa}^l(\partial Q)$ следующим образом: $B_r = \{B_{i\mu r}\}$ ($i = 1, \dots, N_0; \mu = 1, \dots, m$), $B = B_0 + B_1 + B_2$, где $r = 0, 1, 2$.

Положим

$$\mathcal{R}f = R_1 f_0 + (I - R_2 B_2) R_2 \Phi, \quad (4.5)$$

где $\Phi = f' - B_2 R_1 f_0$.

II. Покажем, что оператор $\mathcal{R}$ является правым регуляризатором оператора $\mathcal{L}$.

Для этого введем операторы T_1 (T_2) из $V_{p,\kappa}^l(Q)$ в $V_{p,\kappa}^l(Q)$ (в $\mathcal{V}_{p,\kappa}^l(\partial Q)$) и T_3 (T_4) из $\mathcal{V}_{p,\kappa}^l(\partial Q)$ в $V_{p,\kappa}^l(Q)$ (в $\mathcal{V}_{p,\kappa}^l(\partial Q)$) следующим образом:

$$T_0(f_0, 0) = (T_1 f_0, T_2 f_0), \quad T_0(0, f') = (T_3 f', T_4 f'),$$

где $T_0: \mathcal{V}_{p,\kappa}^l(Q, \partial Q) \rightarrow \mathcal{V}_{p,\kappa}^l(Q, \partial Q)$ – компактный оператор, определенный по формуле $\mathcal{L}_0 \mathcal{R}_0 = I + T_0$.

По определению операторы $T_1, \dots, T_4$ вполне непрерывны в соответствующих пространствах и выполнены соотношения:

$$A_0 R_1 f_0 = f_0 + T_1 f_0, \quad A_0 R_2 f' = T_3 f', \quad (4.6)$$

$$B_0 R_1 f_0 = T_2 f_0, \quad B_0 R_2 f' = f' + T_4 f'. \quad (4.7)$$

Обозначим $\tilde{\varepsilon} = \max_{j,s} \varepsilon_0(g_{js})$ ($j = 1, \dots, 5; s = 1, \dots, n_j$), см. доказательство леммы 3.1. Мы можем считать, что $0 < \tilde{\varepsilon} < \min\{\sigma, \beta/4\}$. Тогда

$$\text{supp } \chi_{js} \cap Q_\sigma = \emptyset \quad (j = 1, 2, 4; s = 1, \dots, n_j), \quad (4.8)$$

$$\text{если } \text{supp } \xi_{js} \cap \mathcal{K}_1^\beta \neq \emptyset, \quad \text{то } \text{supp } \chi_{js} \subset \mathcal{K}_1^{3\beta/2}. \quad (4.9)$$

Из (3.17), (4.8) и (4.4) следует, что

$$\text{supp } B_2 R_2 f' \subset \partial Q \cap \overline{\mathcal{K}_1^\beta}. \quad (4.10)$$

Отсюда в силу (3.17), (4.9) и (4.3) имеем

$$B_2 R_2 B_2 R_2 F = 0 \quad (F \in \mathcal{V}_{p,\kappa}^l(\partial Q)). \quad (4.11)$$

Используя равенства (4.11) для $F = \Phi$ и (4.7), получим

$$\begin{aligned} B\mathcal{R}f &= B_1 \mathcal{R}f + B_0 R_1 f_0 + B_0 R_2 \Phi - B_0 R_2 B_2 R_2 \Phi + B_2 R_1 f_0 + B_2 R_2 \Phi \\ &\quad - B_2 R_2 B_2 R_2 \Phi = B_1 \mathcal{R}f + T_2 f_0 + f' - B_2 R_1 f_0 + T_4 \Phi - B_2 R_2 \Phi - T_4 B_2 R_2 \Phi \\ &\quad + B_2 R_1 f_0 + B_2 R_2 \Phi = f' + B_1 \mathcal{R}f + T_2 f_0 + T_4 \Phi - T_4 B_2 R_2 \Phi = f' + T'' f, \end{aligned}$$

где $T'' = B_1 \mathcal{R}f + T_2 f_0 + T_4 \Phi - T_4 B_2 R_2 \Phi$.

В силу полной непрерывности оператора вложения $V_{p,\kappa}^{l+2m}(Q)$ в $V_{p,\kappa}^{l+2m-1}(Q)$ и условия IV.1 оператор $T'': \mathcal{V}_{p,\kappa}^l(Q, \partial Q) \rightarrow \mathcal{V}_{p,\kappa}^l(\partial Q)$ – вполне непрерывный.

Подставляя в выражение $A\mathcal{R}f$ равенства (4.6), получим

$$A\mathcal{R}f = f_0 + T_1 f_0 + T_3 \Phi - T_3 B_2 R_2 \Phi + A_1 \mathcal{R}f = f_0 + T' f,$$

где $T'f = A_1\mathcal{R}f + T_1f_0 + T_3\Phi - T_3B_2R_2\Phi$. В силу полной непрерывности оператора вложения $V_{p,\varkappa}^{l+2m}(Q)$ в $V_{p,\varkappa}^{l+2m-1}(Q)$ оператор $T': \mathcal{V}_{p,\varkappa}^l(Q, \partial Q) \rightarrow V_{p,\varkappa}^l(Q)$ – вполне непрерывный. Таким образом, $\mathcal{L}\mathcal{R} = I + T_R$, где $T_Rf = (T'f, T''f)$.

Очевидно, оператор $T_R: \mathcal{V}_{p,\varkappa}^l(Q, \partial Q) \rightarrow \mathcal{V}_{p,\varkappa}^l(Q, \partial Q)$ – вполне непрерывный.

III. Покажем, что $\mathcal{R}$ является левым регуляризатором оператора $\mathcal{L}$. Очевидно,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\mathcal{L}u &= R_1(A_0 + A_1)u + (I - R_2B_2)R_2(B_0u + B_1u + B_2u - B_2R_1(A_0u + A_1u)) \\ &= R_1A_0u + R_2B_0u + R_1A_1u + R_2B_1u + R_2B_2(u - R_1A_0u) \\ &\quad - R_2B_2R_1A_1u - R_2B_2R_2B_0u - R_2B_2R_2B_1u \\ &\quad - R_2B_2R_2B_2(u - R_1A_0u) - R_2B_2R_2B_2R_1A_1u.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Поскольку оператор $\mathcal{R}_0$ является левым регуляризатором оператора $\mathcal{L}_0$, мы имеем

$$R_1A_0u + R_2B_0u = u + T_5u, \quad (4.13)$$

где $T_5: V_{p,\varkappa}^{l+2m}(Q) \rightarrow V_{p,\varkappa}^{l+2m}(Q)$ – вполне непрерывный оператор.

Из (4.12), (4.13) получим

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\mathcal{L}u &= u + T_5u + R_1A_1u + R_2B_1u + R_2B_2(R_2B_0u - T_5u) \\ &\quad - R_2B_2R_1A_1u - R_2B_2R_2B_0u - R_2B_2R_2B_1u \\ &\quad - R_2B_2R_2B_2R_2B_0u + R_2B_2R_2B_2T_5u - R_2B_2R_2B_2R_1A_1u.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Из равенства (4.11) для $F = B_0u$ следует $R_2B_2R_2B_2R_2B_0u = 0$. Таким образом, (4.14) примет вид $\mathcal{R}\mathcal{L}u = u + T_Lu$, где

$$\begin{aligned}T_Lu &= T_5u + R_1A_1u + R_2B_1u - R_2B_2T_5u \\ &\quad - R_2B_2(R_1A_1u + R_2B_1u - R_2B_2T_5u + R_2B_2R_1A_1u).\end{aligned}$$

В силу условия 4.1 и компактности оператора T_5 оператор $T_L: V_{p,\varkappa}^{l+2m}(Q) \rightarrow V_{p,\varkappa}^{l+2m}(Q)$ – вполне непрерывный.

Из теоремы 4.1, полной непрерывности оператора вложения

$$V_{p,\varkappa}^{l+2m}(Q) \text{ в } V_{p,\varkappa+1-k-2m}^0(Q)$$

и теоремы 7.1 из [17] следует

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Тогда для всех $u \in V_{p,\varkappa}^{l+2m}(Q)$ имеет место оценка:

$$\|u\|_{V_{p,\varkappa}^{l+2m}(Q)} \leq c(\|\mathcal{L}u\|_{\mathcal{V}_{p,\varkappa}^l(Q, \partial Q)} + \|u\|_{V_{p,\varkappa+1-l-2m}^0(Q)}), \quad (4.15)$$

где $c > 0$ не зависит от u .

Отметим также, что оценку (4.15) можно получить независимо от теоремы 4.1, используя леммы 1.1, 3.2, а также схему доказательства теоремы 2.1 из [2].

5. Эллиптические задачи

с нелокальными условиями на сдвигах границы

1. В этом пункте мы изучим примеры нелокальных эллиптических задач вида (4.1), (4.2), являющиеся обобщениями задачи, рассмотренной в работе [1].

Обозначим через $\omega_{is}(x)$ бесконечно гладкое невырожденное преобразование, отображающее некоторую окрестность Ω_i многообразия Γ_i на множество $\omega_{is}(\Omega_i)$ так, что $\omega_{is}(\Gamma_i) \subset Q$, $s = 1, \dots, M_i$, $i = 1, \dots, N_0$, где $\omega_{i0}(x) \equiv x$.

Определим множество $\mathcal{K}$ по формуле

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \left\{ \bigcup_{i,s} \omega_{is}(\bar{\Gamma}_i \setminus \Gamma_i) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{j,p} \bigcup_{i,s} \omega_{jp}(\omega_{is}(\bar{\Gamma}_i \setminus \Gamma_i) \cap \Gamma_j) \right\} \quad (5.1)$$

$$(i, j = 1, \dots, N_0; \quad s = 1, \dots, M_i; \quad p = 1, \dots, M_j).$$

Будем предполагать, что множество $\mathcal{K}$ состоит из попарно непересекающихся замкнутых $(n-2)$ -мерных многообразий $\mathcal{K}_{j\nu}$ ($j = 1, 2, 3$; $\nu = 1, \dots, N_j$) класса C^∞ , если $n \geq 3$, или изолированных точек, если $n = 2$, при этом $\bigcup_\nu \mathcal{K}_{1\nu} = \partial Q \setminus \bigcup_i \Gamma_i$, $\mathcal{K}_{2\nu} \subset \bigcup_i \Gamma_i$ и $\mathcal{K}_{3\nu} \subset Q$. Пусть, кроме того, выполняются следующие условия.

УСЛОВИЕ V.1. $\omega_{is}(\bar{\Gamma}_i) \cap \mathcal{K}_1 = \emptyset$, $s = 1, \dots, M_i$; $i = 1, \dots, N_0$.

УСЛОВИЕ V.2. Если $\mathcal{K}_{3\nu} \cap \omega_{is}(\Gamma_i) \neq \emptyset$, то $\mathcal{K}_{3\nu} \subset \omega_{is}(\Gamma_i)$ и $\omega_{is}^{-1}(\mathcal{K}_{3\nu}) \subset \mathcal{K}$.

Рассмотрим нелокальную задачу

$$Au = A(x, D)u = f_0(x) \quad (x \in Q \setminus \mathcal{K}), \quad (5.2)$$

$$B_{i\mu}u = \sum_{s=0}^{M_i} (B_{i\mu}^s(x, D)u)(\omega_{is}(x))|_{\Gamma_i} = f_{i\mu}(x)$$

$$(x \in \Gamma_i; \quad i = 1, \dots, N_0; \quad \mu = 1, \dots, m). \quad (5.3)$$

Здесь $A(x, D)$ и $B_{i\mu}^s(x, D)$ – дифференциальные операторы с комплекснозначными коэффициентами класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ порядков $2m$ и $m_{i\mu} \leq l + 2m - 1$ соответственно. Предположим, что $A_0(x, D)$ и $B_{i\mu 0}(x, D)$, являющиеся главными однородными частями операторов $A(x, D)$ и $B_{i\mu}^0(x, D)$, удовлетворяют условиям III.1–III.3.

Введем ограниченные операторы $A_1: V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m-1}(Q) \rightarrow V_{p,\mathcal{K}}^l(Q)$, $B_{i\mu 1}: V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m-1}(Q) \rightarrow V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}-1/p}(\Gamma_i)$ и $B_{i\mu 2}: V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q) \rightarrow V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}-1/p}(\Gamma_i)$ по формулам $A_1 = A - A_0$, $B_{i\mu 1}u = (B_{i\mu}^0 - B_{i\mu 0}u)|_{\Gamma_i}$, $B_{i\mu 2}u = \sum_{1 \leq s} (B_{i\mu}^s(x, D)u)(\omega_{is}(x))|_{\Gamma_i}$.

ЛЕММА 5.1. Пусть выполнены условия V.1, V.2. Тогда операторы A_1 , $B_{i\mu 1}$ и $B_{i\mu 2}$ удовлетворяют условию IV.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим справедливость неравенств (4.3), (4.4), рассматривая функции $\varphi_{i\mu s} = (B_{i\mu s}(x, D)u)(\omega_{is}(x))|_{\Gamma_i}$ вместо функций $B_{i\mu 2}u$, $1 \leq s$.

Не ограничивая общности, предположим, что $\mathcal{M}_{is} = \omega_{is}(\bar{\Gamma}_i) \cap \partial Q \neq \emptyset$. Тогда в силу условия V.1 существует такая окрестность G_{is} множества $\omega_{is}(\bar{\Gamma}_i)$ и число $\beta > 0$, что $\mathcal{M}_{is}^{2\beta} \subset G_{is}$, $\bar{G}_{is} \subset \omega_{is}(\Omega_i)$, $G_{is} \cap \mathcal{K}_1^{2\beta} = \emptyset$, $G_{is} \cap \mathcal{K} = \omega_{is}(\bar{\Gamma}_i) \cap \mathcal{K}$. По лемме 1.2 для любой $u \in V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q)$ существует функция $U \in V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q \cup \mathcal{M}_{is}^{2\beta})$ такая, что $U(x) = u(x)$ для $x \in Q$ и выполнена оценка

$$\|U\|_{V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(\mathcal{M}_{is}^{2\beta})} \leq k_1 \|u\|_{V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q \cap \mathcal{M}_{is}^{2\beta})}. \quad (5.4)$$

Обозначим $\Phi_{i\mu s}(x) = \xi_{is}(\omega_{is}(x)) (B_{i\mu s}(x, D)U)(\omega_{is}(x))$ для $x \in \Omega_i \cap Q$, $\Phi_{i\mu s}(x) = 0$ для $x \in Q \setminus \Omega_i$, где $\xi_{is} \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\xi_{is}(x) = 1$ для $x \in \omega_{is}(\Gamma_i)$, $\xi_{is}(x) = 0$ для $x \notin \tilde{G}_{is} = (G_{is} \cap Q) \cup \mathcal{M}_{is}^\beta$. Очевидно, $\Phi_{i\mu s} \in V_{p, \mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}}(Q)$ и $\varphi_{i\mu s} = \Phi_{i\mu s}|_{\Gamma_i}$. Поэтому, переходя к новым переменным $x' = \omega_{is}(x)$ и используя условие согласования V.2 и неравенство (5.4), получим

$$\begin{aligned} \|\varphi_{i\mu s}\|_{V_{p, \mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}-1/p}(\Gamma_i)} &\leq \|\Phi\|_{V_{p, \mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}}(Q)} \\ &\leq k_2 \sum_{|\alpha| \leq m_{i\mu}} \|\xi_{is}(x') D_{x'} U(x')\|_{V_{p, \mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}}(\tilde{G}_{is})} \leq k_3 \|u\|_{V_{p, \mathcal{K}}^{l+2m}(Q \setminus \mathcal{K}_1^{2\beta})}. \end{aligned}$$

Очевидно, $\omega_{is}(\Gamma_i \setminus \mathcal{K}_1^\beta) \subset Q_{2\sigma}$ для некоторого $\sigma > 0$. Обозначим $\Psi_{i\mu s}(x) = \Phi_{i\mu s}(x) \times \eta_{is}(\omega_{is}(x))$ для $x \in \Omega_i \cap Q$, $\Psi_{i\mu s}(x) = 0$ для $x \in Q \setminus \Omega_i$, где $\eta_{is} \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta_{is}(x) = 1$ для $x \in Q_{2\sigma}$, $\eta_{is}(x) = 0$ для $x \notin Q_\sigma$. Легко видеть, что $\Psi_{i\mu s} \in V_{p, \mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}}(Q)$ и $\varphi_{i\mu s}|_{\Gamma_i \setminus \mathcal{K}_1^\beta} = \Psi_{i\mu s}|_{\Gamma_i \setminus \mathcal{K}_1^\beta}$. Поэтому выполняются неравенства:

$$\|\varphi_{i\mu s}\|_{V_{p, \mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}-1/p}(\Gamma_i \setminus \mathcal{K}_1^\beta)} \leq \|\Psi_{i\mu s}\|_{V_{p, \mathcal{K}}^{l+2m-m_{i\mu}}(Q)} \leq k_4 \|u\|_{V_{p, \mathcal{K}}^{l+2m}(Q_\sigma)}.$$

Из леммы 5.1 и теорем 4.1, 4.2 следует

ТЕОРЕМА 5.1. *Предположим, что выполнены условия III.1–III.3 и V.1, V.2. Пусть на прямой $\text{Im } \lambda = a + 1 - 2t$ нет собственных чисел λ_g задачи (3.7), (3.8) для всех $g \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ и задачи (3.13), (3.14) для всех $g \in \mathcal{K}_3$, а в случае $n \geq 3$ подпространства $\ker \mathcal{L}_0^g(\theta)$ и $\text{coker } \mathcal{L}_0^g(\theta)$ тривиальны для $l = 0$ и всех $\theta \in S^{n-3}$, $g \in \mathcal{K}$. Тогда оператор $\mathcal{L}: V_{p, \mathcal{K}}^{l+2m}(Q) \rightarrow \mathcal{V}_{p, \mathcal{K}}^l(Q, \partial Q)$, соответствующий нелокальной задаче (5.2), (5.3), фредгольмов; при этом для всех $u \in V_{p, \mathcal{K}}^{l+2m}(Q)$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{V_{p, \mathcal{K}}^{l+2m}(Q)} \leq C (\|\mathcal{L}u\|_{\mathcal{V}_{p, \mathcal{K}}^l(Q, \partial Q)} + \|u\|_{V_{p, \mathcal{K}}^0(Q)}), \quad (5.5)$$

где $c > 0$ не зависит от u .

2. В силу теорем 4.1 и 5.1 достаточные условия фредгольмовости оператора

$$\mathcal{L}_0: V_{p, \mathcal{K}}^{l+2m}(Q) \rightarrow \mathcal{V}_{p, \mathcal{K}}^l(Q, \partial Q),$$

соответствующего локальной эллиптической задаче (3.1), (3.2), являются одновременно достаточными условиями фредгольмовости оператора

$$\mathcal{L}: V_{p, \mathcal{K}}^{l+2m}(Q) \rightarrow \mathcal{V}_{p, \mathcal{K}}^l(Q, \partial Q),$$

соответствующего нелокальным задачам (4.1), (4.2) и (5.2), (5.3). При этом, грубо говоря, предполагается лишь, что носитель нелокальных членов не подходит к множеству точек сопряжения $\mathcal{K}_1$ (см. условия IV.1 и V.1). Однако, в отличие от эллиптических задач в областях с угловыми точками и ребрами, задача (3.1), (3.2) рассматривается на множестве $Q \setminus \mathcal{K}$, а не во всей области Q . Кроме того, преобразования ω_{is} могут переносить особенности решений с точек множества $\bar{\Gamma}_1 \setminus \Gamma_1 \subset \mathcal{K}_1$ на множество

$\omega_{is}(\bar{\Gamma}_i \setminus \Gamma_i)$. Поэтому помимо $\mathcal{K}_1$ в определении весовых пространств вводятся множества $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$, что соответствует условиям согласования. Ниже мы покажем, что для достаточно больших a нелокальную задачу (5.2), (5.3) можно рассматривать во всей области Q , а вместо множества $\mathcal{K}$ в определении весовых пространств использовать множество $\mathcal{K}_1$.

Пусть $\delta > 0$ таково, что $\mathcal{K}_{j\nu}^\delta \cap \mathcal{K}_{i\eta}^\delta = \emptyset$ для всех $(j, \nu) \neq (i, \eta)$ и $\mathcal{K}_3^\delta \subset Q$. Мы также будем предполагать, что $l + 2m - 2/p - 1 \geq 0$. Это условие справедливо, если $p \geq 2$ или если выполнено одно из неравенств: $m > 1$ или $l > 0$. Если же $1 < p < 2$, $m = 1$, $l = 0$, то мы будем требовать выполнения этого условия.

ЛЕММА 5.2. Пусть $a > 2m - 1$, и пусть $l + 2m - 2/p - 1 \geq 0$, если $1 < p < 2$. Тогда для всех $u \in W_p^{l+2m}(\mathcal{K}_j^\delta \cap Q)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(\mathcal{K}_j^\delta \cap Q)} \leq c_1 \|u\|_{W_p^{l+2m}(\mathcal{K}_j^\delta \cap Q)}, \quad (5.6)$$

где $c_1 > 0$ не зависит от u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, предположим, что $n \geq 3$. Используя разбиение единицы, гладкое невырожденное преобразование переменных и теорему о продолжении функций в пространствах Соболева, мы убеждаемся, что достаточно доказать оценку

$$I_\alpha(v) = \int_{|z| < d} dz \int_{|y| < R} |y|^{p(\kappa - l - 2m + |\alpha|)} |D^\alpha v|^p dy \leq k_1 \|u\|_{W_p^{l+2m}(G)}^p \quad (5.7)$$

для всех $v \in W_p^{l+2m}(G)$ и $|\alpha| \leq l + 2m$, где $G = \{(y, z) : |y| < R, |z| < d\}$.

Если $|\alpha| \geq l + 2m - 1$, из условий $a > 2m - 1$, $l + 2m - 2/p - 1 \geq 0$ и равенства $\kappa = a + 1 - 2/p + l$ получим оценку $\kappa - l - 2m + |\alpha| > l + 2m - 2/p - 1 \geq 0$. Таким образом, неравенство (5.7) выполняется для $|\alpha| \geq l + 2m - 1$.

Рассмотрим теперь случай $|\alpha| \leq l + 2m - 2$. В силу теоремы вложения Соболева для почти всех $|z| < d$ справедливо неравенство:

$$\sup_{|y| \leq R} |D^\alpha v(y, z)| \leq k_2 \|v(y, z)\|_{W_p^{l+2m}(S_R(0))}, \quad (5.8)$$

где $k_2 > 0$ не зависит от v и от z .

Из условия $a > 2m - 1$ следует, что $p(\kappa - l - 2m + |\alpha|) + 1 > -1$. Следовательно, в силу (5.8) имеем

$$I_\alpha(v) \leq k_3 \int_{|z| < d} \|v\|_{W_p^{l+2m}(S_R(0))}^p dz \int_{r < R} r^{p(\kappa - l - 2m + |\alpha|) + 1} dr \leq k_4 \|v\|_{W_p^{l+2m}(G)}^p.$$

Далее в определении весовых пространств $V_a^k(Q)$ и $V_a^{k-1/2}(\Gamma_i)$, введенных в п. 1, будем использовать множество $\mathcal{K}_1$ вместо множества $\mathcal{K}$. Тогда, применяя лемму 5.2 и повторяя доказательство леммы 5.1, мы получим следующее утверждение.

ЛЕММА 5.3. Пусть выполнено условие V.1, и пусть $a > 2t-1$, $l+2t-2/p-1 \geq 0$, если $1 < p < 2$. Тогда операторы A_1 , $B_{i\mu 1}$ и $B_{i\mu 2}$ удовлетворяют условию IV.1, в котором вместо множества $\mathcal{K}$ используется множество $\mathcal{K}_1$.

Из леммы 5.3 и теорем 4.1, 4.2 следует

ТЕОРЕМА 5.2. Предположим, что выполнены условия III.1–III.3 и V.1. Пусть $a > 2t-1$, $l+2t-2/p-1 \geq 0$, если $1 < p < 2$. Пусть, кроме того, на прямой $\text{Im } \lambda = a+1-2t$ нет собственных чисел λ_g задачи (3.7), (3.8) для всех $g \in \mathcal{K}_1$, а в случае $n \geq 3$ подпространства $\ker \mathcal{L}_0^g(\theta)$ и $\text{coker } \mathcal{L}_0^g(\theta)$ тривиальны для $l=0$ и всех $\theta \in S^{n-3}$, $g \in \mathcal{K}_1$. Тогда оператор $\mathcal{L}: V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q) \rightarrow \mathcal{V}_{p,\mathcal{K}}^l(Q, \partial Q)$, соответствующий нелокальной задаче (5.2), (5.3), фредгольмов; при этом для всех $u \in V_{p,\mathcal{K}}^{l+2m}(Q)$ справедливо неравенство (5.5).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. РАН. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
- [2] Скубачевский А. Л. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Матем. сб. 1986. Т. 129. № 2. С. 279–302.
- [3] Скубачевский А. Л. Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 120–131.
- [4] Скубачевский А. Л. Метод срезающих функций в теории нелокальных задач // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 128–139.
- [5] Skubachevskii A. L. On the stability of index of nonlocal elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 160. № 2. P. 323–341.
- [6] Кишкис К. Ю. Об индексе задачи Бицадзе–Самарского для гармонических функций // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 1. С. 105–110.
- [7] Гущин А. К., Михайлов В. П. О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160.
- [8] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
- [9] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. L_p -оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами // Тр. ММО. 1978. Т. 37. С. 49–93.
- [10] Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
- [11] Sato K., Ueno T. Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary // J. Math. Kyoto Univ. 1965. V. 4. № 3. P. 529–605.
- [12] Taira K. On the existence of Feller semigroups with boundary conditions // Mem. of Amer. Math. Soc. 1992. V. 99. № 475. P. 1–65.
- [13] Скубачевский А. Л. О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов // Докл. РАН. 1989. Т. 307. № 2. С. 287–291.
- [14] Bensoussan A., Lions J. L. Impulse Control and Quasi-Variational Inequalities. Paris: Gauthier-Villars, 1984.
- [15] Arganovich M., Denk R., Faierman M. Weakly smooth nonselfadjoint spectral elliptic boundary problems // Spectral Theory, Microlocal Analysis, Singular Manifolds. Berlin: Akademie Verlag, 1997. P. 137–199.
- [16] Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- [17] Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1971.
- [18] Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Матем. сб. 1965. Т. 68. № 3. С. 373–416.