Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Гутерман, Г. Долинар, Б. Кузьма, Проблема Поля о конвертируемости для симметрических матриц, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 5, 684–698

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9071>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:28:34

Проблема Поля о конвертируемости для симметрических матриц

А. Гутерман, Г. Долинар, Б. Кузьма

В работе дано полное решение проблемы о симметричной слабой конвертации $(0, 1)$ -матриц.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Известно, что две важные комбинаторные функции – определитель и перманент – выглядят сравнительно одинаково:

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$
$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)};$$

здесь $A = (a_{ij})$ – $n \times n$ -матрица, элементы которой принадлежат произвольному коммутативному кольцу и $\mathfrak{S}_n$ обозначает множество всех перестановок на $\{1, 2, \dots, n\}$. Функция $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$ обозначает знак перестановки σ , т.е., $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, если σ является четной перестановкой и $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$, если σ является нечетной перестановкой.

Начиная с работы [1] 1913 г., принадлежащей Полю, многие исследователи изучают возможность конвертации перманента в определитель.

Для $n = 2$ Полю заметил, что преобразование $T: M_2 \rightarrow M_2$, определяемое формулой

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

полностью решает этот вопрос, т.е. $\operatorname{per} A = \det T(A)$. Однако, как позже заметил Сеге [2], не существует унифицированного метода приписывания знаков $\pm$ к элементам матриц любого фиксированного размера $n > 2$, конвертирующего перманент в определитель. Эти результаты получили свое развитие в следующих двух направлениях.

С одной стороны, в работах [3]–[5] отсутствие конвертации, т.е. матричного преобразования T , для которого $\operatorname{per} A = \det T(A)$ для всех матриц A , было доказано

Работа выполнена при поддержке совместного российско-словенского гранта BI-RU/10-11-010. Также работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00140-а) и гранта МД-2502.2012.1.

для целого ряда различных классов матричных преобразований. Один из первых результатов в этом направлении принадлежит Маркусу и Минку [5] и утверждает, что в классе линейных отображений конвертация невозможна. Отметим, что отдельные преобразования, осуществляющие конвертацию перманента и определителя на всем пространстве матриц или его подпространствах, все-таки существуют, см. например [6], [7]. Таким образом возникает естественный вопрос: когда метод Полиа может быть использован для вычисления перманента данной матрицы, известный как проблема Полиа о перманенте. Подробное описание этого метода можно найти в работах [8]–[11] и их библиографии.

Параллельно соответствующая задача исследовалась на пространстве симметрических матриц. В частности, Лим в работе [12] доказал аналог теоремы Маркуса и Минка в вещественном случае. Далее Коелхо и Дафнер [13] обобщили результат Лима на поле, у которого не менее n элементов и характеристика которого отлична от двух. Кроме того, рассматривались обобщения этих результатов на произвольные иммананты на пространстве симметрических матриц, см. [14], [15].

С другой стороны, наличие конвертации для перманента данной фиксированной матрицы в определитель посредством приписывания знаков $\pm$ к элементам матрицы позволяет заключить, что эта матрица имеет некоторую специальную структуру. В частности, если матрица является неотрицательной, то она должна содержать достаточно много нулей. Первый результат в этом направлении, показывающий, что существует количественный барьер для конвертации, принадлежит Гибсону [16]. Для того, чтобы сформулировать этот результат нам потребуются некоторые обозначения. Пусть M_n обозначает множество всех $n \times n$ матриц с коэффициентами из множества $\{0, 1\} \subseteq \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ – произвольное коммутативное кольцо нулевой характеристики. Пусть $S_n \subseteq M_n$ – подмножество симметрических матриц. Заметим, что в теории графов элементы S_n соответствуют присоединенным матрицам неориентированных графов, возможно с петлями. Если $A \in M_n$, будем называть ее $(0, 1)$ матрицей и обозначим через $v(A)$ число ее ненулевых элементов. Заметим, что $v(A)$ равняется сумме всех элементов $(0, 1)$ матрицы A . Аналогично, обозначим через $M_n(\{-1, 1\})$ множество всех $n \times n$ матриц с коэффициентами из множества $\{-1, 1\} \subseteq \mathcal{R}$. $X \circ A$ обозначает произведение Шура или поэлементное произведение матриц A и X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Будем говорить, что матрица $A \in M_n$ является *конвертируемой*, если существует $X \in M_n(\{-1, 1\})$ такая, что $\text{per } A = \det(X \circ A)$. Матрица $A \in S_n$ называется *симметрично конвертируемой*, если существует симметрическая матрица $X \in M_n(\{-1, 1\})$ такая, что $\text{per } A = \det(X \circ A)$. Матрица $A \in S_n$ называется *симметрично слабо конвертируемой*, если существует симметрическая матрица $X \in M_n(\{-1, 1\})$, для которой $\text{per } A = |\det(X \circ A)|$, т.е. $\text{per } A \in \{\det(X \circ A), -\det(X \circ A)\}$.

Заметим, что не все 2×2 матрицы являются симметрично конвертируемыми, однако, все они – слабо симметрично конвертируемы, так как

$$\text{per} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Следующее простое наблюдение будет нам полезно в дальнейших рассуждениях.

ЛЕММА 1.2. Пусть $A \in S_n$ является слабо симметрично конвертируемой матрицей. Тогда матрица A – конвертируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A является симметрично конвертируемой, то доказывать нечего. В противном случае, существует матрица $X \in M_n(\{-1, 1\})$ такая, что $\text{per } A = -\det(X \circ A)$. Рассмотрим $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})$, которая получается из X умножением первой строки на -1 , т.е., $\tilde{x}_{1j} = -x_{1j}$ для всех j и $\tilde{x}_{ij} = x_{ij}$ для всех $i \geq 2$ и для всех j . Тогда $\text{per } A = \det(\tilde{X} \circ A)$.

Следующая матрица была введена Гибсоном в работе [16] и будет играть важную роль в наших рассуждениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Матрица Гибсона $T_n = (t_{ij}) \in M_n$ имеет вид

$$t_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 \leq i < j < n, \\ 1, & \text{если } i \geq j \text{ или } j = n. \end{cases}$$

В работе [16; с. 474] Гибсон доказал следующий важный результат.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $A \in M_n$ является конвертируемой матрицей с условием $\text{per } A > 0$. Тогда $v(A) \leq \Omega_n := (1/2)(n^2 + 3n - 2)$ и равенство справедливо в том и только том случае, когда существуют матрицы перестановок $P, Q \in M_n$ такие, что $A = PT_nQ$.

Приведенная выше теорема утверждает, что число $\Omega_n = (n^2 + 3n - 2)/2$ является верхним барьером для конвертации, т.е. если $v(A) > \Omega_n$, то матрица A не является конвертируемой. В экстремальном случае, когда $v(A) = \Omega_n$, конвертируемая матрица является единственной с точностью до перестановочной эквивалентности. Позднее, см. например, работу Бруалди и Шадера [6] и ее библиографию, изучались конвертируемые $(0, 1)$ матрицы с менее чем Ω_n единицами, обладающие тем свойством, что при замене любого нуля на единицу матрица перестает быть конвертируемой.

Однако проблема существования барьера Гибсона для конвертации осталась открытой для пространства всех симметрических матриц. Заметим, что если разрешено изменять знаки элементов симметрической матрицы каким-либо несимметричным способом, то верхний барьер для симметрических матриц совпадает с верхним барьером для несимметрических матриц. При рассмотрении симметрических $(0, 1)$ матриц достаточно естественно предполагать, что конвертация осуществляется способом, не нарушающим симметричности. Более того, так как перманент $(0, 1)$ матрицы всегда неотрицателен, то достаточно рассмотреть случай симметричной слабой конвертации. Таким образом, после теоремы Гибсона и целого ряда дальнейших исследований, среди которых хочется отдельно отметить работу Литтла [17], где при помощи методов теории графов найдена нижняя граница конвертируемости для множества M_n , остались открытыми следующие проблемы:

ПРОБЛЕМА 1. Найти минимальное целое число Ω_n такое, что для произвольной матрицы $A \in S_n$, у которой $v(A) > \Omega_n$, матрица A не является симметрично слабо конвертируемой.

ПРОБЛЕМА 2. Найти максимальное целое число ω_n такое, что для произвольной матрицы $A \in S_n$, у которой $v(A) < \omega_n$, матрица A является симметрично слабо конвертируемой.

ПРОБЛЕМА 3. Если $\omega_n \leq v(A) \leq \Omega_n$, что можно сказать о свойстве симметричной слабой конвертируемости матрицы A ?

В работе авторов [18] аналогичные проблемы решены для множества M_n всех $(0, 1)$ матриц. Целью настоящей работы является полное решение всех трех указанных выше проблем для пространства симметрических матриц S_n , при этом для решения мы используем исключительно элементарные методы, относящиеся к теории матриц.

Наша работа построена следующим образом. В главе 2 мы доказываем аналог теоремы Гибсона для симметрических $(0, 1)$ матриц, и, тем самым, решаем проблему 1. В главе 3 мы оцениваем минимальное число нулевых элементов в симметрической $(0, 1)$ матрице с нулевым перманентом. В главе 4 мы решаем проблему 2. В частности, мы находим величину ω_n для пространства симметрических матриц. Последняя глава содержит решение проблемы 3.

2. Теорема Гибсона в симметрическом случае. Определим симметрическую матрицу $G_n = (g_{ij})$ по правилу:

$$g_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i + j \leq n - 1, \\ 1, & \text{если } i + j > n - 1. \end{cases} \quad (1)$$

Заметим, что $G_n = T_n Q_n$ для перестановочной матрицы Q_n , отвечающей перестановке $(1, n - 1)(2, n - 2), \dots, (\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor (n + 1)/2 \rfloor)$, где, как обычно, $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превышающее x .

Заметим, что по теореме 1.4 не существует конвертируемых матриц $A \in S_n \subset M_n$ удовлетворяющих ограничению $v(A) > \Omega_n = (1/2)(n^2 + 3n - 2)$, а значит, среди этих матриц не существует симметрично слабо конвертируемых матриц. Более того, конвертируемые симметрические матрицы с $v(A) = \Omega_n$ существуют; например, матрица G_n . Однако наличие симметричной матрицы с коэффициентами ± 1 , обеспечивающей конвертируемость матрицы G_n , еще нуждается в проверке. В предложении 2.3 мы показываем, что это не так для некоторых значений n . Таким образом, для симметричной конвертации верхний барьер Ω_n не является точным. Однако этот барьер точен для симметричной слабой конвертации, как показано в следующем аналоге теоремы 1.4 для пространства симметрических матриц, в случае, когда $v(A) = \Omega_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Скажем, что матрица A перестановочно подобна матрице B , если A и B подобны, причем матрица подобия является перестановочной.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $n \geq 3$ и предположим $A \in S_n$ является симметрической $(0, 1)$ матрицей, для которой $\text{per } A > 0$. Если $v(A) = \Omega_n = (1/2)(n^2 + 3n - 2)$, то A является конвертируемой тогда и только тогда, когда $A = P G_n P^t$ для некоторой матрицы-перестановки P . Более того, если $n \not\equiv 2 \pmod{4}$, то матрица A является симметрично конвертируемой. Если $n \equiv 2 \pmod{4}$, то A является только симметрично слабо конвертируемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T_n , G_n и Q_n – матрицы, определенные выше.

1. Покажем, что любая конвертируемая симметрическая матрица A , для которой $v(A) = \Omega_n$, перестановочно подобна матрице G_n . В самом деле, по теореме Гибсона [16; с. 474] (см. теорему 1.4 данной работы) матрица A является конвертируемой тогда и только тогда, когда $A = P'T_nQ'$ для некоторых матриц–перестановок P' и Q' . Тогда $A = P'(G_nQ_n^t)Q' = PG_nQ$ с $P = P'$ и $Q = Q_n^tQ'$. Так как $A^t = A$ получаем, что

$$(QP)G_n(QP) = G_n. \quad (2)$$

Запишем матрицу–перестановку QP в виде $QP = \sum_{i=1}^n E_{i\sigma(i)}$ для некоторой перестановки σ и представим $G_n = \sum_{u,v=1}^n \alpha_{uv}E_{uv}$, где $\alpha_{uv} \in \{0, 1\}$. Как непосредственно следует из (2) $\alpha_{uv} = \alpha_{\sigma(u)\sigma^{-1}(v)}$. Следовательно, для фиксированного $u \leq n-2$ u -я строка матрицы G_n является $\sigma(u)$ -й строкой матрицы QPG_nQP , элементы которой переставлены при помощи перестановки σ^{-1} . Однако в силу равенства (2), число ненулевых элементов в u -й и $\sigma(u)$ -й строках должно быть одинаково. Заметим, что u -я строка матрицы G_n содержит в точности $u+1$ ненулевых элементов для каждого $u = 1, \dots, n-1$ и n ненулевых элементов последней строки. Следовательно, $u = \sigma(u)$, $u = 1, \dots, n-2$. Таким образом, либо $\sigma = id$ и, следовательно, $Q = P^t$, либо $\sigma = (n-1, n)$ и, следовательно, $Q = RP^t$, где R является матрицей–перестановкой, отвечающей транспозиции $(n-1, n)$. Получаем, что $A = PG_nP^t$ или $A = PG_nRP^t$. Так как $G_nR = G_n$ то, в обоих случаях $A = PG_nP^t$.

2. Докажем, что матрица A является симметрично конвертируемой, если $n \neq 2 \pmod{4}$ и является симметрично слабо конвертируемой, если $n = 2 \pmod{4}$. В силу [19; с. 270] для матрицы $B_n = (b_{ij})$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } j > i+1, \\ 1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и матрицы $Y_n = (y_{ij})$, где

$$y_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } j = i+1, \\ 1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

получаем $\text{per } B_n = \det(Y_n \circ B_n)$.

Пусть U_n является матрицей–перестановкой, соответствующей $\sigma_n = (1, n)(2, n-1) \cdots (\lfloor (n+1)/2 \rfloor, \lfloor (n+2)/2 \rfloor)$. Тогда $B_nU_n = G_n$ и Y_nU_n являются симметрическими матрицами, и справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \text{per } A &= \text{per}(PG_nP^t) = \text{per}(PB_nU_nP^t) = \text{per } B_n = \det(Y_n \circ B_n) \\ &= \text{sign}(\sigma_n) \det(P(Y_n \circ B_n)U_nP^t) \\ &= \text{sign}(\sigma_n) \det((PY_nU_nP^t) \circ (PB_nU_nP^t)) = \text{sign}(\sigma_n) \det(X \circ A), \end{aligned}$$

где матрица $X = P(Y_nU_n)P^t$ является симметрической. Если n – нечетное число и $\text{sign}(\sigma_n) = -1$, то $\text{per } A = \det((-X) \circ A)$ и $-X$ остается симметрической матрицей. Если число n является четным и $n = 0 \pmod{4}$, то $\text{sign}(\sigma_n) = 1$; значит, $\text{per } A = \det(X \circ A)$ для симметрической матрицы X . Однако если $n = 2 \pmod{4}$, то $\text{sign}(\sigma_n) = -1$; значит, $\text{per } A = -\det(X \circ A)$.

В теореме 2.2 мы доказали, что для $n = 2 \pmod{4}$ матрица $PG_n P^t$, где P является матрицей–перестановкой, является симметрично слабо конвертируемой. Покажем, что она не является симметрично конвертируемой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $n = 2 \pmod{4}$ и $A = PG_n P^t$ для некоторой матрицы–перестановки P . Тогда матрица A не является симметрично конвертируемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности мы можем предположить, что $A = G_n$. Разложим матрицу $G_n = \sum \alpha_{ij} E_{ij}$, где $\alpha_{ij} \in \{0, 1\}$, и для заданной перестановки σ мы будем называть набор из n чисел $(\alpha_{1\sigma(1)}, \dots, \alpha_{n\sigma(n)})$ *обобщенной диагональю*. Это определение обобщает понятие обычной диагонали $(a_{11}, \dots, a_{nn})$ и антидиагонали $(a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1})$. Заметим, что антидиагональ, соответствует перестановке $(1, n)(2, n-1) \cdots (\lfloor (n+1)/2 \rfloor, \lfloor (n+2)/2 \rfloor)$. Обобщенная диагональ называется *ненулевой*, если все ее элементы не равны нулю. Будем называть обобщенную диагональ *нечетной*, если она отвечает нечетной перестановке, иначе диагональ называется *четной*. Для $(0, 1)$ матрицы $\text{reg } G_n$ дает число всех ненулевых обобщенных диагоналей в G_n , тогда как $\det G_n$ равняется числу ненулевых четных обобщенных диагоналей минус число ненулевых нечетных обобщенных диагоналей. Таким образом, чтобы получить $\text{reg } A$ при помощи определителя посредством изменения знаков элементов матрицы A , мы должны приписать знаки ± 1 к элементам матрицы A таким образом, что к произвольной нечетной ненулевой обобщенной диагонали мы приписываем нечетное число -1 , а к произвольной четной ненулевой обобщенной диагонали мы приписываем четное число $+1$. Заметим, что для $n \equiv 2 \pmod{4}$ антидиагональ является нечетной. Таким образом, нечетное число символов -1 должно быть приписано к ней симметричным способом. Последнее невозможно, так как антидиагональ содержит четное число элементов.

3. Симметрические матрицы с нулевым перманентом. Отметим, что $(0, 1)$ матрица A обладает свойством $\text{reg } A = 0$ тогда и только тогда, когда все ее обобщенные диагонали содержат нулевой элемент. Тогда и $\det A = 0$. Значит, $(0, 1)$ матрицы с нулевым перманентом являются конвертируемыми. Получим оценку на максимальное число единиц в симметрической матрице с нулевым перманентом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $A \in S_n$ является симметрической $(0, 1)$ матрицей, $\text{reg } A = 0$. Если $n \neq 3$, то $v(A) \leq n^2 - (2n - 1)$. Данная оценка достигается, например, если у A первая строка и столбец являются нулевыми. Если $n = 3$, то $v(A) \leq 5$, что достигается, например, на матрицах с верхним левым 2×2 блоком нулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу известной теоремы Фробениуса–Кенеге [20; с. 31, теорема 2.1] получаем, что $\text{reg } A = 0$ тогда и только тогда, когда A обладает $s \times t$ нулевой подматрицей, Ξ , где $s + t = n + 1$. Предположим, что в точности k элементов Ξ принадлежат главной диагонали матрицы A . Обозначим строки матрицы A , в которых стоят эти элементы, через $i_1, \dots, i_k$. Так как матрица A является симметрической, то для $(s - k) \times t$ нулей среди оставшихся $(s - k)$ строк матрицы Ξ существуют дополнительно $t \times (s - k)$ нулей в A , вне Ξ . Более того, каждая из строк $i_1, \dots, i_k$ имеет t нулей в Ξ . Таким образом, в силу симметрии каждого из столбцов $i_1, \dots, i_k$ получаем t нулей. Однако нулевые элементы $k \times k$ подматрицы с главной диагональю $i_1, \dots, i_k$ были посчитаны дважды. Следовательно

существует дополнительно $kt + tk - k^2$ нулей. Значит, всего существует не менее $f(s, k) = 2(s - k)t + 2kt - k^2 = 2st - k^2 = 2s(n + 1 - s) - k^2$ нулей в симметрической матрице A такой, что $\text{per } A = 0$.

Теперь нашей целью является минимизация $f(s, k)$ как функции от s и k . Заметим, что $1 \leq k \leq \min\{s, n + 1 - s\}$. Непосредственные вычисления показывают, что для $n \geq 2$ и $s \geq 1$ минимум по $k = 1, \dots, \min\{s, n + 1 - s\}$ достигается при $k = \min\{s, n + 1 - s\}$ и равняется

$$\begin{cases} (2 + 2n - 3s)s, & \text{если } 1 \leq s \leq (n + 1)/2, \\ (n - s + 1)(3s - 1 - n), & \text{если } (n + 1)/2 \leq s \leq n. \end{cases}$$

Прямой проверкой можно получить, что для $n \geq 4$ или $n = 2$ минимум относительно $s = 1, \dots, n$ равен $2n - 1$ и достигается при $s = 1$ или $s = n$. Однако, если $n = 3$, то минимум равен 4 и достигается при $s = 2$; последнее рассуждение завершает доказательство.

4. Значение ω_n на симметрических матрицах. В данном пункте мы находим значение нижнего барьера ω_n для проблемы конвертируемости Полия на пространстве симметрических матриц, используя при этом элементарные методы теории матриц. Мы доказываем, что $\omega_n = n + 6$. Заметим, что мы не предполагаем неразложимости рассматриваемых матриц. Установим вначале, что если симметрическая $(0, 1)$ матрица A удовлетворяет условию $v(A) \leq n + 5$, то A всегда обладает свойством симметричной слабой конвертируемости. Мы докажем данный факт по индукции. Однако, прежде чем преступить к доказательству, нам потребуется рассмотреть некоторые специальные случаи малой размерности отдельно.

ЛЕММА 4.1. *Произвольная 5×5 симметрическая матрица A , обладающая в точности двумя единицами в каждой строке, является симметрично конвертируемой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала установим, что все 5×5 симметрические матрицы, обладающие в точности двумя единицами в каждой строке, перестановочно подобны одной из следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя перестановочное подобие, мы можем предполагать, что первая строка равна либо $(1, 1, 0, 0, 0)$ (если существует ненулевой элемент на главной диагонали), либо $(0, 1, 1, 0, 0)$ (если это не так). В силу симметричности это также определяет первый столбец. Вторая строка также содержит в точности два ненулевых элемента. Таким образом, если первая строка рассматриваемой матрицы равна $(1, 1, 0, 0, 0)$, то вторая строка равняется либо $(1, 1, 0, 0, 0)$, либо $(1, 0, *, *, *)$, где в точности один элемент $*$ отличен от нуля. В первом случае после дополнительного преобразования подобия получаем третью и четвертую матрицу из вышеперечисленных, так как каждая строка и каждый столбец содержат ровно две единицы. Во втором

случае, используя перестановочное подобие, мы можем получить что вторая строка равна $(1, 0, 1, 0, 0)$. Если элемент на позиции $(3, 3)$ равен 1, то третья строка равна $(0, 1, 1, 0, 0)$, и в силу симметрии матрица равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Однако эта матрица перестановочно подобна четвертой матрице из списка, приведенного выше. Таким образом, можно предполагать, что элемент на позиции $(3, 3)$ равен нулю, что необходимо приводит нас к первой матрице из приведенного выше списка. Рассуждая аналогично в случае, когда первая строка равняется $(0, 1, 1, 0, 0)$, получаем вторую матрицу из списка. Действительно, если элемент на позиции $(2, 2)$ равен единице, то мы можем поменять местами первые две строки и первые два столбца, чтобы свести задачу к уже рассмотренному случаю, когда первая строка равняется $(1, 1, 0, 0, 0)$. Аналогично разбираются случаи, когда элемент с индексом $(2, 3)$ равен единице или когда произвольный диагональный элемент равен единице. Таким образом, с точностью до возможной перестановки последних двух строк и столбцов мы можем утверждать, что вторая строка равняется $(1, 0, 0, 1, 0)$. В силу симметрии, пользуясь тем, что все диагональные элементы равны нулю, мы получаем, что верхний левый 3×3 блок совпадает с верхним левым 3×3 блоком второй матрицы из рассматриваемого списка. Заметим, что ситуация, когда элементы на позициях $(3, 4)$ и $(4, 3)$ оба равны единице, невозможна, так как последние две строки могут обладать только одним ненулевым элементом. Значит мы получаем вторую матрицу из рассматриваемого списка.

Для завершения доказательства остается отметить, что перманенты первых двух матриц равны их определителям. Перманенты третьей и четвертой матриц равны определителям матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

соответственно. Заметим, что в обоих случаях знаки “минус” расположены симметрично.

ЛЕММА 4.2. *Каждая 4×4 симметрическая матрица A , для которой $v(A) = 8$ или $v(A) = 9$, имеющая не менее чем два ненулевых элемента в каждой строке или каждом столбце, является симметрично слабо конвертируемой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая аналогично предыдущему, заметим, что все 4×4 симметрические матрицы с двумя единицами в каждой строке перестановочно подобны некоторой матрице из следующего списка:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и все 4×4 симметрические матрицы с тремя единицами в ровно одной строке и двумя единицами во всех остальных строках перестановочно подобны какой-либо матрице из следующего списка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманенты первых трех матриц из данного списка совпадают с определителями матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

соответственно. Перманенты четвертой, пятой и шестой матриц равны определителям матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

соответственно. Заметим, что в каждом из рассмотренных шести случаев, знаки минус были расположены симметрично. Однако перманент оставшейся 4×4 матрицы равен 3, в то время как ее детерминант равен -3 . Значит эта матрица является симметрично слабо конвертируемой. Непосредственная проверка показывает, что в этом случае симметричная конвертация отсутствует.

ЛЕММА 4.3. *Каждая 3×3 симметрическая матрица A , у которой $v(A) \leq 8$ и есть, по крайней мере, два ненулевых элемента в каждой строке или столбце, является симметрично конвертируемой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и ранее, непосредственная проверка показывает, что все 3×3 симметрические матрицы, у которых каждая строка содержит, по крайней мере, два ненулевых элемента, перестановочно подобны какой-либо матрице из приведенного ниже списка:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманенты этих матриц совпадают с определителями матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

соответственно. Заметим, что во всех этих случаях знаки “минус” расположены симметрично.

Теперь мы готовы решить проблему 2.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $n \geq 2$ и A — $n \times n$ симметрическая $(0, 1)$ матрица, у которой $v(A) \leq n + 5$. Тогда матрица A является симметрично слабо конвертируемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать эту теорему посредством отдельного рассмотрения ряда случаев малой размерности и завершим доказательство рассуждениями по индукции с базой $n = 2, 3$.

Случай $n = 2$ проверяется непосредственно. Случай $n = 3$ получается либо при помощи преобразования Лапласа, если A обладает строкой с не более чем одним ненулевым элементом, либо, если это не так, по лемме 4.3. Также, если A имеет нулевую строку, то $\det A = \operatorname{per} A = 0$, что завершает доказательство. Далее, если в каждой строке A найдется не менее двух ненулевых элементов, то неравенство $2n \leq v(A) \leq n + 5$ позволяет заключить, что $n \leq 5$. Таким образом, матрица A перестановочно подобна матрице из набора случаев, разобранных в леммах 4.1, 4.2 и 4.3.

Предположим, что A обладает строкой с единственным ненулевым элементом, скажем, на позиции (ij) . Тогда в силу симметрии элемент (ji) должен быть единственным ненулевым элементом в i -м столбце. Покажем существование симметрической матрицы X по индукции.

Случай 1: $i = j$. Тогда будем использовать преобразование Лапласа по i -му столбцу и получим $\operatorname{per} A = \operatorname{per} \tilde{A}$ и $\det A = \det \tilde{A}$, где $\tilde{A}$ симметрическая $(n - 1) \times (n - 1)$ матрица, полученная из A удалением i -й строки и столбца, причем $v(\tilde{A}) \leq (n - 1) - 5$.

Случай 2: $i \neq j$. Если $i < j$, будем использовать вначале преобразование Лапласа по i -му столбцу, затем по i -й строке. Если $i > j$, мы будем сначала использовать преобразование Лапласа по i -му столбцу, а потом по $(i - 1)$ -й строке. Тогда получаем, что $\operatorname{per} A = \operatorname{per} \tilde{A}$ и $\det A = -\det \tilde{A}$, где $\tilde{A}$ является симметрической $(n - 2) \times (n - 2)$ матрицей, полученной из A удалением i -й и j -й строк и i -го и j -го столбцов, причем $v(\tilde{A}) \leq (n - 2) - 5$.

Следовательно, в обоих случаях мы можем применить предположение индукции к $\tilde{A}$. Таким образом, существует симметрическая матрица $\tilde{X}$, для которой $\operatorname{per}(\tilde{A}) \in \{\det(\tilde{X} \circ \tilde{A}), -\det(\tilde{X} \circ \tilde{A})\}$. Очевидно, мы можем достроить $\tilde{X}$ до симметрической $n \times n$ матрицы X такой, что $\operatorname{per}(A) \in \{\det(X \circ A), -\det(X \circ A)\}$.

Остается найти симметрическую матрицу A , $v(A) = n + 6$, которая не является симметрично слабо конвертируемой. Мы сделаем даже большее и покажем, что в случае $v(A) = n + 6$ единственным препятствием для конвертации является наличие подматрицы, равной J_3 в A , где J_k , $1 \leq k \leq n$, обозначает $k \times k$ матрицу, состоящую из одних единиц.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $n \geq 3$, и $A \in S_n$ – симметрическая $(0, 1)$ матрица, у которой $v(A) = n + 6$. Тогда A не является конвертируемой в том и только том случае, когда существует перестановочная матрица P , для которой $P^t A P = \text{Id}_{n-3} \oplus J_3$. Более того, если A является конвертируемой, то она также является симметрично слабо конвертируемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перечислим все $n \times n$ симметрические матрицы, $4 \leq n \leq 6$, обладающие не менее чем двумя ненулевыми элементами в каждой строке. Покажем для всех тех из них, которые не являются блочно-диагональными, что они симметрично слабо конвертируемы. Аргументы, обосновывающие, что приведенные ниже матрицы исчерпывают все возможные случаи, мы опустим, так как эти рассуждения совпадают с аналогичными аргументами, примененными при доказательстве леммы 4.2.

Случай $n = 4$. Каждая 4×4 симметрическая матрица с не менее чем двумя ненулевыми элементами в каждой строке перестановочно подобна некоторой блочно-диагональной матрице или одной из следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманент во всех случаях кроме последнего симметрично конвертируем в детерминант посредством приписывания знаков $\pm$ следующими способами:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

В последнем случае перманент симметрично конвертируется в минус определитель следующим способом:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 5$. Каждая 5×5 симметрическая матрица с не менее чем двумя ненулевыми элементами в каждой строке перестановочно подобна некоторой

блочно-диагональной матрице или одной из следующих шести матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждая из этих матриц является симметрично конвертируемой посредством приписывания знаков $\pm$ одним из следующих способов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 6$. Все возможные 6×6 симметрические матрицы с не менее чем двумя ненулевыми элементами перестановочно подобны блочно-диагональной матрице или одной из следующих двух матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что обе эти матрицы не являются симметрично конвертируемыми, однако, они являются симметрично слабо конвертируемыми, в чем можно убедиться, приписывая знаки $\pm$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если матрица A содержит нулевую строку, то $\det A = \operatorname{per} A = 0$ и матрица A является конвертируемой. Заметим, что если в каждой строке матрицы A есть, по крайней мере, 2 ненулевых элемента, то $2n \leq v(A) = n + 6$, откуда $n \leq 6$. Таким образом, либо

$$(i) \quad n = 3 \text{ и } v(A) = 3 + 6 = 9,$$

а значит, $A = J_3$; либо, иначе,

$$(ii) \quad 4 \leq n \leq 6, \text{ и } A \text{ перестановочно подобна матрицам из рассмотренных ранее списков или некоторой блочно-диагональной матрице.}$$

По теореме Гибсона о верхнем барьере (см. [16]) в случае (i) матрица не является конвертируемой и не является симметрично слабо конвертируемой. Далее мы рассматриваем блочно-диагональные матрицы в случае (ii). Заметим, что условие $v(A) = n + 6$ позволяет заключить, что блоки вида J_3 отсутствуют. Однако, так как $\operatorname{per}(A_1 \oplus A_2) = \operatorname{per} A_1 \operatorname{per} A_2$ и $\det(A_1 \oplus A_2) = \det A_1 \det A_2$ получаем, что в случае (ii) каждая блочно-диагональная матрица также является симметрично слабо конвертируемой (достаточно воспользоваться леммой 4.3, если $n = 6$ и один блок имеет размер 4×4 , и леммой 4.3, если $n = 6$ и оба блока имеют размер 3×3).

Продолжим наше доказательство по индукции. Заметим, что каждая симметрическая 2×2 матрица является симметрично слабо конвертируемой. Справедливость нашей теоремы при $n = 3$ следует из результата Гибсона [16].

Предположим справедливость нашей теоремы для всех $k \times k$ симметрических матриц, у которых $v(A) = k + 6$, $k = 3, \dots, n - 1$. Пусть A является $n \times n$ симметрической матрицей с условием $v(A) = n + 6$. Если эта матрица имеет нулевую строку или, по крайней мере, две единицы в каждой строке, то, как уже было установлено, теорема верна. Остается рассмотреть случай, когда A имеет строку с ровно одним ненулевым элементом, на позиции (ij) . Тогда, в силу симметрии, (ji) должен быть единственным ненулевым элементом в i -м столбце. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 4.4, получим, что преобразование Лапласа позволяет заключить, что $\operatorname{per} A = \operatorname{per} \tilde{A}$ и $\det A = (-1)^{s+1} \det \tilde{A}$, где $\tilde{A}$ является симметрической $(n - s) \times (n - s)$ матрицей, полученной из A удалением i -й и j -й строки и столбца, здесь $s = 1$, если $i = j$ и $s = 2$, если $i \neq j$. Справедливо неравенство $v(\tilde{A}) \leq v(A) - s = (n - s) + 6$. Если $v(\tilde{A}) < (n - s) + 6$, то матрица A является симметричной слабо конвертируемой по теореме 4.4; тогда A не может иметь вид $P(\operatorname{Id}_{n-3} \oplus J_3)P^t$. Если $v(\tilde{A}) = (n - s) + 6$, то (ij) является единственным ненулевым элементом в j -м столбце и (ji) является единственным ненулевым элементом j -й строке матрицы A . Заменим A на $P_1 A P_1^t$ для подходящей перестановочной матрицы P_1 таким образом, чтобы $(ij) = (12)$, если $i \neq j$, или $(ij) = (11)$, если $i = j$. Матрица $P_1 A P_1^t$ является блочно-диагональной. Таким образом, мы можем сделать индукционный переход, так как после применения преобразований Лапласа s раз, $s = 1, 2$, к матрице $P_1 A P_1^t$ мы получаем симметрическую $(n - s) \times (n - s)$ матрицу $\widetilde{P_1 A P_1^t}$, которая является симметрично слабо конвертируемой тогда и только тогда, когда аналогичное справедливо для матрицы A .

5. Симметрические матрицы, для которых $\omega_n \leq v(A) \leq \Omega_n$. Для всех достаточно больших значений n и произвольного числа r , находящегося между нижним и верхним барьерами, всегда существуют симметрические $n \times n$ матрицы, для

которых $v(A) = r$ и которые являются симметрично слабо конвертируемыми, а также матрицы, для которых $v(B) = r$ и которые не являются симметрично слабо конвертируемыми. Отметим, что доказательство этого факта было ранее приведено в статье [18; теорема 3.1]. Необходимо обратить внимание, что несмотря на то, что работа [18] посвящена вопросам конвертации на множестве M_n всех $(0, 1)$ матриц, а не на множестве S_n , в доказательстве теоремы 3.1 отмечено, что рассуждения справедливы в классе симметрических матриц.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $n \geq 26$. Тогда для произвольного целого числа r тако-го, что $\omega_n \leq r \leq \Omega_n$, существует симметрично слабо конвертируемая матрица $A \in M_n$ с ненулевым перманентом и матрица $B \in M_n$, которая не является симметрично слабо конвертируемой, для которых $v(A) = r = v(B)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Pólya, “Aufgabe 424”, *Arch. Math. Phys.*, **20**:3 (1913), 271.
- [2] G. Szegő, “Lösung zu 424”, *Arch. Math. Phys.*, **21** (1913), 291–292.
- [3] P. Botta, “On the conversion of the determinant into the permanent”, *Canad. Math. Bull.*, **11** (1968), 31–34.
- [4] M. P. Coelho, M. A. Duffner, “Immanant preserving and immanant converting maps”, *Linear Algebra Appl.*, **418**:1 (2006), 177–187.
- [5] M. Marcus, H. Minc, “On the relation between the determinant and the permanent”, *Illinois J. Math.*, **5** (1961), 376–381.
- [6] R. A. Brualdi, B. L. Shader, “On sign-nonsingular matrices and the conversion of the permanent into the determinant”, *Applied Geometry and Discrete Mathematics*, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., **4**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 117–134.
- [7] G. Dolinar, A. Guterman, B. Kuzma, M. Orel, “On the Pólya permanent problem over finite fields”, *European J. Combin.*, **32**:1 (2011), 116–132.
- [8] W. McCuaig, “Pólya’s permanent problem”, *Electron. J. Combin.*, **11** (2004), Research Paper 79.
- [9] G. Kuperberg, “An exploration of the permanent-determinant method”, *Electron. J. Combin.*, **5** (1998), Research Paper 46.
- [10] P. W. Kasteleyn, “The statistics of dimers on a lattice. I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice”, *Physica*, **27**:12 (1961), 1209–1225.
- [11] H. N. V. Temperley, M. E. Fisher, “Dimer problem in statistical mechanics – an exact result”, *Philos. Mag.*, **6**:68 (1961), 1061–1063.
- [12] M. H. Lim, “A note on the relation between the determinant and the permanent”, *Linear and Multilinear Algebra*, **7**:2 (1979), 145–147.
- [13] M. P. Coelho, M. A. Duffner, “On the relation between the determinant and the permanent on symmetric matrices”, *Linear and Multilinear Algebra*, **51**:2 (2003), 127–136.
- [14] M. P. Coelho, M. A. Duffner, “On the conversion of an immanant into another on symmetric matrices”, *Linear and Multilinear Algebra*, **51**:2 (2003), 137–145.
- [15] M. P. Coelho, M. A. Duffner, “Subspaces where an immanant is convertible into its conjugate”, *Linear and Multilinear Algebra*, **48**:4 (2001), 383–408.
- [16] P. M. Gibson, “Conversion of the permanent into the determinant”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **27** (1971), 471–476.
- [17] C. H. C. Little, “A characterization of convertible $(0, 1)$ -matrices”, *J. Combinatorial Theory Ser. B*, **18**:3 (1975), 187–208.
- [18] Г. Долинар, А. Э. Гутерман, Б. Кузьма, “Барьеры Гибсона для проблемы Полиа”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **16**:8 (2010), 73–86.

- [19] P. M. Gibson, “An identity between permanents and determinants”, *Amer. Math. Monthly*, **76**:3 (1969), 270–271.
- [20] H. Minc, *Permanents*, Encyclopedia Math. Appl., **6**, Addison-Wesley Publ., Reading, MA, 1978.

А. Гутерман

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: guterman@list.ru

Поступило

04.04.2011

Г. Долинар

University of Ljubljana, Slovenia

E-mail: gregor.dolinar@fe.uni-lj.si

Б. Кузьма

Institute of Mathematics, Physics and Mechanics, Slovenia

E-mail: bojan.kuzma@pef.upr.si