Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Богданов, К. Г. Куюмжиян, Простые модули исключительных групп с нормальными замыканиями орбит максимального тора, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 4, 483–496

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9073>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 18:05:43

Простые модули исключительных групп с нормальными замыканиями орбит максимального тора

И. И. Богданов, К. Г. Куюмжиян

Пусть T – максимальный тор в исключительной простой алгебраической группе G . В работе найдены все простые рациональные G -модули V со следующим свойством: для каждого вектора $v \in V$ замыкание его T -орбиты является нормальным аффинным многообразием. При решении задачи используется комбинаторный критерий нормальности, формулируемый в терминах набора весов простого G -модуля. Эта статья является продолжением работ второго автора, в которых аналогичная задача решена для классических линейных групп.

Библиография: 10 названий.

Введение. Пусть G – связная простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ характеристики ноль. Зафиксируем в G максимальный тор T . Пусть V – конечномерный рациональный G -модуль. В данной работе изучается нормальность замыканий T -орбит в V .

Основная часть работы посвящена нахождению всех простых модулей V исключительной группы G , обладающих следующим свойством: для каждого вектора $v \in V$ замыкание его орбиты $\overline{Tv}$ является нормальным (аффинным) алгебраическим многообразием. Для полупростой группы G и ее присоединенного модуля V наличие этого свойства было исследовано в [1]. Для группы $G = SL(n)$ эта задача была также решена ранее в [2; пример 3.7] и [3]. В предыдущих работах второго автора [4], [5] найдены все простые модули всех классических групп, обладающие этим свойством. Для полноты картины результаты работ [4], [5] включены в таблицу в теореме 1. Аналогичная задача для приводимых систем корней еще не исследована. Другим естественным обобщением является решение этой же задачи для непростых модулей. Те из них, для которых данное свойство выполняется, в своем разложении на простые содержат только модули, обладающие тем же свойством, т.е. только перечисленные в теореме 1. Но это не является достаточным условием:

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00096), а также АВИП “Развитие научного потенциала высшей школы” Министерства образования и науки РФ (проект 2.1.1/11133).

Работа второго автора выполнена при поддержке Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, (грант правительства РФ, дог. 11.G34.31.0023), “EADS Foundation Chair in Mathematics”, Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00648-а), Русско-французской лаборатории Понселе (UMI 2615 CNRS) и фонда “Династия”.

например, замыкание T -орбиты вектора (x^2, x^3) в $SL(2)$ -модуле $S^2\mathbb{C}^{2*} \oplus S^3\mathbb{C}^{2*}$ не нормально. Окончательного ответа для приводимых модулей пока нет.

В данной работе это свойство исследуется для исключительных простых алгебраических групп (а именно E_6, E_7, E_8, G_2, F_4) во всех их простых модулях. Напомним, что простой модуль однозначно с точностью до изоморфизма определяется своим старшим весом λ . В качестве λ может выступать произвольный доминантный вес $a_1\pi_1 + \dots + a_r\pi_r$, где $\pi_1, \dots, \pi_r$ – фундаментальные веса, а $a_1, \dots, a_r$ – целые неотрицательные числа. Наша нумерация фундаментальных весов соответствует [6].

Основным результатом статьи является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Для следующих типов простых алгебраических групп и соответствующих модулей, приведенных в таблице 1, а также для сопряженных к ним модулей, замыкания всех орбит максимального тора нормальны. В остальных случаях модуль содержит орбиту максимального тора с ненормальным замыканием.*

Таблица 1

Система корней	Старший вес	Разобрано	B_4	π_4	[5]
$A_n, n \geq 1$	π_1	[4]	$C_n, n \geq 3$	π_1	[5]
$A_n, n \geq 1$	$\pi_1 + \pi_n$	[1]–[3]	C_3	π_2	[5]
A_1	$3\pi_1$	[4]	C_4	π_2	[5]
A_1	$4\pi_1$	[4]	$D_n, n \geq 4$	π_1	[5]
A_2	$2\pi_1$	[4]	D_4	π_2	[5]
A_3	π_2	[4]	D_4	π_3	[5]
A_4	π_2	[4]	D_4	π_4	[5]
A_5	π_2	[4]	D_5	π_4	[5]
A_5	π_3	[4]	D_5	π_5	[5]
$B_n, n \geq 2$	π_1	[5]	D_6	π_5	[5]
B_2	π_2	[5]	D_6	π_6	[5]
B_2	$2\pi_2$	[5]	F_4	π_4	Случай 1
B_3	π_3	[5]	G_2	π_1	Случай 2

В п. 1 излагаются основные сведения о системах корней. В частности, приводится комбинаторный критерий того, что замыкания всех T -орбит нормальны. Этот критерий сводит исследование нормальности замыканий T -орбит в простом модуле $V(\lambda)$ к проверке сверхнасыщенности (т.е. насыщенности всех подмножеств) набора весов $M(\lambda)$.

В последующих пунктах для всех наборов весов $M(\lambda)$ из теоремы 1 проверена насыщенность всех подмножеств (см. случаи 1 и 2). Для всех же наборов весов, не входящих в таблицу, показано существование ненасыщенных поднаборов. Для этого достаточно ограничиться минимальными по включению наборами весов, не входящими в теорему 1. В каждом из таких случаев ненасыщенный поднабор мы указываем явно (см. примеры 1–7).

Проверка производится для каждой системы корней по отдельности. Системы корней рассматриваются в алфавитном порядке. Так как системы E_7 и E_6 строятся на основе E_8 , то сначала изучается случай E_8 , а затем E_7 и E_6 . Как видно из таблицы 1, в этих случаях не найдено ни одного представления, в котором замыкания всех

T -орбит были бы нормальны. Затем разбираются случаи F_4 и G_2 . В обоих случаях мы показываем, что только в одном фундаментальном представлении замыкания всех T -орбит нормальны.

1. Предварительные сведения. Пусть G – связная односвязная полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ характеристики 0, B – борелевская подгруппа в G и $T \subset B$ – максимальный тор. Обозначим через Φ систему корней алгебры Ли $\text{Lie}(G)$, связанную с тором T . Пусть Φ^+ – множество положительных корней, а $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ – множество простых корней в Φ^+ , отвечающее борелевской подгруппе B . Обозначим через π_i фундаментальный вес, соответствующий простому корню α_i . Хорошо известно, что веса $\pi_1, \dots, \pi_r$ образуют базис решетки характеров $\Lambda = \Lambda(T)$ тора T , эта решетка в случае односвязной группы также является *решеткой весов* системы корней Φ . Полугруппа, порожденная фундаментальными весами, совпадает с полугруппой доминантных весов Λ_+ . *Решеткой корней* Ξ называют подгруппу в Λ , порожденную системой корней Φ . Тогда $\Xi \subset \Lambda$ – подрешетка конечного индекса, а $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – базис в Ξ . В дальнейшем нам будет удобно рассматривать веса $\mu \in \Lambda$ как точки рационального векторного пространства $\Lambda_{\mathbb{Q}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Если решетка весов Λ реализована в пространстве $\mathbb{Q}^n$, то через $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ будем обозначать стандартный базис в этом пространстве.

Пусть W – группа Вейля системы корней Φ . Тогда W реализуется как конечная группа линейных преобразований пространства $\Lambda_{\mathbb{Q}}$, порожденная отражениями s_{α} , где α – корень, см. [7]. Напомним, что отражение s_{α} определяется формулой

$$s_{\alpha}: \beta \mapsto \beta - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \alpha,$$

где скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ задается единичной матрицей в стандартном базисе $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ пространства $\mathbb{Q}^n$ (при рассмотрении систем корней E_8 и F_4 пространство $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ совпадает с $\mathbb{Q}^n$). Для неприводимой системы корней Φ группа Вейля действует транзитивно на множестве корней одной длины, см. [6; предложение 6.1.11].

Пусть $v_1, \dots, v_r$ – векторы рационального векторного пространства. Для произвольного множества рациональных чисел A через $A(v_1, \dots, v_r)$ будет обозначаться множество линейных комбинаций векторов $v_1, \dots, v_r$ с коэффициентами в A . Множество $\{v_1, \dots, v_r\}$ называется *насыщенным*, если

$$\mathbb{Z}_{\geq 0}(v_1, v_2, \dots, v_r) = \mathbb{Z}(v_1, v_2, \dots, v_r) \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}(v_1, v_2, \dots, v_r).$$

Пусть T – алгебраический тор и $\Lambda = \Lambda(T)$ – решетка характеров тора T . Для каждого рационального T -модуля V имеет место весовое разложение

$$V = \bigoplus_{\mu \in \Lambda} V_{\mu}, \quad \text{где } V_{\mu} = \{v \in V \mid tv = \mu(t)v \text{ для всех } t \in T\}.$$

Обозначим через $M(V) = \{\mu \in \Lambda \mid V_{\mu} \neq 0\}$ набор весов модуля V . С каждым ненулевым вектором $v \in V$ связано весовое разложение

$$v = v_{\mu_1} + \dots + v_{\mu_s}, \quad v_{\mu_i} \in V_{\mu_i}, \quad v_{\mu_i} \neq 0.$$

Напомним, что неприводимое аффинное алгебраическое многообразие X называется *нормальным*, если алгебра регулярных функций $\mathbb{k}[X]$ целозамкнута в своем поле частных. Следующее утверждение является хорошо известным комбинаторным критерием нормальности замыкания T -орбиты, см. [8; I, § 1, лемма 1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть V – конечномерный рациональный T -модуль и $v = v_{\mu_1} + \dots + v_{\mu_s}$ – весовое разложение вектора $v \in V$. Замыкание $\overline{Tv}$ орбиты вектора v нормально тогда и только тогда, когда множество характеров $\{\mu_1, \dots, \mu_s\}$ насыщенно.

Для простого G -модуля $V(\lambda)$ со старшим весом λ через $M(\lambda)$ обозначим множество его весов относительно максимального тора T . Напомним описание множества $M(\lambda)$. Многогранником весов $P(\lambda)$ модуля $V(\lambda)$ называется выпуклая оболочка $P(\lambda) = \text{conv}\{w\lambda \mid w \in W\}$ W -орбиты точки λ в пространстве $\Lambda_{\mathbb{Q}}$. Тогда

$$M(\lambda) = (\lambda + \Xi) \cap P(\lambda),$$

см. [9; теорема 14.18] и [10; упражнения к гл. VIII § 7].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В этой конструкции мы могли начинать с веса λ , не являющегося доминантным. Тогда формула $M(\lambda) = (\lambda + \Xi) \cap P(\lambda)$ определяет множество весов представления, старший вес которого лежит в W -орбите вектора λ .

На пространстве $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ определен частичный порядок: $\lambda \succeq \mu$ тогда и только тогда, когда $\lambda - \mu$ есть целочисленная комбинация простых корней с неотрицательными коэффициентами.

Назовем конечное подмножество M рационального векторного пространства $\mathbb{Q}^n$ *сверхнасыщенным*, если каждое его подмножество является насыщенным.

Ненасыщенные подмножества будут сокращенно обозначаться НП. *Расширенным ненасыщенным подмножеством* будет называться ненасыщенное подмножество $\{v_1, \dots, v_r\}$ вместе с таким вектором v_0 , что

$$v_0 \in (\mathbb{Z}(v_1, v_2, \dots, v_r) \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}(v_1, v_2, \dots, v_r)) \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0}(v_1, v_2, \dots, v_r),$$

причем существует такая $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ -комбинация

$$v_0 = q_1 v_{i_1} + \dots + q_s v_{i_s}, \quad 1 \leq i_j \leq r,$$

в которой векторы $v_{i_1}, \dots, v_{i_s}$ линейно независимы, а коэффициенты q_i лежат в полуинтервале $[0, 1)$. Такие подмножества будут сокращенно называться РНП и обозначаться $\{v_0; v_1, \dots, v_r\}$.

Доказательство следующей простой леммы можно найти в [5].

ЛЕММА 1 [5; лемма 1.6]. Пусть множество $M = \{v_1, \dots, v_r\}$ ненасыщено. Тогда существует такой вектор v_0 , что $\{v_0; v_1, \dots, v_r\}$ – РНП.

Также будем использовать следующее классическое утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $\lambda, \lambda' \in \Lambda_+$, причем $\lambda \succeq \lambda'$. Тогда $M(\lambda) \supseteq M(\lambda')$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\lambda' \in M(\lambda)$, то $M(\lambda') \subseteq M(\lambda)$. В этом случае, если $M(\lambda')$ не сверхнасыщено, то и $M(\lambda)$ тоже.

Пусть $v_0, v_1, \dots, v_r$ – векторы в пространстве $\mathbb{Q}^n$ и f – линейная функция на $\mathbb{Q}^n$. Будем называть f *разделяющей* линейной функцией для набора $\{v_0; v_1, \dots, v_r\}$, если значение $f(v_0)$ не представимо в виде линейной комбинации значений $f(v_1), \dots, f(v_r)$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Если известно, что

$$v_0 \in \mathbb{Z}(v_1, v_2, \dots, v_r) \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}(v_1, v_2, \dots, v_r),$$

причем для v_0 существует $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ -разложение по линейно независимым векторам $v_1, \dots, v_s$, $s \leq r$, с коэффициентами из интервала $[0, 1)$, то наличие разделяющей функции гарантирует, что $\{v_0; v_1, \dots, v_r\}$ – расширенный ненасыщенный поднабор.

2. Система корней E_8 . Рассмотрим пространство $\mathbb{Q}^8$ со стандартным скалярным произведением. Тогда множество векторов

$$\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \quad 1 \leq i < j \leq 8, \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 (-1)^{\nu_i} \varepsilon_i, \quad \text{где } \sum_{i=1}^8 \nu_i \text{ четна,}$$

образует систему корней E_8 , см. [6; гл. 6, § 4]. Решетка весов Λ совпадает с решеткой корней Ξ . Она устроена следующим образом:

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1, \quad \Lambda_0 = \left\{ \ell \in \mathbb{Z}^8 : \sum_{i=1}^8 \ell_i \text{ четна} \right\}, \quad \Lambda_1 = \Lambda_0 + \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Множество Λ_1 состоит из всех векторов, у которых координаты строго полуцелые, а их сумма четна. Мы покажем, что ни одно множество вида $M(\lambda)$ для произвольного (а не только доминантного, см. замечание 1) веса $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ не является сверхнасыщенным, откуда и следует, что нет ни одного представления, в котором замыкания всех T -орбит были бы нормальными.

Заметим, что группа Вейля W системы корней E_8 содержит, в частности, все перестановки координат, ибо они порождаются отражениями s_α для векторов α вида $\varepsilon_i - \varepsilon_j$. Также она содержит смены знаков в четном числе мест. Действительно, смена знаков, скажем, первой и второй координат получается применением композиции отражений $s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}$, где $\alpha_{1,2} = \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$.

Рассмотрим “выделенный” вес $\lambda^\circ = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Покажем, что он лежит во всех $M(\lambda)$, а также, что в $M(\lambda^\circ)$ существует РНП.

ПРИМЕР 1. Пусть $\lambda = \lambda^\circ = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Рассмотрим следующие векторы, лежащие в $M(\lambda^\circ)$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и вектор

$$v_0 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6) = v_7 - v_8.$$

Предположим, что v_0 представим в виде $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -комбинации остальных векторов. Из рассмотрения седьмой координаты ясно, что коэффициенты при v_7 и v_8 нулевые. Так как первые шесть векторов линейно независимы, то v_0 однозначно выражается через них и коэффициенты в этом выражении нецелые. Поэтому множество $\{v_0; v_1, \dots, v_8\}$ является РНП.

Покажем, что $\lambda^\circ \in M(\lambda)$ для любого ненулевого веса λ . Сделаем это для $\lambda \in \Lambda_0$ и $\lambda \in \Lambda_1$ по отдельности.

ЛЕММА 3. Пусть $\lambda = (a_1, \dots, a_8) \in \Lambda_0 \setminus \{0\}$. Тогда $\lambda^\circ \in M(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что найдутся две координаты a_i, a_j одинаковой четности такие, что $|a_i| + |a_j| \geq 2$, без ограничения общности это a_1 и a_2 . Действием группы Вейля можно добиться того, что $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0$. Тогда $a_1 + a_2 \geq 2$. Далее, в $M(\lambda)$ есть точка

$$\lambda' = (a_2, a_1, -a_3, -a_4, -a_5, -a_6, -a_7, -a_8);$$

серединой отрезка $\lambda\lambda'$ будет точка

$$\lambda'' = (a, a, 0, \dots, 0),$$

где $a = (a_1 + a_2)/2 \geq 1$ — натуральное число. Так как $\lambda - \lambda'' \in \Xi$, получаем, что $\lambda'' \in M(\lambda)$. Точка λ° , очевидно, лежит на отрезке, соединяющем λ'' и $(-\lambda'')$, причем $\lambda^\circ - \lambda'' \in \Xi$. Таким образом,

$$\lambda^\circ \in M(\lambda'') \subseteq M(\lambda).$$

ЛЕММА 4. Пусть $\lambda = (a_1, \dots, a_8) \in \Lambda_1$. Тогда $\lambda^\circ \in M(\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в W отражение s_{α_0} , соответствующее корню $\alpha_0 = (1/2, \dots, 1/2)$. Пусть $a_i = b_i/2$. Тогда $b_i \in \mathbb{Z}$, числа b_i нечетны, причем $\sum_{i=1}^8 b_i$ делится на 4. Получаем, что

$$s_{\alpha_0}(\lambda) = \lambda - \frac{a_1 + \dots + a_8}{4}(1, 1, \dots, 1) = \lambda - \frac{b_1 + \dots + b_8}{8}(1, 1, \dots, 1).$$

При этом, если $\sum_{i=1}^8 b_i$ не делится на 8, то вектор $s_{\alpha_0}\lambda$ имеет целые координаты и не является нулевым. Поэтому $M(\lambda) = M(s_{\alpha_0}\lambda) \ni \lambda^\circ$ по лемме 3. В противном случае выберем из чисел b_i два, дающие равные остатки при делении на 4. Можно считать, что это b_1 и b_2 . Сменив знак у этих координат, получим вектор $\lambda' \in M(\lambda)$, у которого сумма удвоенных координат уже не будет делиться на 8. Значит, вектор $s_{\alpha_0}(\lambda')$ имеет целые координаты и является ненулевым, аналогично получаем $M(\lambda) = M(s_{\alpha_0}\lambda') \ni \lambda^\circ$.

Итак, в случае E_8 для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ в $M(\lambda)$ есть ненасыщенный поднабор, что и требовалось доказать.

3. Система корней E_7 . Для системы корней E_7 используемая нами реализация отличается от [6; гл. 6, § 4] сменой знаков у первой и последней координат. Множество корней состоит из следующих векторов, лежащих в 7-мерном подпространстве $L \subset \mathbb{Q}^8$, ортогональном вектору $\varepsilon_7 - \varepsilon_8$:

$$\begin{aligned} & \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \quad 1 \leq i < j \leq 6, \quad \pm(\varepsilon_7 + \varepsilon_8), \\ & \pm \frac{1}{2} \left(\varepsilon_7 + \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^6 (-1)^{\nu_i} \varepsilon_i \right), \quad \text{где } \sum_{i=1}^6 \nu_i \text{ четно.} \end{aligned}$$

Решетка корней Ξ есть пересечение решетки корней для E_8 и L , т.е.

$$\Xi = \Xi_0 \cup \Xi_1,$$

$$\Xi_0 = \left\{ \ell \in \mathbb{Z}^8 : \sum_{i=1}^6 \ell_i \text{ четна, } \ell_7 = \ell_8 \right\}, \quad \Xi_1 = \Xi_0 + \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$$

и Ξ_1 опять состоит из всех векторов в L , у которых координаты строго полужелые, а сумма всех координат четна.

Решетка весов Λ есть надрешетка индекса 2; именно,

$$\Lambda = \Xi \cup \left(\Xi + \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1, -1, -1, 0, 0) \right).$$

Она состоит из всех векторов $\ell \in L$, у которых все координаты либо целые, либо полужелые, сумма координат четна и при этом $(\ell_i - \ell_j)$ – целое число при всех $1 \leq i < j \leq 6$.

Группа Вейля W содержит, в частности, все перестановки первых шести координат, а также смены знаков в четном числе мест, среди которых последние две координаты присутствуют или не присутствуют одновременно.

Докажем вначале аналоги лемм 3 и 4 из предыдущего пункта; это пригодится и в построении примеров.

ЛЕММА 5. Пусть $\lambda = (a_1, \dots, a_8) \in \Xi \setminus \{0\}$. Тогда $M(\lambda)$ содержит все корни.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \in \Xi_0$. Покажем сначала, что в $M(\lambda)$ есть или вектор $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, или $\varepsilon_7 + \varepsilon_8$ (а тогда из транзитивности действия группы Вейля – и все корни). Действительно, если $\sum_{i=1}^6 |a_i| \neq 0$, то эта сумма четна; тогда можно среди чисел $a_1, \dots, a_6$ выбрать два числа одной четности с суммой модулей, не меньшей двух, и далее действовать аналогично доказательству леммы 3, получая $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \in M(\lambda)$. В противном случае $\lambda = a_7(\varepsilon_7 + \varepsilon_8)$, точка $\varepsilon_7 + \varepsilon_8$ лежит на отрезке, соединяющем λ'' и $(-\lambda'')$, и потому также лежит в $M(\lambda)$.

Если теперь $\lambda \in \Xi_1$, то запишем

$$\lambda = \frac{1}{2}(b_1, \dots, b_6, b_7, b_7),$$

где все b_i нечетны. Если их сумма B не делится на 8, то $s_{\alpha_0}\lambda \in \Xi_0$ и случай сводится к предыдущему. Если же B делится на 8, то среди чисел $b_1, \dots, b_6$ можно выбрать два, дающие равные остатки от деления на 4. Как и в доказательстве леммы 4, это позволяет свести все к предыдущему случаю.

ЛЕММА 6. Пусть $\lambda = (a_1, \dots, a_8) \in \Lambda \setminus \Xi$. Тогда $M(\lambda)$ содержит вектор

$$\lambda_* = \left(1, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\lambda \notin \Xi$, либо первые шесть его координат целые, а последние две – нецелые, либо наоборот. Если целы последние координаты, то, применяя отражение s_{α_0} (если надо, предварительно поменяв знак у двух из первых

шести координат), получаем вектор, у которого первые 6 координат целые, а последние две полуцелые. Итак, можно считать, что последние координаты нецелые, т.е.

$$\lambda = \left(a_1, a_2, \dots, a_6, \frac{b_7}{2}, \frac{b_7}{2} \right)$$

для некоторых целых $a_1, \dots, a_6$ и нечетного b_7 .

Рассмотрим вектор

$$\lambda' = \left(a_1, a_2, \dots, a_6, -\frac{b_7}{2}, -\frac{b_7}{2} \right) \in M(\lambda).$$

Так как b_7 нечетно, то в $M(\lambda)$ лежит вектор

$$\lambda'' = \left(a_1, a_2, \dots, a_6, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \in [\lambda, \lambda'].$$

Заметим, что $a_1 + \dots + a_6$ нечетно. Зафиксируем какую-нибудь нечетную координату, без ограничения общности a_1 . Рассмотрим все точки, полученные из λ'' заменой знака у четного числа координат со 2-й по 6-ю. Их центром тяжести будет точка $(a_1, 0, \dots, 0, 1/2, 1/2) \in M(\lambda)$. Наконец, на отрезке между $(a_1, 0, \dots, 0, 1/2, 1/2)$ и $(-a_1, 0, \dots, 0, 1/2, 1/2)$ есть точка $(1, 0, \dots, 0, 1/2, 1/2)$, т.е. в $M(\lambda)$ есть точка $\lambda_* \in M(\lambda)$.

Теперь мы готовы привести примеры для всех фундаментальных весов.

ПРИМЕР 2. Пусть $\lambda \in \Xi$. По лемме 5 множество $M(\lambda)$ содержит любой корень. Рассмотрим следующий набор векторов из $M(\lambda)$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$v_0 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = v_6 - v_5.$$

Пусть v_0 есть $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -комбинация векторов $v_1, \dots, v_6$. Первые три координаты вектора v_0 меньше единицы; значит, коэффициенты при v_1, v_2, v_3 должны быть нулевыми. Но тогда четвертая координата этой комбинации неизбежно будет неотрицательной – противоречие. Итак, $\{v_0; v_1, \dots, v_6\}$ – РНП.

ПРИМЕР 3. Пусть $\lambda \in \Lambda \setminus \Xi$. По лемме 6 в $M(\lambda)$ есть вектор

$$\lambda_* = \left(1, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

а вместе с ним и вектор

$$-s_{\alpha_0} \lambda_* = \frac{1}{2}(-1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0).$$

Теперь можно выписать НП. Имеем

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$v_0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6) = v_7 + v_8 + v_9 - v_{10} - v_{11} - v_{12}.$$

Из рассмотрения седьмой координаты видно, что в $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -комбинацию могут входить только первые 6 векторов. Но они линейно независимы, поэтому из них нельзя получить другую линейную комбинацию для v_0 .

Мы построили НП для любого ненулевого $\lambda \in \Lambda$, что и требовалось доказать.

4. Система корней E_6 . Вместо одной из стандартных реализаций (см., например, [6]) мы будем использовать более симметричную реализацию в шестимерном подпространстве девятимерного пространства; координаты каждого вектора разбиваются на три тройки идущих подряд координат, сумма в каждой тройке равна нулю. Легко проверить, что множество, приведенное ниже, является системой корней. Кроме того, так как матрица Грама для простых корней совпадает с матрицей Грама для простых корней системы E_6 , то это действительно E_6 .

Корнями являются:

- 18 векторов вида $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, где различные индексы i, j лежат в одной из троек

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{4, 5, 6\}, \quad \{7, 8, 9\};$$

- 27 векторов вида $(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c})$, где

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \left\{ \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}$$

- и 27 векторов вида $(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c})$, где

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \left\{ \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right) \right\}.$$

Простыми корнями являются

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 1, -1), & \alpha_2 &= (0, 1, -1; 0, 0, 0; 0, 0, 0), \\ \alpha_3 &= (0, 0, 0; 0, 0, 0; 1, -1, 0), & \alpha_4 &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \\ \alpha_5 &= (0, 0, 0; 1, -1, 0; 0, 0, 0), & \alpha_6 &= (0, 0, 0; 0, 1, -1; 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Соответствующие фундаментальные веса:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; 0, 0, 0; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right), & \pi_2 &= (1, 0, -1; 0, 0, 0; 0, 0, 0), \\ \pi_3 &= \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}; 0, 0, 0; \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right), & \pi_4 &= (2, -1, -1; 0, 0, 0; 0, 0, 0), \\ \pi_5 &= \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; 0, 0, 0 \right), & \pi_6 &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}; 0, 0, 0 \right). \end{aligned}$$

В группе Вейля W системы корней E_6 лежат все перестановки координат внутри троек.

Покажем, что для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ множество $M(\lambda)$ не сверхнасыщено. Сначала убедимся, что это верно для π_1 , π_2 и π_6 .

ПРИМЕР 4. Пусть $\lambda = \pi_1$ или $\lambda = \pi_6$. Ввиду полной аналогии рассмотрим лишь случай $\lambda = \pi_1$. Рассмотрим корень

$$\beta_0 = \frac{1}{3}(1, -2, 1; -2, 1, 1; 1, 1, -2).$$

Тогда в $M(\lambda)$ лежит вектор

$$s_{\beta_0}\lambda = \frac{1}{3}(1, 1, -2; 2, -1, -1; 0, 0, 0).$$

Значит, в $M(\lambda)$ лежит набор

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$v_0 = (1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6) = v_1 - v_7.$$

Покажем, что $\{v_0; v_1, \dots, v_7\}$ – РНП. Для этого осталось показать, что v_0 не есть $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -комбинация векторов $v_1, \dots, v_7$. Применим разделяющую функцию

$$f = 45n_1 + 15n_2 + 30n_3 - 3n_7 - 3n_8 - 6n_9,$$

где n_i – функция взятия i -й координаты вектора. Тогда надо получить 15 из чисел 17, 14, 0 и 2, что, очевидно, невозможно.

ПРИМЕР 5. Пусть $\lambda = \pi_2$. В $M(\pi_2)$ лежат все корни. Тогда РНП будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$v_0 = \frac{1}{3}(2, -1, -1; 2, -1, -1; 2, -1, -1) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 v_i = v_1 - v_7.$$

То, что v_0 не есть $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -комбинация векторов $v_1, \dots, v_7$, следует из рассмотрения функции $f = 12n_1 + 3n_2$: значения на векторах $v_1, \dots, v_7$ равны 12, 9, 0 и 5, а $f(v_0) = 7$.

Ненасыщенные поднаборы для остальных доминантных весов строятся из примеров 4 и 5 при помощи леммы 2 и замечания 2. Используя явные разложения из [6; глава VI, § 4, п. 12], легко видеть, что π_2 является положительным корнем, что $\pi_3 \succeq \pi_6$, $\pi_4 \succeq \pi_2$ и $\pi_5 \succeq \pi_1$, а также что $2\pi_1 \succeq \pi_6$, $2\pi_6 \succeq \pi_1$ и $\pi_1 + \pi_6 \succeq \pi_2$. Пусть $\lambda = c_1\pi_1 + \dots + c_6\pi_6$ – некоторый доминантный вес. Из соотношений, выписанных выше, сначала получаем, что $\lambda \succeq c'_1\pi_1 + c'_2\pi_2 + c'_6\pi_6$, далее, – что все c'_i можно считать равными 0 или 1; наконец, можно добиться того, чтобы ровно один из этих коэффициентов был ненулевым, что и требовалось доказать. Итак, в случае E_6 во множестве весов любого представления существует НП.

5. Система корней F_4 . Множеством корней является следующий набор векторов в $\mathbb{Q}^4$:

$$\pm \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \quad 1 \leq i < j \leq 4, \quad \frac{1}{2}(\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4).$$

Простыми корнями являются

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \quad \varepsilon_4, \quad \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4).$$

Соответствующие фундаментальные веса таковы:

$$\pi_1 = (1, 1, 0, 0), \quad \pi_2 = (2, 1, 1, 0), \quad \pi_3 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \pi_4 = (1, 0, 0, 0).$$

Решетка весов совпадает с решеткой корней:

$$\Xi = \Lambda = \mathbb{Z}^4 \cup \left(\mathbb{Z}^4 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right).$$

В группе Вейля 1152 элемента. В ней содержатся все перестановки координат и смена знака у любого набора координат. Кроме того, она действует транзитивно на множествах корней одной длины.

Покажем, что при $\lambda = \pi_4$ набор весов $M(\lambda)$ сверхнасыщенный, а при всех остальных доминантных весах – нет.

Случай 1: $\lambda = \pi_4$ (ср. [5; случай 2.3]). В этом случае $M(\lambda)$ есть просто множество всех корней длины 1. Покажем, что оно сверхнасыщено, используя метод от противного. Предположим, что есть РНП $\{v_0; v_1, \dots\}$.

Проверим, что модули определителей всех линейно независимых четверок векторов из $M(\lambda)$ равны 1 или $1/2$. Рассмотрим четверку векторов v_1, v_2, v_3, v_4 . Если среди них хотя бы два имеют вид $\pm \varepsilon_i$, то утверждение верно: если таких векторов два, то $D = \det(v_1, v_2, v_3, v_4) = 1 \cdot (\pm 1/4 \pm 1/4)$, если в точности три, то $D = 1 \cdot (\pm 1/2)$, если четыре, то $D = \pm 1$. В противном случае хотя бы три среди v_i имеют вид $(1/2)(\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$, и хотя бы у двух из них одинакова четность суммы координат. Тогда они ортогональны; переведем теперь первый в вектор той же длины ε_1 , второй автоматически перейдет в $\pm \varepsilon_i$, и для полученного набора векторов утверждение уже доказано.

Идеология дальнейшего рассуждения взята из [5; § 1.4]. Если набор $\{v_0; v_1, \dots, v_s\}$ является РНП, то в соответствующую $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ -комбинацию должны входить векторы, дающие определитель 1 (если их менее четырех, то дополним их до линейно независимой четверки и допишем в $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ -комбинацию с нулевыми коэффициентами), иначе она будет целочисленной по формулам Крамера. Как видно из предыдущего рассуждения, можно считать, что это векторы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, а из вида решетки весов и определения РНП следует, что

$$v_0 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4).$$

Заметим, что при добавлении любого вектора v_5 , $v_5 \neq -\varepsilon_i$, мы сможем получить v_0 как $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -комбинацию векторов $v_1, \dots, v_5$, добавляя к вектору v_5 , имеющему вид $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$, векторы ε_i для всех i , для которых i -я координата вектора v_5 отрицательна. Противоречие.

ПРИМЕР 6. Пусть $\lambda = \pi_1$. Пусть $v_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $v_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $v_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$, $v_4 = \varepsilon_3$, $v_0 = (1/2)(v_1 + v_2) = v_3 - v_4$. Очевидно, $\{v_0; v_1, \dots, v_4\}$ является РНП.

Осталось указать, как построить ненасыщенные подмножества для остальных доминантных весов. Зафиксируем $\alpha_0 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$. Покажем, что π_1 содержится в множествах $M(2\pi_4)$, $M(\pi_3)$, $M(\pi_2)$. Действительно,

$$\pi_1 = \frac{1}{2}((1, 1, 2, 0) + (1, 1, -2, 0)) \in M(\pi_2).$$

Далее, $s_{\alpha_0}(\pi_3) = (0, -1, -1, -1)$, поэтому

$$\pi_1 = \frac{1}{2}((1, 1, 1, 0) + (1, 1, -1, 0)) \in M(\pi_3).$$

Наконец, $s_{\alpha_0}(2\pi_4) = (1, -1, -1, -1)$, откуда

$$\pi_1 = \frac{1}{2}((1, 1, 1, -1) + (1, 1, -1, 1)) \in M(2\pi_4).$$

В разложения всех остальных доминантных весов по фундаментальным входят или $2\pi_4$, или π_3 , или π_2 , или π_1 , и к ним можно применить лемму 2.

6. Система корней G_2 . Реализуем G_2 в двумерном подпространстве $\{\ell_1\varepsilon_1 + \ell_2\varepsilon_2 + \ell_3\varepsilon_3 \mid \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0\}$ пространства $\mathbb{Q}^3$. Корнями будут векторы

$$\begin{aligned} \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \pm(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad \pm(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3), \\ \pm(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \pm(2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Рисунок

Простыми корнями будут векторы $\alpha_1 = (1, -1, 0)$ и $\alpha_2 = (-2, 1, 1)$. Фундаментальные веса таковы:

$$\pi_1 = (0, -1, 1), \quad \pi_2 = (-1, -1, 2).$$

Из рисунка видно, что группа Вейля – это группа диэдра порядка 12. Решетки корней и весов совпадают.

Покажем сначала, что множество $M(\pi_1)$ сверхнасыщено, а множество $M(\pi_2)$ – нет.

Случай 2: $\lambda = \pi_1$. Тогда $M(\lambda) = \{\pm(0, 1, -1), \pm(1, 0, -1), \pm(1, -1, 0)\}$, и оно сверхнасыщено.

ПРИМЕР 7. Пусть $\lambda = \pi_2$. Это длинный корень, из рисунка ясно, что $M(\lambda)$ совпадает со всей системой корней. Рассмотрим следующие векторы (выделенные жирным на рисунке):

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $v_0 = (v_1 + v_2)/3 = (-1, 0, 1) = v_1 - v_3$. Из рассмотрения последней координаты ясно, что v_0 не является $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -комбинацией векторов v_1, v_2, v_3 . Итак, $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ – это РНП.

Все остальные доминантные веса сводятся к π_2 . Действительно, если у вектора $\lambda = c_1\pi_1 + c_2\pi_2$ коэффициент $c_2 \neq 0$, то $M(\lambda)$ содержит $M(\pi_2)$, т.е. не является сверхнасыщенным. Если же $c_2 = 0$, но $\lambda \neq \pi_1$, то $c_1 \geq 2$. Тогда в $M(\lambda)$ лежит $2\pi_1 = (0, -2, 2)$, т.е. и вектор $(-2, 0, 2)$, а, следовательно, и $(-1, -1, 2) = \pi_2$ (см. рисунок).

Это завершает доказательство теоремы 1.

Авторы выражают благодарность И. В. Аржанцеву за постановку задачи и плодотворные обсуждения и Л. Манивелю за консультации по исключительным системам корней. Авторы также благодарны рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Morand, “Closures of torus orbits in adjoint representations of semisimple groups”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **328**:3 (1999), 197–202.
- [2] B. Sturmfels, “Equations defining toric varieties”, *Algebraic Geometry* (Santa Cruz, CA, USA, July 9–29, 1995), Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 437–449.
- [3] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, Univ. Lecture Ser., **8**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [4] K. Kuyumzhiyan, “Simple $SL(n)$ -modules with normal closures of maximal torus orbits”, *J. Algebraic Combin.*, **30**:4 (2009), 515–538.
- [5] К. Г. Куюмжиян, “Простые модули классических линейных групп с нормальными замыканиями орбит максимального тора”, *Сиб. матем. журн.* (в печати); K. Kuyumzhiyan, *Simple Modules of Classical Linear Groups with Normal Closures of Maximal Torus Orbits*, arXiv: 1009.4724v2.
- [6] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*. Гл. 4–6. *Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, Элементы математики, Мир, М., 1972.
- [7] Дж. Хамфрис, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М., 2003.
- [8] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal Embeddings. I*, Lecture Notes in Math., **339**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [9] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory. A First Course*, Grad. Texts in Math., **129**, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [10] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры*. Гл. 7–8. *Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли*, Элементы математики, Мир, М., 1978.

И. И. Богданов

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: ilya.i.bogdanov@gmail.com

Поступило

09.09.2011

К. Г. Куюмжиян

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
E-mail: karina@mccme.ru