Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Данченко, Интегральные оценки длин линий уровня рациональных функций и задача Е. И. Золотарева, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 3, 331–337

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9074>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:23:30

Интегральные оценки длин линий уровня рациональных функций и задача Е. И. Золотарева

В. И. Данченко

Получены интегральные оценки длин линий уровня (лемнискат) рациональных функций комплексного переменного. Эти оценки связаны с задачей о разделении компактов рациональными функциями и задачей Е. И. Золотарева.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm9074

1. Введение. Формулировка основного результата. Пусть K_1 и K_2 – произвольные непересекающиеся компакты на расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Скажем, что K_1 и K_2 *разделяются* некоторой рациональной функцией $R_n(z)$ (степени не выше n), если

$$m := \|R_n\|_{C(K_1)} > 0, \quad \mu := \min_{z \in K_2} |R_n(z)| < \infty, \quad \sigma(K_1, K_2, R_n) := \frac{\mu}{m} > 1. \quad (1.1)$$

Отсюда, в частности, следует, что линии уровня $\gamma(R_n; r) := \{z : |R_n(z)| = r\}$ разделяют компакты K_1, K_2 при $r \in (m, \mu)$ (точнее, $\gamma(R_n; r)$ разбивает $\mathbb{C}$ на два открытых множества, одно из которых содержит K_1 , а другое – K_2 , при этом $\gamma(R_n; r)$ является границей каждого из этих открытых множеств).

Рассматриваемую нами задачу Золотарева можно сформулировать следующим образом: получить из условия (1.1) какую-либо метрическую характеристику отдаленности компактов друг от друга. Такая характеристика должна зависеть только от n, μ, m . Первоначально задача формулировалась (в их терминах) для двух отрезков K_1, K_2 действительной оси [1]. Для произвольных компактов со связными дополнениями она исследовалась Гончаром (см. [2], [3]). В работе [3] для гармонической емкости $c(K_1, K_2)$ конденсатора (K_1, K_2) с условиями (1.1) доказано неравенство

$$c(K_1, K_2) \leq n \ln^{-1} \sigma(K_1, K_2, R_n). \quad (1.2)$$

В некоторых случаях из этого неравенства можно получить оценку эвклидова расстояния между K_1 и K_2 . Например, в случае вещественных отрезков $K_1 = [-1, -\delta]$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00952, 12-01-31471) и ДПННТ (грант № 1.1348.2011).

$K_2 = [\delta, 1]$, $0 < \delta < 1$, из (1.2) имеем

$$\delta > \exp(-\pi^2 n \ln^{-1} \sigma(K_1, K_2, R_n))$$

для любой рациональной функции R_n , разделяющей эти отрезки (см. [2]).

Оценка (1.2) точна: при любом малом $\varepsilon > 0$ существует рациональная функция R_n достаточно высокой степени $n = n(\varepsilon, K_1, K_2)$ такая, что $\sigma(K_1, K_2, R_n) \geq \exp(n(c + \varepsilon)^{-1})$, $c = c(K_1, K_2) > 0$ [3]. Отсюда также следует, что любые непесекающиеся компакты K_1 и K_2 на $\mathbb{C}$ со связными дополнениями разделяются некоторой рациональной функцией достаточно высокой степени [3]. Такие *ограниченные* компакты разделяются и многочленами P_n достаточно высокой степени n . Действительно, по теореме Мергеляна (см., например, [4; с. 436]) функцию $f(z)$, равную 0 и 1 на K_1 и K_2 соответственно, можно сколь угодно точно аппроксимировать многочленами P_n на $K_1 \cup K_2$, а при $\|f - P_n\|_{C(K_1 \cup K_2)} < 1/2$ многочлен P_n разделяет компакты K_1 и K_2 .

Пусть выполнено (1.1) и $\gamma = \gamma(R_n; r)$ – линия уровня, разделяющая компакты K_1, K_2 , $r \in (m, \mu)$. Предположим для удобства, что на γ нет нулей производной R'_n и, следовательно, γ состоит из непесекающихся локально аналитических замкнутых жордановых кривых (компонент) β_s . Линия γ может иметь довольно сложную геометрическую структуру, например, пересечение внутренностей нескольких компонент β_s может быть непустым. Открытое множество $G(R_n; r) = \{z : |R_n(z)| < r\}$ (включающее компакт K_1) состоит из конечного числа непесекающихся конечно-связных областей G_k , содержащих некоторое количество $n_k \geq 1$ нулей (с учетом их кратности) рациональной функции R_n (среди которых могут быть и бесконечно удаленные точки). Приращение непрерывной ветви $\arg R_n(\zeta)$ на каждой компоненте β_s не меньше 2π , поскольку, как легко проверить, ее производная по длине дуги вдоль β_s равна $r^{-1}|R'_n(\zeta)| > 0$. Отсюда и из принципа аргумента следует, что число компонент границы ∂G_k не превосходит n_k . Значит, число всех компонент β_s линии γ не превосходит n . В случае, когда $R_n = P_n$ является многочленом, множества $G(P_n; r)$ и $\gamma(P_n; r)$ устроены сравнительно просто: $G(P_n; r)$ состоит не более чем из n непесекающихся односвязных областей G_s – внутренностей компонент β_s .

Пусть K – произвольный компакт на $\mathbb{C}$, Γ – локально спрямляемая кривая, не имеющая общих точек с K . Введем *квазигиперболическую длину* (относительно K) кривой Γ :

$$M(K; \Gamma) := \int_{\Gamma} \frac{|d\zeta|}{\rho(\zeta, K)},$$

где $\rho(\zeta, K)$ – евклидово расстояние между ζ и K . При условии (1.1) и при $r \in (m, \mu)$ положим $L(K_1 \cup K_2, R_n; r) = M(K_1 \cup K_2; \gamma(R_n; r))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть K_1, K_2 – непесекающиеся компакты со связными дополнениями, Γ – гладкий контур, состоящий из конечного числа жордановых кривых и разделяющий эти компакты. Тогда

$$c(K_1, K_2) < \pi^{-2} M(K_1 \cup K_2; \Gamma). \quad (1.3)$$

В частности, при выполнении (1.1) отсюда имеем

$$c(K_1, K_2) < \pi^{-2} L(K_1 \cup K_2, R_n; r), \quad r \in (m, \mu). \quad (1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что граница конденсатора (K_1, K_2) состоит из конечного числа гладких кривых (здесь мы используем известное свойство непрерывности емкости конденсаторов, см., например, [3; § 4]). Через u обозначим функцию, гармоническую вне $K_1 \cup K_2$ и принимающую на границах $\partial K_1, \partial K_2$ значения 0 и 1 соответственно. Пусть $\zeta \in \gamma$, $\rho = \rho(\zeta, K_1 \cup K_2)$. В круге $\{z : |z - \zeta| \leq \rho\}$ имеем $0 \leq |u(z) - 1/2| \leq 1/2$. Из формулы Пуассона в этом круге для функции $U(r, \varphi) = u(\zeta + re^{i\varphi})$, $0 \leq r \leq \rho$, находим

$$U'_r(0, \varphi) = \frac{1}{\pi\rho} \int_0^{2\pi} \left(U(\rho, t) - \frac{1}{2} \right) \cos(t - \varphi) dt, \quad |U'_r(0, \varphi)| < \frac{2}{\pi\rho},$$

откуда $|\operatorname{grad} u(\zeta)| < 2\pi^{-1}\rho^{-1}$. Пусть $\eta = \eta(\zeta)$ – нормаль к Γ , внешняя по отношению к множеству, ограниченному кривой Γ и содержащему K_1 . По определению емкости (см., например, [3]) величина $2\pi c(K_1, K_2)$ равна криволинейному интегралу первого рода вдоль Γ от u'_η . Отсюда и из оценки для градиента получается оценка (1.3).

В настоящей работе отдаленность компактов K_1, K_2 характеризуется величинами $L(K_1 \cup K_2, R_n; r)$. Сформулируем основной результат. Отметим, что здесь не требуется связность дополнений к компактам K_1, K_2 .

ТЕОРЕМА 1. Пусть для компактов K_1, K_2 и некоторой рациональной функции R_n выполнено (1.1). Тогда для любого $a \in (1, \sqrt{\sigma})$, где $\sigma = \sigma(K_1, K_2, R_n) > 1$, имеем

$$\int_{am}^{\mu/a} L(K_1 \cup K_2, R_n; r) dr \leq A_0 \mu n \left(\ln \frac{\sigma - a}{a(a-1)} + \frac{\sqrt{\sigma} \sqrt{\sigma - a^2}}{a} \right), \quad A_0 < 160\pi. \quad (1.5)$$

ПРИМЕЧАНИЕ 1. Если $L(K_1 \cup K_2, R_n; r) = \infty$ при некотором $r \in [am; a^{-1}\mu]$, то интеграл в (1.5) понимается как несобственный интеграл Римана. Из доказательства (см. (2.1) и (3.2)) будет видно, что в (1.5) множитель μ справа можно заменить на $\mu_0 := m(1 + \sigma a^{-2})/2 < (m + \mu)/2 < \mu$. Далее, из (1.5) легко получить следующую оценку с более явной зависимостью от параметра a при его стремлении к 1 и $\sqrt{\sigma}$:

$$\int_{am}^{\mu/a} L(K_1 \cup K_2, R_n; r) dr \leq A(\sigma) \mu n \left(\sqrt{\sigma - a^2} \cdot \ln \frac{a}{a-1} \right),$$

где $A(\sigma)$ – некоторая конечная величина, зависящая лишь от σ .

Несложно проверить, что при $a = \sqrt[4]{\sigma}$ выполняется неравенство

$$\ln \frac{\sigma - a}{a(a-1)} + \frac{\sqrt{\sigma} \sqrt{\sigma - a^2}}{a} < 3 \frac{\sigma}{\sigma - 1} \frac{\sigma - a^2}{a}, \quad a = \sqrt[4]{\sigma} > 1.$$

Заменим в (1.5) μ на указанную в примечании 1 величину μ_0 и поделим полученное неравенство на длину $m(\sigma - a^2)a^{-1}$ отрезка интегрирования по r . Тогда по теореме о среднем, учитывая предыдущее неравенство, получим при $a = \sqrt[4]{\sigma}$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть для компактов K_1, K_2 и рациональной функции R_n выполнено (1.1). Тогда найдется линия уровня $\gamma^* = \gamma(R_n; r^*)$, для которой $\sigma^{1/4}m < r^* < \sigma^{-1/4}\mu$ и

$$L(K_1 \cup K_2, R_n; r^*) < A_1 n \frac{\sigma^2}{\sigma^{3/2} - 1}, \quad A_1 = \frac{3}{2} A_0. \quad (1.6)$$

В дальнейшем для удобства будем считать, что на γ^* нет нулей производной R'_n и, следовательно, γ^* состоит из замкнутых непересекающихся локально аналитических жордановых кривых-компонент β_s , число которых не превосходит n .

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Из (1.4) и (1.6) при малых положительных $\sigma - 1$ получается оценка емкости того же порядка, что и в (1.2). Неравенства (1.5), (1.6) могут быть содержательными и в случае компактов, состоящих из конечного числа точек.

Возникает следующая задача: составить вычислительный алгоритм, определяющий при фиксированном n , разделяются ли заданные конечные множества K_1, K_2 (каждое из которых содержит более n точек) некоторой рациональной функцией (или многочленом) степени n .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если оба компакта K_1 и K_2 состоят только из связных компонент (континуумов) E_α диаметра $\sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in E_\alpha\} \geq d > 0$, то

$$\ln\left(1 + \frac{2d}{\rho(K_1, K_2)}\right) < A_1 n \frac{\sigma^2}{\sigma^{3/2} - 1}, \quad (1.7)$$

где $\rho(K_1, K_2)$ – евклидово расстояние между K_1 и K_2 . Если $R_n = Q'/Q$ – логарифмическая производная некоторого многочлена Q , то условие на компакт K_2 можно опустить и считать его произвольным. При этом оценка (1.7) с заменой d на $\min\{d, \pi\mu^{-1}\}$ сохранится.

Действительно, пусть γ^* – линия уровня, удовлетворяющая неравенству (1.6). По условию каждая компонента β , входящая в состав γ^* и содержащая внутри себя точки компакта $K_1 \cup K_2$, имеет длину $|\beta| \geq 2d$. Обозначим через $z_1 \in K_1$ какую-либо точку, ближайшую к K_2 . Пусть β – компонента, отделяющая z_1 от K_2 . Тогда для ближайшей к z_1 точки $\zeta_1 \in \beta$ будем иметь

$$\ln\left(1 + \frac{2d}{\rho(K_1, K_2)}\right) \leq \ln \frac{|\zeta_1 - z_1| + 2d}{|\zeta_1 - z_1|} = \int_{|\zeta_1 - z_1|}^{|\zeta_1 - z_1| + 2d} \frac{dr}{r} \leq \int_{\beta} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|}. \quad (1.8)$$

Отсюда и из (1.6) получается (1.7). Рассмотрим случай $R_n = Q'/Q$ и произвольного K_2 . Исключим из $\gamma(r^*)$ все компоненты, внутри которых нет точек $K_1 \cup K_2$. Оставшаяся линия по-прежнему разделяет компакты K_1 и K_2 , и внутри каждой ее компоненты β лежат полюсы R_n или (и) точки компакта K_1 . В любом случае $|\beta| \geq \min\{2d, 2\pi\mu^{-1}\}$ (и, следовательно, можно применять оценку, аналогичную (1.8)). Действительно, если внутри β лежат точки K_1 , то по предположению $|\beta| \geq 2d$. Если же внутри β лежит хотя бы один полюс (с единичным вычетом), то

$$2\pi \leq \left| \int_{\beta} \frac{Q'(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \int_{\beta} \left| \frac{Q'(z)}{Q(z)} \right| |dz| \leq \mu |\beta|, \quad |\beta| \geq 2\pi\mu^{-1}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. При каждом $d > 0$ существует открытое множество U , являющееся объединением не более n открытых кругов (одинакового) диаметра $2d$, такое, что для компактов $K_1^* = K_1 \setminus U$, $K_2^* = K_2 \setminus U$ имеет место оценка (1.7) (возможно, $K_1^* = \emptyset$ или (и) $K_2^* = \emptyset$, в этом случае считаем, что (1.7) выполняется).

Действительно, оценка (1.7) будет верна, если удалить из $K_1 \cup K_2$ все точки, которые лежат внутри некоторых компонент линии γ^* , диаметры которых $\leq d$ (см. доказательство следствия 2). Таких компонент не более n , и каждая покрывается кругом диаметра $< 2d$.

2. Интегральные оценки. Пусть K_1 – произвольный компакт на $\mathbb{C}$, R_n – рациональная функция степени не выше n и $m = \|R_n\|_{C(K_1)} > 0$. В [5; теорема 2] доказана

ТЕОРЕМА 2. При $1 < a < b < \infty$ с некоторой константой $A \leq 80\pi$ имеем

$$\int_{am}^{bm} L(K_1, R_n; r) dr \leq Amn \left(\ln \frac{b-1}{a-1} + \sqrt{b(b-a)} \right). \quad (2.1)$$

Здесь, как и выше,

$$L(K_1, R_n; r) = \int_{\gamma(R_n; r)} \rho^{-1}(\zeta, K_1) |d\zeta|, \quad \gamma(R_n; r) = \{z : |R_n(z)| = r\}.$$

(Оценка (2.1) в [5] выписана в несколько иной форме.) Поскольку правая часть в (2.1) не зависит от вида K_1 , то можно считать, что K_1 – компакт на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, задаваемый неравенством $K_1 = \{z : |R_n(z)| \leq m\}$. Оценка (2.1) точна по порядку n ; справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть P_n – многочлен степени n , $K = \{z : |P_n(z)| \leq m\}$. При $r > m$ имеем

$$L(K, P_n; r) > B \frac{m}{r} n, \quad B = \text{const} > 0. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать без ограничения общности, что линия уровня $\gamma(P_n; r)$ не содержит нулей производной P'_n . Тогда, как уже отмечалось, множество $G(P_n; r) := \{z : |P_n(z)| < r\}$ состоит из конечного числа непересекающихся односвязных областей G_k , $k = 1, \dots, \kappa$, $1 \leq \kappa \leq n$, с непересекающимися локально аналитическими замкнутыми жордановыми границами β_k . Через n_k обозначим сумму кратностей нулей многочлена P_n , лежащих в G_k . По принципу аргумента при обходе β_k точка $w = P_n(\zeta)$ пробегает n_k раз окружность $|w| = r$, а при обходе границы $\partial G(P_n; r)$ точка $w = P_n(\zeta)$ пробегает эту окружность n раз.

Для оценки интеграла (2.2) воспользуемся предложением Блоха. Напомним его формулировку (см. [6]): если функция f аналитична и ограничена в некотором круге $D = \{z : |z - \zeta| < d\}$ и $f'(\zeta) \neq 0$, то она однолистка в концентрическом круге $|z - \zeta| < \delta_0 \leq d$ некоторого радиуса¹

$$\delta_0 > \frac{4^{-1} d^2 |f'(\zeta)|}{\sup_{z \in D} |f(z) - f(\zeta)|}. \quad (2.3)$$

Применим эту оценку для $f(z) = 1/P_n(z)$. При $\zeta \in \gamma(P_n; r)$ положим

$$d(\zeta) = \rho(\zeta, K), \quad D(\zeta): |z - \zeta| < d(\zeta), \quad \delta(\zeta) = 8^{-2} m d^2(\zeta) |f'(\zeta)|. \quad (2.4)$$

Имеем $|f(z) - f(\zeta)| \leq r^{-1} + m^{-1} < 2m^{-1}$ при $z \in D(\zeta)$. Отсюда и из (2.3) находим $\delta_0 \geq 8\delta(\zeta)$, так что f однолистка в круге $|z - \zeta| < 8\delta(\zeta) < d(\zeta)$. Последнее неравенство следует из леммы Шварца:

$$|f'(\zeta)| < \max_{|z-\zeta|=d(\zeta)} |f(z) - f(\zeta)| d^{-1}(\zeta) < 2m^{-1} d^{-1}(\zeta).$$

¹Существуют и более точные оценки.

Далее, из (2.4) имеем

$$\frac{\delta(\zeta)}{d(\zeta)} = \frac{m}{64} d(\zeta) |f'(\zeta)| > \frac{m}{8} \delta(\zeta) |f'(\zeta)|. \quad (2.5)$$

Фиксируем k и рассмотрим функцию $\delta(\zeta)$ на кривой $\beta = \beta_k$. На β эта функция непрерывна и положительна (так как β не содержит нулей производной P'_n). Поэтому $\min_{\zeta \in \beta} \delta(\zeta) > 0$. Заметим еще, что при всех $\zeta \in \beta$ величина $d(\zeta)$ меньше диаметра β (так как круг $D(\zeta)$ не может покрыть всю кривую β) и, следовательно, $\delta(\zeta) < 8^{-1}d(\zeta) \leq 16^{-1}|\beta|$. Исходя из этого, разобьем β на конечное число дуг следующим образом. Фиксируем $\zeta_1 \in \beta$. Определим последовательно при $s = 1, \dots, p$ дуги $\alpha_s = [\zeta_s, \zeta_{s+1}] \subset \beta$ (с непересекающимися внутренностями) так, чтобы при $s < p$ выполнялись равенства $|\alpha_s| = \delta(\zeta_s)$, а для последнего номера $s = p$ было $|\alpha_p| \leq \delta(\zeta_p)$ и $\zeta_1 = \zeta_{p+1}$. По построению имеем

$$|\zeta_{p-1} - \zeta_p| \leq |\alpha_{p-1}| = \delta(\zeta_{p-1}) < \frac{d(\zeta_{p-1})}{8}, \quad d(\zeta_p) \leq d(\zeta_{p-1}) + \delta(\zeta_{p-1}) \leq \frac{9}{8}d(\zeta_{p-1}).$$

Отсюда по известной теореме искажения (см. [7; гл. II, §4]) для производной f' функции f , однолистной в круге $|z - \zeta_{p-1}| < \theta := 8\delta(\zeta_{p-1})$, находим

$$\frac{|f'(z)|}{|f'(\zeta_{p-1})|} \leq \theta^2 \frac{\theta + |z - \zeta_{p-1}|}{(\theta - |z - \zeta_{p-1}|)^3}. \quad (2.6)$$

В частности, (2.6) выполняется при $z = \zeta_p$. Поскольку $|\zeta_p - \zeta_{p-1}| \leq 8^{-1}\theta$, то в этом случае отношение модулей производных в (2.6) меньше 2, и (см. (2.4))

$$\frac{\delta(\zeta_p)}{\delta(\zeta_{p-1})} = \frac{d^2(\zeta_p)}{d^2(\zeta_{p-1})} \frac{|f'(\zeta_p)|}{|f'(\zeta_{p-1})|} \leq \left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot 2 < 3.$$

Следовательно, круг $|z - \zeta_{p-1}| < 4\delta(\zeta_{p-1})$ содержит дугу $\alpha_p \cup \alpha_{p-1}$ и, кроме того,

$$|\alpha_p \cup \alpha_{p-1}| \leq \delta(\zeta_p) + \delta(\zeta_{p-1}) \leq 4\delta(\zeta_{p-1}).$$

Положим $\gamma_s = \alpha_s$ при $s = 1, \dots, p-2$ и $\gamma_{p-1} = \alpha_{p-1} \cup \alpha_p$. По доказанному кривая $\beta = \beta_k$ разбивается на дуги γ_s , каждая из которых покрывается соответствующим кругом $|z - \zeta_s| < 4\delta(\zeta_s)$, лежащим в круге однолистности $|z - \zeta_s| < 8\delta(\zeta_s)$, причем $\delta(\zeta_s) \leq |\gamma_s| \leq 4\delta(\zeta_s)$. Отсюда и из (2.5), учитывая также неравенства $\text{diam } \gamma_s \leq 4\delta(\zeta_s) < 2^{-1}d(\zeta_s)$, получаем оценки

$$\begin{aligned} \int_{\beta_k} \frac{|d\zeta|}{\rho(\zeta, K)} &= \sum_{s=1}^{p-1} \int_{\gamma_s} \frac{|d\zeta|}{\rho(\zeta, K)} > \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{|\gamma_s|}{d(\zeta_s)} \geq \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{\delta(\zeta_s)}{d(\zeta_s)} \\ &\geq \frac{m}{2 \cdot 8} \sum_{s=1}^{p-1} \delta(\zeta_s) |f'(\zeta_s)| \geq \frac{m}{2 \cdot 8 \cdot 4} \sum_{s=1}^{p-1} |\gamma_s| |f'(\zeta_s)|. \end{aligned}$$

Далее учтем, что γ_s покрывается кругом $|z - \zeta_s| < 4\delta(\zeta_s)$, а функция f однолистка в круге $|z - \zeta_s| < 8\delta(\zeta_s)$. Отсюда по той же теореме искажения, что применялась в (2.6), находим, что $\max |f'(\zeta)|$ на γ_s не превосходит $(1 + 1/2)(1 - 1/2)^{-3} |f'(\zeta_s)| = 12 |f'(\zeta_s)|$. Поэтому из предыдущих неравенств имеем

$$\int_{\beta_k} \frac{|d\zeta|}{\rho(\zeta, K)} > \frac{m}{2 \cdot 8 \cdot 4} \sum_{s=1}^{p-1} |\gamma_s| |f'(\zeta_s)| \geq \frac{m}{2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 12} \sum_{s=1}^{p-1} |f(\gamma_s)| = B \frac{m}{r} n_k,$$

где в последнем равенстве учтено, что кратность образа кривой β_k при отображении $w = f(z)$ равна n_k . Оценка (2.2) получается суммированием полученных неравенств по всем кривым β_k , $k = 1, \dots, \kappa$.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть для некоторой рациональной функции R_n выполняется (1.1). Применим теорему 2 для R_n^{-1} , выбрав параметры a и b из условий $a \in (1, \sqrt{\sigma})$, $b = \sigma a^{-1}$, где $\sigma = \mu t^{-1}$. Легко проверить, что $t < at < bt < \mu$, так что

$$\left\| \frac{1}{R_n} \right\|_{C(K_2)} = \frac{1}{\mu} < \frac{1}{bt} < \frac{1}{at} < \frac{1}{t}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{bt} = \frac{a}{\mu}, \quad \frac{1}{at} = \frac{b}{\mu}.$$

Отсюда по теореме 2, заменив R_n и K_1 соответственно на R_n^{-1} и K_2 , получим оценку, аналогичную (2.1) с теми же a и b :

$$\int_{a\mu^{-1}}^{b\mu^{-1}} L(K_2, R_n^{-1}; t) dt \leq A\mu^{-1}n \left(\ln \frac{b-1}{a-1} + \sqrt{b(b-a)} \right). \quad (3.1)$$

При замене $t = 1/r$ с учетом $b^{-1}\mu = at$, $a^{-1}\mu = bt$, находим

$$\int_{a\mu^{-1}}^{b\mu^{-1}} L(K_2, R_n^{-1}; t) dt = \int_{am}^{bm} L(K_2, R_n; r) \frac{dr}{r^2} > \frac{1}{b^2m^2} \int_{am}^{bm} L(K_2, R_n; r) dr.$$

Отсюда и из (3.1) имеем (с той же константой A , что и в (2.1))

$$\int_{am}^{bm} L(K_2, R_n; r) dr \leq A\mu a^{-2}n \left(\ln \frac{b-1}{a-1} + \sqrt{b(b-a)} \right). \quad (3.2)$$

Сложив это неравенство и (2.1), получим (1.5) с $A_0 = 2A$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. И. Золотарев, *Полное собрание сочинений*, Вып. 2, Изд-во АН СССР, Л., 1932.
- [2] А. А. Гончар, “Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения”, *Матем. сб.*, **72(114)**:3 (1967), 489–503.
- [3] А. А. Гончар, “О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями”, *Матем. сб.*, **78(120)**:4 (1969), 640–654.
- [4] Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, ИЛ, М., 1961.
- [5] В. И. Данченко, “Один критерий существования оценки производной рациональной функции”, *Матем. заметки*, **78**:4 (2005), 493–502.
- [6] И. И. Привалов, *Введение в теорию функций комплексного переменного*, Наука, М., 1977.
- [7] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.

В. И. Данченко

Владимирский государственный университет

E-mail: vdanch2012@yandex.ru

Поступило

21.03.2011

Исправленный вариант

23.12.2012