Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Миротин, Об одном классе операторно-монотонных функций нескольких переменных, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 1, 154–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9076>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:21:21

Об одном классе операторно-монотонных функций нескольких переменных

А. Р. Миротин

Классическая теорема Лёвнера [1]–[3] (см. также [4; замечания к § X.2]) утверждает, что непрерывная функция $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ обладает свойством $f(A) \leq f(B)$ для всех пар ограниченных самосопряженных операторов A, B в гильбертовом пространстве H таких, что $0 < A \leq B$, тогда и только тогда, когда f аналитически продолжается в область $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и это продолжение отображает открытую верхнюю полуплоскость в свое замыкание. Такие функции называют *операторно-монотонными функциями* (ОМФ) одного переменного. Они находят важные применения в анализе, математической физике и теории электрических сетей (см. [3], [5] и библиографию там). Заметим, что, в силу принципа максимума, ОМФ одного переменного либо отображает открытую верхнюю полуплоскость в себя, либо является вещественной постоянной.

ОМФ одного переменного, отображающие луч $(0, +\infty)$ в себя, называются *неотрицательными ОМФ одного переменного*. Известно ([5], [6; лемма 5.2]), что неотрицательные ОМФ одного переменного имеют в точности вид

$$f(z) = az + b + \int_0^\infty \frac{z}{z+t} d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0), \quad (1)$$

где $a, b \geq 0$, а μ – положительная мера на $\mathbb{R}_+$. Отсюда, в частности, следует, что непостоянная неотрицательная ОМФ одного переменного отображает и открытую нижнюю полуплоскость в себя.

Функции, голоморфные в области $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ и отображающие открытую верхнюю полуплоскость в свое замыкание, а луч $(-\infty, 0)$ – в себя, будем называть *неположительными ОМФ одного переменного*. Из сказанного выше ясно, что $g(z)$ будет неположительной ОМФ одного переменного тогда и только тогда, когда $-g(-z)$ является неотрицательной ОМФ одного переменного. При этом неравенство $g(C) \leq g(D)$ выполняется для всех пар ограниченных самосопряженных операторов C, D в гильбертовом пространстве H таких, что $C \leq D < 0$.

Поскольку функция $z \mapsto -z^{-1}$ является операторно-монотонной (доказательство этого факта, независимое от теоремы Лёвнера, см. в [7; гл. II, § 47]), имеет место

ЛЕММА 1. Пусть A, B – ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H , $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

1) Если $A \leq B < 0$, то для любого числа $\lambda > 0$ справедливы неравенства для резольвент $0 < R(\lambda, A) \leq R(\lambda, B)$.

2) Если $0 < R(\lambda, A) \leq R(\lambda, B)$ для некоторого $\lambda > 0$, то $A \leq B$.

Для формулировки основного результата введем многомерный аналог класса неположительных ОМФ одного переменного. Напомним [8], что функция ψ на $(-\infty; 0]^n$ принадлежит классу $\mathcal{T}_n$, если она неположительна, и все ее частные производные первого порядка абсолютно монотонны (неотрицательная непрерывная функция на $(-\infty; 0]^n$ называется *абсолютно монотонной*, если она принадлежит классу $C^\infty(-\infty; 0)^n$ и все ее частные производные неотрицательны на $(-\infty; 0)^n$, см., например, [9; дополнения и задачи к гл. 5, п. 16]). Функции класса $\mathcal{T}_n$ будем называть *неположительными функциями Бернштейна n переменных*. Известно [8], [10], что неположительная функция Бернштейна n

Работа выполнена при поддержке Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь (грант № 20111164).

DOI: 10.4213/mzm9076

переменных имеет вид

$$\psi(s) = c_0 + c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} - 1) d\mu(u), \quad (2)$$

где $c_0 = \psi(-0) \leq 0$, $c_1 = \nabla \psi(-\infty) \in \mathbb{R}_+^n$, а положительная мера μ на $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ определяется по функции ψ однозначно. Кроме того, ψ продолжается по формуле (2) (при $s = z$) до функции, непрерывной в замкнутой области $\{\operatorname{Re} z_j \leq 0\} \subset \mathbb{C}^n$ и голоморфной внутри этой области. При $n = 1$ из (2) также следует, что ψ либо отображает луч $(-\infty; 0)$ в себя, либо равна нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что неположительная функция Бернштейна n переменных ψ принадлежит классу $\mathcal{R}_n^-$, если существует такие числа $\lambda > 0$, $\gamma \geq 0$ и положительная мера τ на $\mathbb{R}_+^n$, что при всех $z \in \mathbb{C}^n$ с $\operatorname{Re} z_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, выполняется равенство

$$\frac{1}{\lambda - \psi(-z)} = \gamma + S\tau(z), \quad (3)$$

где

$$S\tau(z) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{d\tau(\xi)}{(\xi_1 + z_1) \dots (\xi_n + z_n)}$$

суть n -мерное преобразование Стильтьеса меры τ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Класс $\mathcal{R}_1^-$ совпадает с классом неположительных ОМФ одного переменного. В самом деле, пусть функция $\psi \in \mathcal{R}_1^-$ не есть тождественный нуль. Тогда она отображает луч $(-\infty; 0)$ в себя. Кроме того, из (3) при $n = 1$ следует, что функция $F(z) = 1/(\lambda - \psi(-z))$ принадлежит классу $\mathcal{S}^-$ в смысле [11; гл. V, § 3]. А тогда функция $\psi(\zeta) = \lambda - 1/F(-\zeta)$ голоморфна в области $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ и отображает открытую верхнюю полуплоскость в себя. Таким образом, ψ есть неположительная ОМФ. Обратно, если g есть неположительная ОМФ, то $-g(-s)$ есть неотрицательная ОМФ, а потому g имеет вид

$$g(s) = as - b + \int_0^\infty \frac{s}{t-s} d\mu(t), \quad s \in (-\infty, 0).$$

Подставляя в правую часть $s/(t-s) = \int_0^\infty (e^{su} - 1)te^{-tu} du$ и применяя теорему Фубини, получаем, что g имеет вид (2), т.е. принадлежит $\mathcal{T}_1$. Наконец, при $\lambda > 0$ функция $1/(\lambda - g(-z))$ принадлежит $\mathcal{S}^-$, а потому имеет вид (3) [11; гл. V, § 3].

Внутренняя характеристика класса $\mathcal{R}_n^-$ при $n > 1$ могла бы быть получена аналогичным образом, если бы была известна внутренняя характеристика класса функций n переменных, представимых в виде n -мерного преобразования Стильтьеса положительных мер.

Пусть $A = (A_1, \dots, A_n)$ – набор ограниченных попарно коммутирующих неположительных операторов в H . Поскольку любая неположительная функция Бернштейна n переменных ψ непрерывна в области $(-\infty; 0]^n$, для нее, как известно, можно определить оператор $\psi(A)$ следующим образом:

$$\psi(A) = \int \dots \int_{\Delta} \psi(s_1, \dots, s_n) E(ds_1 \dots ds_n),$$

где Δ – замкнутый брус в $(-\infty; 0]^n$, содержащий $\sigma(A_1) \times \dots \times \sigma(A_n)$, а E – совместное разложение единицы набора A ([12; п. 111]).

Целью данного сообщения является

ТЕОРЕМА 1. Пусть ψ принадлежит $\mathcal{R}_n^-$. Тогда для любых наборов $A = (A_1, \dots, A_n)$ и $A' = (A'_1, \dots, A'_n)$ ограниченных попарно коммутирующих неположительных операторов в H неравенства $A_j \leq A'_j$, $j = 1, \dots, n$, влекут неравенство $\psi(A) \leq \psi(A')$.

Теорема 1 будет вытекать из следующего утверждения, в случае операторов обобщающего теорему 5 из [13], где рассмотрен случай $\gamma = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ψ принадлежит $\mathcal{R}_n^-$. Тогда для любого набора $A = (A_1, \dots, A_n)$ ограниченных попарно коммутирующих неположительных операторов в H справедливо равенство

$$R(\lambda, \psi(A)) = \gamma I + \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^n R(\xi_j, A_j) d\tau(\xi),$$

где числа $\lambda > 0$, $\gamma \geq 0$ и мера $\tau \geq 0$ удовлетворяют равенству (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция ψ имеет интегральное представление (2). Тогда в силу теоремы Фубини

$$\begin{aligned} \psi(A) &= \int_{\Delta} \psi(s) E(ds) = \int_{\Delta} \left(c_0 + c_1 \cdot s + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{s \cdot u} - 1) d\mu(u) \right) E(ds) \\ &= c_0 I + c_1 \cdot A + \int_{\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}} (e^{u \cdot A} - I) d\mu(u), \end{aligned}$$

где положено $r \cdot A = \sum_j r_j A_j$ при $r \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, оператор $\psi(A)$ совпадает со значением функции ψ на наборе A в смысле [8]. Оставшаяся часть доказательства теоремы 2 теперь лишь немногим отличается от доказательства теоремы 5 в [13], так как операторы A_j являются диссипативными элементами алгебры ограниченных операторов в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 получается простой комбинацией леммы 1 и теоремы 2. В самом деле, так как при всех $\xi_j \geq 0$ по лемме имеем $0 < R(\xi_j, A_j) \leq R(\xi_j, A'_j)$, $j = 1, \dots, n$, то и $0 < \prod_{j=1}^n R(\xi_j, A_j) \leq \prod_{j=1}^n R(\xi_j, A'_j)$. Тогда $0 < R(\lambda, \psi(A)) \leq R(\lambda, \psi(A'))$ при некотором $\lambda > 0$ по теореме 2, и осталось еще раз применить лемму.

Автор благодарит рецензента за замечания, способствовавшие улучшению изложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. Löwner, *Math. Z.*, **38** (1934), 177–216. [2] C. Loewner, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 308–319. [3] J. Bendat, S. Sherman, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 58–71. [4] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. Т. 2. *Гармонический анализ. Самосопряженность*, Мир, М., 1978. [5] М. Rosenblum, J. Rovnyak, *Hardy Classes and Operator Theory*, Oxford Math. Monogr., Oxford Univ. Press, Oxford, 1985. [6] С. Berg, K. Boyadzhiev, R. deLaubenfels, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **55**:2 (1993), 246–269. [7] Э. Беккенбах, Р. Беллман, *Неравенства*, Мир, М., 1965. [8] А. Р. Миротин, *Матем. заметки*, **61**:4 (1997), 630–633. [9] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с ней*, Физматгиз, М., 1961. [10] А. Р. Миротин, *Алгебра и анализ*, **11**:2 (1999), 142–169. [11] М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П. Л. Чебышева и А. А. Маркова и их дальнейшее развитие*, Наука, М., 1973. [12] Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979. [13] А. Р. Миротин, *Матем. заметки*, **64**:3 (1998), 423–430.

А. Р. Миротин
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
E-mail: amirotin@yandex.ru

Поступило
10.03.2011
Исправленный вариант
02.11.2012