Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Спиряев, Свойства моментов каги и ренко для однородных диффузионных процессов, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 2, 270–284

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9077>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:30:54

Свойства моментов каги и ренко для однородных диффузионных процессов

М. А. Спиряев

Для однородного диффузионного процесса $(X_t)_{t \geq 0}$ рассматриваются задачи, связанные распределением моментов остановки

$$\gamma_{\max} = \inf \left\{ t \geq 0 : \sup_{s \leq t} X_s - X_t \geq H \right\}, \quad \gamma_{\min} = \inf \left\{ t \geq 0 : X_t - \inf_{s \leq t} X_s \geq H \right\},$$

$$\kappa_0 = \inf \left\{ t \geq 0 : \sup_{s \leq t} X_s - \inf_{s \leq t} X_s \geq H \right\}.$$

Полученные результаты используются для построения индуктивной процедуры, позволяющей найти распределение приращений процесса X между двумя соседними моментами каги и ренко.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ задан процесс X , который допускает стохастический дифференциал

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \quad t \geq 0,$$

с начальным условием $X_0 = x_0$ п.н. Здесь $(B_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение, а функции $\mu(x)$ и $\sigma(x) > 0$ удовлетворяют условию Липшица

$$|\mu(x) - \mu(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

$$|\mu(x)|^2 + |\sigma(x)|^2 \leq C(1 + x^2), \quad x \in \mathbb{R},$$

для некоторых констант $L > 0, C > 0$. В настоящей работе исследуются вопросы, связанные с характеристиками величин “падения” и “размаха” процесса X , выводится преобразование Лапласа для моментов остановки

$$\gamma_{\max} = \inf \left\{ t \geq 0 : \sup_{s \leq t} X_s - X_t \geq H \right\}, \quad \gamma_{\min} = \inf \left\{ t \geq 0 : X_t - \inf_{s \leq t} X_s \geq H \right\},$$

$$\kappa_0 = \inf \left\{ t \geq 0 : \sup_{s \leq t} X_s - \inf_{s \leq t} X_s \geq H \right\},$$

а также приводятся выражения для функций распределения величин $\sup_{s \leq \gamma_{\max}} X_s$, $\inf_{s \leq \gamma_{\min}} X_s$ и X_{κ_0} . Полученные результаты используются для решения задач о распределении приращений процесса X между двумя соседними моментами каги и

ренко (подробнее о моментах каги и ренко см. [1], [2] и [3]):

$$\text{Law}(X_{\kappa_m} - X_{\kappa_{m-1}}), \quad \text{Law}(X_{\rho_m} - X_{\rho_{m-1}}), \quad m \geq 1, \quad (1.1)$$

где $\{\kappa_m\}_{m \geq 1}$ и $\{\rho_m\}_{m \geq 1}$ – моменты каги и ренко соответственно (см. определение ниже). Известно (см. [3] и [2]), что решение задачи (1.1) позволяет найти математическое ожидание прибыли от торговых стратегий каги и ренко. В настоящей работе приводится индуктивная процедура, позволяющая решить задачу (1.1), используя характеристики величин “падения” и “размаха” процесса X . Частный случай решения задачи (1.1), когда процесс X является броуновским движением со сносом, был ранее получен в [2]. Дискретный аналог задачи (1.1) для случайного блуждания был разобран в [1].

Метод решения задач, связанных с “падением” и “размахом”, основан на дискретизации непрерывных траекторий процесса X , позволяющей свести данные задачи к решению задач о выходе процесса X из заданного интервала. Доказательство лемм о “падении” и “размахе” вынесено в приложение к данной работе.

2. Свойства величин падения и размаха процесса X .

ЛЕММА 1. Пусть $A \leq 0 \leq B$. Для процесса $(X_t)_{t \geq 0}$ рассмотрим моменты выхода на уровни A и B :

$$\tau^A = \inf\{t \geq 0 : X_t = A\}, \quad \tau^B = \inf\{t \geq 0 : X_t = B\},$$

а также величину $\tau^{[A,B]} = \tau^A \wedge \tau^B$ – первый момент выхода процесса X на границу отрезка $[A, B]$. Тогда вероятности выхода через границы A и B задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} P(X_{\tau^{[A,B]}} = A) &= \int_{x_0}^B \varphi(x, A) dx / \int_A^B \varphi(x, A) dx, \\ P(X_{\tau^{[A,B]}} = B) &= \int_A^{x_0} \varphi(x, A) dx / \int_A^B \varphi(x, A) dx. \end{aligned}$$

Для преобразования Лапласа момента $\tau^{[A,B]}$ справедливы следующие свойства:

$$\begin{aligned} E e^{-\lambda \tau^{[A,B]}} \mathbf{I}(\tau^{[A,B]} = \tau^A) &= \frac{g(x_0)h(B) - g(B)h(x_0)}{g(A)h(B) - g(B)h(A)}, \\ E e^{-\lambda \tau^{[A,B]}} \mathbf{I}(\tau^{[A,B]} = \tau^B) &= \frac{g(A)h(x_0) - g(x_0)h(A)}{g(A)h(B) - g(B)h(A)}, \end{aligned}$$

где функция φ задается следующим образом:

$$\varphi(x, y) = \exp\left(-\int_y^x 2 \frac{\mu(z)}{\sigma^2(z)} dz\right). \quad (2.1)$$

Функции h и g – любые два независимых решения дифференциального уравнения

$$\frac{\sigma^2(x)}{2} f''(x) + \mu(x) f'(x) = \lambda f(x). \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приводится в [4].

ЛЕММА 2. Пусть $H > 0$. Для процесса $(X_t)_{t \geq 0}$ рассмотрим моменты остановки

$$\gamma_{\max} = \inf\{t \geq 0 : S_t - X_t \geq H\}, \quad \gamma_{\min} = \inf\{t \geq 0 : X_t - I_t \geq H\}, \quad (2.3)$$

где $S_t = \sup_{[0,t]} X$, $I_t = \inf_{[0,t]} X$. Будем считать, что с вероятностью единица выполнены следующие условия:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} X_t \leq x_0 - H, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} X_t \geq x_0 + H. \quad (2.4)$$

Тогда распределения величин $S_{\gamma_{\max}}$ и $I_{\gamma_{\min}}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} P(S_{\gamma_{\max}} \leq x) &= 1 - \exp\left(-\int_{x_0}^x \left[\varphi(y, x_0) / \int_{y-H}^y \varphi(z, x_0) dz\right] dy\right), \\ P(I_{\gamma_{\min}} \leq x) &= \exp\left(-\int_x^{x_0} \left[\varphi(y, x) / \int_y^{y+H} \varphi(z, x) dz\right] dy\right). \end{aligned}$$

Двумерные преобразования Лапласа для $(\gamma_{\max}, S_{\gamma_{\max}})$ и $(\gamma_{\min}, I_{\gamma_{\min}})$ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} E e^{\beta S_{\gamma_{\max}} - \lambda \gamma_{\max}} &= \int_{x_0}^{\infty} \exp\left(\beta x - \int_{x_0}^x \frac{g(z-H)h'(z) - h(z-H)g'(z)}{g(z-H)h(z) - g(z)h(z-H)} dz\right) \\ &\quad \times \frac{g(x)h'(x) - g'(x)h(x)}{g(x-H)h(x) - g(x)h(x-H)} dx, \\ E e^{\beta I_{\gamma_{\min}} - \lambda \gamma_{\min}} &= \int_{-\infty}^{x_0} \exp\left(\beta x - \int_x^{x_0} \frac{h(z+H)g'(z) - g(z+H)h'(z)}{g(z)h(z+H) - g(z+H)h(z)} dz\right) \\ &\quad \times \frac{h(x)g'(x) - g(x)h'(x)}{g(x)h(x+H) - g(x+H)h(x)} dx, \end{aligned}$$

где функции φ , g , h определены в (2.1) и (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы для процесса, выходящего из нуля ($x_0 = 0$), было дано в [5]. Используя аналогичные рассуждения, можно обобщить результаты этой работы на случай произвольного x_0 , а также получить выражения для $\gamma_{\min}$. Более подробное доказательство дано в приложении.

ЗАМЕЧАНИЕ. Распределения величин $\gamma_{\max}$, $\gamma_{\min}$, $S_{\gamma_{\max}}$ и $I_{\gamma_{\min}}$ можно получить и в случае, если не выполнены условия (2.4). Действительно, предположим, что не выполнено первое условие, т.е. $P(\liminf_{t \rightarrow \infty} X_t > x_0 - H) > 0$. В этом случае момент $\gamma_{\max}$ первого падения процесса X можно представить в виде

$$\gamma_{\max} = \tau^{m+H} + \tilde{\gamma}_{\max} \quad \text{п.н.},$$

где

$$\tau^{m+H} = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq m + H\}, \quad m = \sup\left\{y \in \mathbb{R} : P\left(\liminf_{t \rightarrow \infty} X_t \geq y\right) = 1\right\},$$

а момент остановки $\tilde{\gamma}_{\max}$ является моментом первого падения на величину H процесса $\tilde{X}$, задающегося следующим уравнением:

$$d\tilde{X}_t = \mu(\tilde{X}_t) dt + \sigma(\tilde{X}_t) dB_t, \quad \tilde{X}_0 = m + H.$$

При этом величины τ^{m+H} и $\tilde{\gamma}_{\max}$ независимы в силу строго марковского свойства.

ЛЕММА 3. Пусть $H > 0$. Для процесса $(X_t)_{t \geq 0}$ рассмотрим момент остановки

$$\kappa_0 = \inf \left\{ t \geq 0 : \sup_{[0,t]} X_t - \inf_{[0,t]} X_t \geq H \right\}.$$

Также будем предполагать, что выполнены условия (2.4). Тогда закон распределения величины X_{κ_0} задается следующим образом:

$$\begin{aligned} P(x_0 < X_{\kappa_0} \leq x) &= \int_{x_0}^x \varphi(y - H, x_0 - H) \frac{\int_{x_0}^y \varphi(z, x_0 - H) dz}{\left(\int_{y-H}^y \varphi(z, x_0 - H) dz \right)^2} dy, & x \leq x_0 + H, \\ P(x \leq X_{\kappa_0} < x_0) &= \int_x^{x_0} \varphi(y + H, x) \frac{\int_y^{x_0} \varphi(z, x) dz}{\left(\int_y^{y+H} \varphi(z, x) dz \right)^2} dy, & x \geq x_0 - H. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для преобразования Лапласа момента остановки κ_0 справедливы следующие свойства:

$$\begin{aligned} E e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}(X_{\kappa_0} > x_0) &= \int_{x_0}^{x_0+H} (g(y - H)h'(y - H) - g'(y - H)h(y - H)) \\ &\quad \times \frac{g(x_0)h(y) - g(y)h(x_0)}{[g(y - H)h(y) - g(y)h(y - H)]^2} dy, \\ E e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}(X_{\kappa_0} < x_0) &= \int_{x_0-H}^{x_0} (g(y + H)h'(y + H) - g'(y + H)h(y + H)) \\ &\quad \times \frac{g(y)h(x_0) - g(x_0)h(y)}{[g(y)h(y + H) - g(y + H)h(y)]^2} dy, \end{aligned}$$

где функции φ , g , h определены в (2.1) и (2.2).

Доказательство приводится в приложении.

3. Метод каги. Для произвольной величины $H > 0$ и процесса $(X_t)_{t \geq 0}$ индуктивно определим последовательность моментов остановки $(\kappa_i, \kappa_i^*)_{i=0,1,\dots}$.

- **Базис:** $\kappa_0 = \inf \{ u \geq 0 : \sup_{[0,u]} X - \inf_{[0,u]} X = H \}$:
 - если $X_{\kappa_0} = \sup_{[0,\kappa_0]} X$, то $\kappa_0^* = \inf \{ u \in [0, \kappa_0] : X_u = \inf_{[0,\kappa_0]} X \}$;
 - если $X_{\kappa_0} = \inf_{[0,\kappa_0]} X$, то $\kappa_0^* = \inf \{ u \in [0, \kappa_0] : X_u = \sup_{[0,\kappa_0]} X \}$.
- **Шаг $n \mapsto n + 1$:**
 - если $X_{\kappa_n} - X_{\kappa_n^*} = H$, то
 - $\kappa_{n+1} = \inf \{ u \geq \kappa_n : \sup_{[\kappa_n, u]} X - X_u = H \}$,
 - $\kappa_{n+1}^* = \inf \{ u \in [\kappa_n, \kappa_{n+1}] : X_u = \sup_{[\kappa_n, \kappa_{n+1}]} X \}$;
 - если $X_{\kappa_n} - X_{\kappa_n^*} = -H$, то
 - $\kappa_{n+1} = \inf \{ u \geq \kappa_n : X_u - \inf_{[\kappa_n, u]} X = H \}$,
 - $\kappa_{n+1}^* = \inf \{ u \in [\kappa_n, \kappa_{n+1}] : X_u = \inf_{[\kappa_n, \kappa_{n+1}]} X \}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Моменты $(\kappa_i)_{i=0,1,\dots}$ называются *моментами остановки каги*. Последовательность $(\kappa_i, \kappa_i^*)_{i=0,1,\dots}$ называется *каги H -конструкцией* для процесса X .

4. Свойства моментов каги. Основным объектом для изучения будет закон распределения приращений процесса X между двумя соседними моментами каги:

$$\text{Law}(X_{\kappa_m} - X_{\kappa_{m-1}}), \quad m \geq 1, \quad (4.1)$$

поскольку закон распределения этих величин задает распределение доходности от использования стратегии каги (см. [3] или [2]).

К сожалению, получить явное выражение для распределений (4.1) возможно лишь для некоторых частных случаев диффузионных процессов, например, для броуновского движения со сносом (см. [2]) или для некоторых частных случаев геометрического броуновского движения. В случае произвольного однородного диффузионного процесса мы рассмотрим способ, позволяющий индуктивно получить функцию распределения закона (4.1) для любого натурального m .

Для удобства будем полагать, что процесс X неограничен сверху и снизу. В случае, когда это требование не выполняется, приведенные ниже выводы могут быть соответствующим образом модифицированы (см. замечание выше). Обозначим через $f_{\max, x_0}$ плотность распределения процесса X в момент $\gamma_{\max}$ (см. (2.3)) в предположении, что X начинает движение из точки x_0 . Тогда из леммы 2 следует, что

$$f_{\max, x_0}(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x+H} \frac{\varphi(y, x_0)}{\int_{y-H}^y \varphi(z, x_0) dz} dy\right) \frac{\varphi(x+H, x_0)}{\int_x^{x+H} \varphi(z, x_0) dz}, \quad x \geq x_0 - H. \quad (4.2)$$

Аналогичным образом определим $f_{\min, x_0}$ – плотность распределения процесса X в момент $\gamma_{\min}$ в предположении, что X начинает движение из точки x_0 . Тогда

$$f_{\min, x_0}(x) = \exp\left(-\int_{x-H}^{x_0} \frac{\varphi(y, x-H)}{\int_y^{y+H} \varphi(z, x-H) dz} dy\right) \frac{1}{\int_{x-H}^x \varphi(z, x-H) dz}, \quad x \leq x_0 + H. \quad (4.3)$$

Кроме того, из леммы 3 известно, что плотность распределения величины X_{κ_0} задается следующим образом:

$$f_{X_{\kappa_0}}(x) = \begin{cases} \varphi(x-H, x_0-H) \frac{\int_{x_0}^x \varphi(z, x_0-H) dz}{\left(\int_{x-H}^x \varphi(z, x_0-H) dz\right)^2}, & x_0 < x \leq x_0 + H, \\ \varphi(x+H, x) \frac{\int_x^{x_0} \varphi(z, x) dz}{\left(\int_x^{x+H} \varphi(z, x) dz\right)^2}, & x_0 - H \leq x < x_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Базис. Обозначим через $f_{X_{\kappa_1}|X_{\kappa_0}}(z_1 | z_0)$ условную плотность X_{κ_1} при условии $X_{\kappa_0} = z_0$. Из определения моментов каги, а также в силу строго марковского свойства процесса X имеем

$$f_{X_{\kappa_1}|X_{\kappa_0}}(z_1 | z_0) = \begin{cases} f_{\max, z_0}(z_1) & \text{при } z_0 > x_0, \\ f_{\min, z_0}(z_1) & \text{при } z_0 < x_0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Из определения условной плотности следует, что совместная плотность $(X_{\kappa_1}, X_{\kappa_0})$ задается следующим равенством:

$$f_{X_{\kappa_1}, X_{\kappa_0}}(z_1, z_0) = f_{X_{\kappa_0}}(z_0) f_{X_{\kappa_1} | X_{\kappa_0}}(z_1 | z_0), \quad (4.6)$$

где $f_{X_{\kappa_0}}$ дано в (4.4), а плотность $f_{X_{\kappa_1} | X_{\kappa_0}}(z_1 | z_0)$ выражается через функции $f_{\max}$ и $f_{\min}$, которые даны в (4.2) и (4.3) соответственно. Подставляя (4.5) в равенство (4.6), получим

$$f_{X_{\kappa_1}, X_{\kappa_0}}(z_1, z_0) = \begin{cases} f_{X_{\kappa_0}}(z_0) f_{\max, z_0}(z_1), & z_0 > x_0, \\ f_{X_{\kappa_0}}(z_0) f_{\min, z_0}(z_1), & z_0 < x_0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Таким образом, зная характеристики величин падения и размаха процесса X , которые даны в (4.2), (4.3) и (4.4), можно получить выражение для плотности $f_{X_{\kappa_1}, X_{\kappa_0}}$. Эта функция потребуется для осуществления шага индукции. Решение задачи (4.1) для $m = 1$ с помощью (4.7) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} P(X_{\kappa_1} - X_{\kappa_0} \leq x) &= \iint_{\{(z_1, z_0): z_1 - z_0 \leq x\}} f_{X_{\kappa_1}, X_{\kappa_0}}(z_1, z_0) dz_1 dz_0 \\ &= \iint_{\{z_1 - z_0 \leq x, z_0 > x_0\}} f_{X_{\kappa_0}}(z_0) f_{\max, z_0}(z_1) dz_1 dz_0 \\ &\quad + \iint_{\{z_1 - x \leq z_0 < x_0\}} f_{X_{\kappa_0}}(z_0) f_{\min, z_0}(z_1) dz_1 dz_0. \end{aligned}$$

Шаг $m - 1 \mapsto m$. Предполагается, что из предыдущего шага известна функция плотности $f_{X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}$. Из определения моментов каги следует, что

$$f_{X_{\kappa_m} | X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}(z_m | z_{m-1}, z_0) = \begin{cases} f_{\max, z_{m-1}}(z_m) & \text{при } z_0 > x_0 \text{ и } m - \text{нечетное,} \\ & z_0 < x_0 \text{ и } m - \text{четное,} \\ f_{\min, z_{m-1}}(z_m) & \text{при } z_0 > x_0 \text{ и } m - \text{четное,} \\ & z_0 < x_0 \text{ и } m - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Отсюда следует

$$f_{X_{\kappa_m}, X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}(z_m, z_{m-1}, z_0) = f_{X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}(z_{m-1}, z_0) f_{X_{\kappa_m} | X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}(z_m | z_{m-1}, z_0). \quad (4.8)$$

Из этого равенства получаем необходимую для следующего шага функцию плотности $f_{X_{\kappa_m}, X_{\kappa_0}}$:

$$f_{X_{\kappa_m}, X_{\kappa_0}}(z_m, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}(z_{m-1}, z_0) f_{\max, z_{m-1}}(z_m) dz_{m-1}$$

при $z_0 > x_0$ и нечетном m , а также при $z_0 < x_0$ и четном m ,

$$f_{X_{\kappa_m}, X_{\kappa_0}}(z_m, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}(z_{m-1}, z_0) f_{\min, z_{m-1}}(z_m) dz_{m-1}$$

при $z_0 > x_0$ и четном m , а также при $z_0 < x_0$ и нечетном m . Решение задачи (4.1) записывается следующим образом:

$$P(X_{\kappa_m} - X_{\kappa_{m-1}} \leq x) = \iint_{\{(z_m, z_{m-1}) : z_m - z_{m-1} \leq x\}} f_{X_{\kappa_m}, X_{\kappa_{m-1}}}(z_m, z_{m-1}) dz_m dz_{m-1},$$

где функция $f_{X_{\kappa_m}, X_{\kappa_{m-1}}}$ выводится из (4.8). При четном m

$$\begin{aligned} f_{X_{\kappa_m}, X_{\kappa_{m-1}}}(z_m, z_{m-1}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}(z_{m-1}, z_0) f_{X_{\kappa_m} | X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}(z_m | z_{m-1}, z_0) dz_0 \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} f_{X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}(z_{m-1}, z_0) f_{\max, z_{m-1}}(z_m) dz_0 \\ &\quad + \int_{x_0}^{\infty} f_{X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}(z_{m-1}, z_0) f_{\min, z_{m-1}}(z_m) dz_0. \end{aligned}$$

При нечетном m

$$\begin{aligned} f_{X_{\kappa_m}, X_{\kappa_{m-1}}}(z_m, z_{m-1}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}(z_{m-1}, z_0) f_{X_{\kappa_m} | X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}(z_m | z_{m-1}, z_0) dz_0 \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} f_{X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}(z_{m-1}, z_0) f_{\min, z_{m-1}}(z_m) dz_0 \\ &\quad + \int_{x_0}^{\infty} f_{X_{\kappa_{m-1}}, X_{\kappa_0}}(z_{m-1}, z_0) f_{\max, z_{m-1}}(z_m) dz_0. \end{aligned}$$

5. Метод ренко. Для произвольной величины $H > 0$ и процесса $(X_t)_{t \geq 0}$ определим последовательность моментов остановки $(\tilde{\rho}_i)_{i=0,1,\dots}$:

$$\tilde{\rho}_0 = 0, \quad \dots, \quad \tilde{\rho}_{i+1} = \min\{u \geq \tilde{\rho}_i : |X_u - X_{\tilde{\rho}_i}| \geq H\}.$$

Пусть процесс $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ задается следующим образом:

$$\tilde{X}_t = X_{\tilde{\rho}_i}, \quad t \in [\tilde{\rho}_i, \tilde{\rho}_{i+1}).$$

Для процесса $\tilde{X}$ построим его каги H -конструкцию $(\rho_i, \rho_i^*)_{i=0,1,\dots}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Моменты $(\rho_i)_{i=0,1,\dots}$ называются *моментами остановки ренко*. Последовательность $(\rho_i, \rho_i^*)_{i=0,1,\dots}$ называется *ренко H -конструкцией* для процесса X .

6. Свойства моментов ренко. Как и в случае каги, будем исследовать закон распределения приращений процесса X между двумя моментами ренко:

$$\text{Law}(X_{\rho_m} - X_{\rho_{m-1}}), \quad m \geq 1. \quad (6.1)$$

Также будем полагать, что процесс X неограничен. Как и в случае каги, задачу (6.1) будем решать индуктивно. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} p_{\max, n}(k) &= P_{x_0 + nH}(\tilde{X}_{\gamma_{\max}} = x_0 + kH), \quad k \geq n-1, \\ p_{\min, n}(k) &= P_{x_0 + nH}(\tilde{X}_{\gamma_{\min}} = x_0 + kH), \quad k \leq n+1, \end{aligned}$$

где $X_0 = \tilde{X}_0 = x_0$ п.н., а моменты остановки $\gamma_{\max}$ и $\gamma_{\min}$ для процесса $\tilde{X}$ определяются аналогично тому, как это делалось для процесса X :

$$\gamma_{\max} = \inf \left\{ t \geq 0 : \sup_{[0,t]} \tilde{X} - \tilde{X}_t \geq H \right\}, \quad \gamma_{\min} = \inf \left\{ t \geq 0 : \tilde{X}_t - \inf_{[0,t]} \tilde{X} \geq H \right\}.$$

Определение вероятностей $p_{\max}$ и $p_{\min}$ корректно, так как для любого t величина $\tilde{X}_t$ имеет дискретное распределение и принимает значения вида $x_0 + kH$, где $k \in \mathbb{Z}$. Для краткости будем использовать введенные при доказательстве леммы 2 обозначения:

$$P(X_{\tau^{A,B}} = A) = q(A, B, x_0), \quad P(X_{\tau^{A,B}} = B) = p(A, B, x_0).$$

Согласно лемме 1 имеем

$$q(A, B, x_0) = \int_{x_0}^B \varphi(x, A) dx / \int_A^B \varphi(x, A) dx,$$

$$p(A, B, x_0) = \int_A^{x_0} \varphi(x, A) dx / \int_A^B \varphi(x, A) dx,$$

где функция φ определена в (2.1). Тогда из определения процесса $\tilde{X}$ следует

$$p_{\max,n}(k) = \prod_{l=1}^{k+1-n} p(x_0 + (n+l-2)H, x_0 + (n+l)H, x_0 + (n+l-1)H) \\ \times q(x_0 + kH, x_0 + (k+2)H, x_0 + (k+1)H),$$

$$p_{\min,n}(k) = \prod_{l=1}^{n-k+1} q(x_0 + (n-l)H, x_0 + (n-l+2)H, x_0 + (n-l+1)H) \\ \times p(x_0 + (k-2)H, x_0 + kH, x_0 + (k-1)H).$$

Кроме того, из определения моментов ренко, а также из леммы 1 следует

$$P(X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H) = \begin{cases} \int_{-H}^{x_0} \varphi(x, -H) dx / \int_{-H}^H \varphi(x, -H) dx, & r_0 = 1, \\ \int_{x_0}^H \varphi(x, -H) dx / \int_{-H}^H \varphi(x, -H) dx, & r_0 = -1. \end{cases} \quad (6.2)$$

Базис. Из построения моментов ренко и процесса $\tilde{X}$, следует, что для любого $m \geq 1$ с вероятностью единица $X_{\rho_m} = \tilde{X}_{\rho_m}$. Тогда с учетом введенных выше обозначений распределение X_{ρ_1} при условии $X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H$ задается следующим образом:

$$P(X_{\rho_1} = x_0 + r_1 H \mid X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H) = \begin{cases} p_{\max,r_0}(r_1), & r_0 = 1, \\ p_{\min,r_0}(r_1), & r_0 = -1. \end{cases}$$

Далее,

$$P(X_{\rho_1} = x_0 + r_1 H, X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H) \\ = P(X_{\rho_1} = x_0 + r_1 H \mid X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H) P(X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H),$$

где $P(X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H)$ задано в (6.2). Таким образом, выражение для совместного распределения (X_{ρ_1}, X_{ρ_0}) выглядит следующим образом:

$$P(X_{\rho_1} = x_0 + r_1 H, X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H) = \begin{cases} p_{\max, r_0}(r_1) \frac{\int_{-H}^{x_0} \varphi(x, -H) dx}{\int_{-H}^H \varphi(x, -H) dx}, & r_0 = 1, \\ p_{\min, r_0}(r_1) \frac{\int_{x_0}^H \varphi(x, -H) dx}{\int_{-H}^H \varphi(x, -H) dx}, & r_0 = -1. \end{cases} \quad (6.3)$$

Как и в случае каги, выражение (6.3) потребуется для осуществления следующего шага индукции. Решение задачи (6.1) для $m = 1$ также следует из (6.3):

$$\begin{aligned} P(X_{\rho_1} - X_{\rho_0} = jH) &= P(X_{\rho_1} = x_0 + (j+1)H, X_{\rho_0} = x_0 + H) \\ &\quad + P(X_{\rho_1} = x_0 + (j-1)H, X_{\rho_0} = x_0 - H) \\ &= p_{\max, 1}(j+1) \frac{\int_{-H}^{x_0} \varphi(x, -H) dx}{\int_{-H}^H \varphi(x, -H) dx} + p_{\min, -1}(j-1) \frac{\int_{x_0}^H \varphi(x, -H) dx}{\int_{-H}^H \varphi(x, -H) dx}. \end{aligned}$$

Шаг $m-1 \mapsto m$. На m -м шаге предполагается, что из $(m-1)$ -го шага известно совместное распределение $(X_{\rho_{m-1}}, X_{\rho_0})$. Из определения моментов ренко следует

$$P(X_{\rho_m} = x_0 + r_m H \mid X_{\rho_{m-1}} = x_0 + r_{m-1} H, X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H) = p_{\max, r_{m-1}}(r_m)$$

при $r_0 = 1$ и нечетном m , а также при $r_0 = -1$ и четном m ,

$$P(X_{\rho_m} = x_0 + r_m H \mid X_{\rho_{m-1}} = x_0 + r_{m-1} H, X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H) = p_{\min, r_{m-1}}(r_m)$$

при $r_0 = 1$ и четном m , а также при $r_0 = -1$ и нечетном m . Отсюда получаем выражение для распределения $(X_{\rho_m}, X_{\rho_{m-1}}, X_{\rho_0})$, поскольку

$$\begin{aligned} P(X_{\rho_m} = x_0 + r_m H, X_{\rho_{m-1}} = x_0 + r_{m-1} H, X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H) &= P(X_{\rho_m} = x_0 + r_m H \mid X_{\rho_{m-1}} = x_0 + r_{m-1} H, X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H) \\ &\quad \times P(X_{\rho_{m-1}} = x_0 + r_{m-1} H, X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H). \end{aligned}$$

Из этого уравнения получаем формулу для распределения (X_{ρ_m}, X_{ρ_0}) , необходимую для следующего шага индукции:

$$\begin{aligned} P(X_{\rho_m} = x_0 + r_m H, X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H) &= \sum_{r_1} p_{\max, r_{m-1}}(r_m) P(X_{\rho_{m-1}} = x_0 + r_{m-1} H, X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H) \end{aligned}$$

при $r_0 = 1$ и нечетном m , а также при $r_0 = -1$ и четном m ,

$$\begin{aligned} P(X_{\rho_m} = x_0 + r_m H, X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H) &= \sum_{r_1} p_{\min, r_{m-1}}(r_m) P(X_{\rho_{m-1}} = x_0 + r_{m-1} H, X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H) \end{aligned}$$

при $r_0 = 1$ и четном m , а также при $r_0 = -1$ и нечетном m . Решение задачи (6.1) имеет вид

$$P(X_{\rho_m} - X_{\rho_{m-1}} = jH) = \sum_{r_{m-1}} P(X_{\rho_m} = x_0 + (r_{m-1} + j)H, X_{\rho_{m-1}} = x_0 + r_{m-1}H),$$

где при четном m

$$\begin{aligned} & P(X_{\rho_m} = x_0 + r_m H, X_{\rho_{m-1}} = x_0 + r_{m-1} H) \\ &= p_{\min, r_{m-1}}(r_m) P(X_{\rho_{m-1}} = x_0 + r_{m-1} H, X_{\rho_0} = x_0 + H) \\ &+ p_{\max, r_{m-1}}(r_m) P(X_{\rho_{m-1}} = x_0 + r_{m-1} H, X_{\rho_0} = x_0 - H), \end{aligned}$$

при нечетном m

$$\begin{aligned} & P(X_{\rho_m} = x_0 + r_m H, X_{\rho_{m-1}} = x_0 + r_{m-1} H) \\ &= p_{\max, r_{m-1}}(r_m) P(X_{\rho_{m-1}} = x_0 + r_{m-1} H, X_{\rho_0} = x_0 + H) \\ &+ p_{\min, r_{m-1}}(r_m) P(X_{\rho_{m-1}} = x_0 + r_{m-1} H, X_{\rho_0} = x_0 - H). \end{aligned}$$

7. Приложение. Доказательство лемм 2 и 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Для краткости будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} & P(X_{\tau^{A,B}} = A) = q(A, B, x_0), \\ & P(X_{\tau^{A,B}} = B) = p(A, B, x_0), \\ & E e^{-\lambda \tau^{[A,B]}} \mathbf{I}(\tau^{[A,B]} = \tau^A) = v(A, B, x_0), \\ & E e^{-\lambda \tau^{[A,B]}} \mathbf{I}(\tau^{[A,B]} = \tau^B) = u(A, B, x_0). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Для произвольного $x > x_0$ рассмотрим разбиение отрезка $[x_0, x]$ на n равных частей длины Δ . Используя строго марковское свойство процесса X , можно показать, что вероятность события $\{S_{\gamma_{\max}} \geq x\}$ можно представить в виде следующего предела:

$$\begin{aligned} P(S_{\gamma_{\max}} \geq x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} p(x_0 + k\Delta - H, x_0 + k\Delta + \Delta, x_0 + k\Delta) \\ &= \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \ln[1 - q(x_0 + k\Delta - H, x_0 + k\Delta + \Delta, x_0 + k\Delta)] \right). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Из леммы 1 известно, что

$$\begin{aligned} & q(x_0 + k\Delta - H, x_0 + k\Delta + \Delta, x_0 + k\Delta) \\ &= \int_{x_0 + k\Delta}^{x_0 + k\Delta + \Delta} \varphi(z, x_0 + k\Delta - H) dz \Big/ \int_{x_0 + k\Delta - H}^{x_0 + k\Delta + \Delta} \varphi(z, x_0 + k\Delta - H) dz. \end{aligned}$$

Заметим, что непосредственно из определения функции φ вытекает, что:

$$\varphi(x, y) = \frac{\varphi(x, z)}{\varphi(y, z)}. \quad (7.3)$$

Применяя это свойство, получаем, что

$$\begin{aligned} & q(x_0 + k\Delta - H, x_0 + k\Delta + \Delta, x_0 + k\Delta) \\ &= \int_{x_0+k\Delta}^{x_0+k\Delta+\Delta} \varphi(z, x_0) dz \Big/ \int_{x_0+k\Delta-H}^{x_0+k\Delta+\Delta} \varphi(z, x_0) dz. \end{aligned}$$

Из теоремы о среднем для интеграла в числителе следует, что существует константа $0 < \varepsilon < 1$ такая, что

$$q(x_0 + k\Delta - H, x_0 + k\Delta + \Delta, x_0 + k\Delta) = \frac{\varphi(x_0 + k\Delta + \varepsilon\Delta, x_0)\Delta}{\int_{x_0+k\Delta-H}^{x_0+k\Delta+\Delta} \varphi(z, x_0) dz}.$$

Отсюда следует, что q стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ (т.е. $\Delta \rightarrow 0$). Причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{O}(q^2(x_0 + k\Delta - H, x_0 + k\Delta + \Delta, x_0 + k\Delta)) = 0.$$

Следовательно, разложив функцию $\ln(1 - q)$ в выражении (7.2) в ряд Тейлора до первого члена, получим

$$\begin{aligned} P(S_{\gamma_{\max}} \geq x) &= \exp\left(-\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} q(x_0 + k\Delta - H, x_0 + k\Delta + \Delta, x_0 + k\Delta)\right) \\ &= \exp\left(-\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi(x_0 + k\Delta, x_0)\Delta}{\int_{x_0+k\Delta-H}^{x_0+k\Delta+\Delta} \varphi(z, x_0) dz}\right) \\ &= \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{\varphi(y, x_0)}{\int_{y-H}^y \varphi(z, x_0) dz} dy\right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом получается функция распределения $I_{\gamma_{\min}}$. Для $x < x_0$

$$\begin{aligned} P(I_{\gamma_{\min}} \leq x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} q(x_0 - k\Delta - \Delta, x_0 - k\Delta + H, x_0 - k\Delta) \\ &= \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \ln[1 - p(x_0 - k\Delta - \Delta, x_0 - k\Delta + H, x_0 - k\Delta)]\right) \\ &= \exp\left(-\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi(x_0 - k\Delta, x)\Delta}{\int_{x_0-k\Delta-\Delta}^{x_0-k\Delta+H} \varphi(z, x) dz}\right) \\ &= \exp\left(-\int_x^{x_0} \frac{\varphi(y, x)}{\int_y^{y+H} \varphi(z, x) dz} dy\right). \end{aligned}$$

Для двумерного преобразования Лапласа пары $(\gamma_{\max}, S_{\gamma_{\max}})$ запишем следующее представление:

$$\mathbb{E} \exp(\beta S_{\gamma_{\max}} - \lambda \gamma_{\max}) = \int_{x_0}^{\infty} \exp(\beta x) \mathbb{E}(\exp(-\lambda \gamma_{\max}) \mid S_{\gamma_{\max}} = x) f_{S_{\gamma_{\max}}}(x) dx, \quad (7.4)$$

где $f_{S_{\gamma_{\max}}}$ – плотность распределения величины $S_{\gamma_{\max}}$. Условное математическое ожидание $E(\exp(-\lambda\gamma_{\max}) \mid S_{\gamma_{\max}} = x)$ будем искать в виде следующего предела:

$$E(\exp(-\lambda\gamma_{\max}) \mid S_{\gamma_{\max}} = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{u(x_0 + k\Delta - H, x_0 + k\Delta + \Delta, x_0 + k\Delta)}{p(x_0 + k\Delta - H, x_0 + k\Delta + \Delta, x_0 + k\Delta)} \right) \frac{v(x - H, x + \Delta, x)}{q(x - H, x + \Delta, x)}$$

поскольку

$$\begin{aligned} \frac{u(A, B, x)}{p(A, B, x)} &= E_x(\exp(-\lambda\tau^{[A, B]}) \mid X_{\tau^{[A, B]}} = B), \\ \frac{v(A, B, x)}{q(A, B, x)} &= E_x(\exp(-\lambda\tau^{[A, B]}) \mid X_{\tau^{[A, B]}} = A). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Здесь, как и при выводе формулы для распределения $S_{\gamma_{\max}}$, рассматривается разбиение отрезка $[x_0, x]$ на n равных частей длины Δ . Введем обозначение $z_k = x_0 + k\Delta$. Подставляя формулы для u и p из леммы 1 и используя разложение логарифма в ряд Тейлора, получаем, что

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} u(x_0 + k\Delta - H, x_0 + k\Delta + \Delta, x_0 + k\Delta) \\ &= \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{g(z_k - H)h(z_k) - g(z_k)h(z_k - H)}{g(z_k - H)h(z_k + \Delta) - g(z_k + \Delta)h(z_k - H)} \right) \\ &= \exp \left(- \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g(z_k - H)(h(z_k) - h(z_k + \Delta)) - h(z_k - H)(g(z_k) - g(z_k + \Delta))}{g(z_k - H)h(z_k + \Delta) - g(z_k + \Delta)h(z_k - H)} \right) \\ &= \exp \left(- \int_{x_0}^x \frac{g(z - H)h'(z) - h(z - H)g'(z)}{g(z - H)h(z) - g(z)h(z - H)} dz \right). \end{aligned}$$

Из (7.2) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \prod_{k=0}^{n-1} p(x_0 + k\Delta - H, x_0 + k\Delta + \Delta, x_0 + k\Delta) q(x - H, x + \Delta, x) = f_{S_{\gamma_{\max}}}(x).$$

Вновь применяя лемму 1 для $v(A, B, x)$, получаем

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v(x - H, x + \Delta, x)}{\Delta} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \frac{g(x)h(x + \Delta) - h(x)g(x + \Delta)}{g(x - H)h(x + \Delta) - g(x + \Delta)h(x - H)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \frac{g(x)(h(x + \Delta) - h(x)) - h(x)(g(x + \Delta) - g(x))}{g(x - H)h(x + \Delta) - g(x + \Delta)h(x - H)} \\ &= \frac{g(x)h'(x) - h(x)g'(x)}{g(x - H)h(x) - g(x)h(x - H)}. \end{aligned}$$

Подставляя все полученные выше пределы в (7.4), получим утверждение леммы 2. Аналогичным способом находится преобразование Лапласа пары $(\gamma_{\min}, I_{\gamma_{\min}})$:

$$E \exp(\beta I_{\gamma_{\min}} - \lambda \gamma_{\min}) = \int_{-\infty}^{x_0} \exp(\beta x) E(\exp(-\lambda \gamma_{\min}) \mid I_{\gamma_{\min}} = x) f_{I_{\gamma_{\min}}}(x) dx,$$

где

$$\begin{aligned} E(\exp(-\lambda\gamma_{\min}) \mid I_{\gamma_{\min}} = x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{v(z_k - \Delta, z_k + H, z_k)}{q(z_k - \Delta, z_k + H, z_k)} \frac{u(x - \Delta, x + H, x)}{p(x - \Delta, x + H, x)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} v(z_k - \Delta, z_k + H, z_k) &= \exp\left(-\int_x^{x_0} \frac{h(z+H)g'(z) - g(z+H)h'(z)}{g(z)h(z+H) - g(z+H)h(z)} dz\right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \prod_{k=0}^{n-1} q(z_k - \Delta, z_k + H, z_k) p(x - \Delta, x + H, x) &= f_{I_{\gamma_{\min}}}(x) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(x - \Delta, x + H, x)}{\Delta} &= \frac{h(x)g'(x) - g(x)h'(x)}{g(x)h(x+H) - g(x+H)h(x)} \end{aligned}$$

здесь $z_k = x_0 - k\Delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. В доказательстве будем использовать введенные ранее обозначения (7.1). Обозначим через $f_{X_{\kappa_0}}$ функцию плотности величины X_{κ_0} . Тогда

$$P(x_0 < X_{\kappa_0} \leq x) = \int_{x_0}^x f_{X_{\kappa_0}}(y) dy. \quad (7.6)$$

Покажем, что для $y > x_0$ плотность $f_{X_{\kappa_0}}$ может быть получена следующим образом:

$$f_{X_{\kappa_0}}(y) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{q(y - H, y, x_0)p(y - H - \Delta, y, y - H)}{\Delta}. \quad (7.7)$$

Для этого рассмотрим моменты остановки τ_1 и τ_2 , которые задаются следующим образом:

$$\tau_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t = y - H \text{ или } y\}, \quad \tau_2 = \inf\{t \geq 0 : X_t - X_{\tau_1} = -\Delta \text{ или } H\}.$$

Вероятность события $\{y - \Delta \leq X_{\kappa_0} \leq y\}$ можно аппроксимировать вероятностью события $\{X_{\tau_1} = y - H, X_{\tau_2} = y\}$. В силу (7.1), а также строго марковского свойства процесса X имеем

$$P(X_{\tau_1} = y - H, X_{\tau_2} = y) = q(y - H, y, x_0)p(y - H - \Delta, y, y - H).$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{q(y - H, y, x_0)p(y - H - \Delta, y, y - H)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{P(y - \Delta \leq X_{\kappa_0} \leq y)}{\Delta} = f_{X_{\kappa_0}}(y).$$

Подставив в (7.7) выражения для p и q из леммы 1, получим

$$f_{X_{\kappa_0}}(y) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \frac{\int_{x_0}^y \varphi(z, y - H) dz}{\int_{y-H}^y \varphi(z, y - H) dz} \frac{\int_{y-H-\Delta}^{y-H} \varphi(z, y - H - \Delta) dz}{\int_{y-H-\Delta}^y \varphi(z, y - H - \Delta) dz}.$$

Применяя теорему о среднем для второго интеграла в числителе, а также свойство (7.3), получаем, что для некоторого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$f_{X_{\kappa_0}}(y) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \frac{\int_{x_0}^y \varphi(z, x_0 - H) dz}{\int_{y-H}^y \varphi(z, x_0 - H) dz} \frac{\varphi(y - H - \varepsilon\Delta, x_0 - H)\Delta}{\int_{y-H-\Delta}^y \varphi(z, x_0 - H) dz}$$

$$= \frac{\int_{x_0}^y \varphi(z, x_0 - H) dz}{\left(\int_{y-H}^y \varphi(z, x_0 - H) dz\right)^2} \varphi(y - H, x_0 - H).$$

Подставляя выражение для плотности $f_{X_{\kappa_0}}$ в (7.6), получим утверждение леммы. Аналогично доказывается второе равенство в (2.5).

Преобразование Лапласа момента остановки κ_0 при условии $X_{\kappa_0} > x_0$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}(X_{\kappa_0} > x_0) &= \mathbb{E}(e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}(X_{\kappa_0} > x_0) \mid X_{\kappa_0}) \\ &= \int_{x_0}^{x_0+H} \mathbb{E}(e^{-\lambda \kappa_0} \mid X_{\kappa_0} = y) f_{X_{\kappa_0}}(y) dy, \end{aligned} \quad (7.8)$$

где через $f_{X_{\kappa_0}}$ обозначена функция плотности величины X_{κ_0} . Используя приведенные выше рассуждения, можно показать, что находящееся под знаком интеграла условное математическое ожидание можно найти следующим образом:

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda \kappa_0} \mid X_{\kappa_0} = y) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{v(y - H, y, x_0) u(y - H - \Delta, y, y - H)}{q(y - H, y, x_0) p(y - H - \Delta, y, y - H)},$$

поскольку в силу (7.5)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\lambda \tau_1} \mid X_{\tau_1} = y - H, X_{\tau_2} = y) &= \frac{v(y - H, y, x_0)}{q(y - H, y, x_0)}, \\ \mathbb{E}(e^{-\lambda \tau_2} \mid X_{\tau_1} = y - H, X_{\tau_2} = y) &= \frac{u(y - H - \Delta, y, y - H)}{p(y - H - \Delta, y, y - H)}. \end{aligned}$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{u(y - H - \Delta, y, y - H)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{g(y - H - \Delta)h(y - H) - g(y - H)h(y - H - \Delta)}{\Delta[g(y - H - \Delta)h(y) - g(y)h(y - H - \Delta)]} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{[g(y - H - \Delta) - g(y - H)]h(y - H) - g(y - H)[h(y - H - \Delta) - h(y - H)]}{\Delta[g(y - H - \Delta)h(y) - g(y)h(y - H - \Delta)]} \\ &= \frac{g(y - H)h'(y - H) - g'(y - H)h(y - H)}{g(y - H)h(y) - g(y)h(y - H)}. \end{aligned}$$

Кроме того, из (7.7) следует, что

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta}{q(y - H, y, x_0)p(y - H - \Delta, y, y - H)} = \frac{1}{f_{X_{\kappa_0}}(y)}.$$

Подставляя полученные пределы в (7.8), получаем ответ:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}(X_{\kappa_0} > x_0) \\ &= \int_{x_0}^{x_0+H} \frac{g(x_0)h(y) - g(y)h(x_0)}{g(y - H)h(y) - g(y)h(y - H)} \frac{g(y - H)h'(y - H) - g'(y - H)h(y - H)}{g(y - H)h(y) - g(y)h(y - H)} dy. \end{aligned}$$

Аналогичным образом находится преобразование Лапласа момента остановки κ_0 при условии $X_{\kappa_0} < x_0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Спиряев, “О некоторых свойствах стратегий Каги и Ренко для случайного блуждания”, *ТВП*, **56**:2 (2011), 279–300.
- [2] М. А. Спиряев, “О некоторых свойствах стратегий Каги и Ренко для броуновского движения”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2012, № 2, 28–33.
- [3] С. В. Пастухов, “О некоторых вероятностно-статистических методах в техническом анализе”, *ТВП*, **49**:2 (2004), 297–316.
- [4] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 3, Теория вероятностей и математическая статистика, Наука, М., 1975.
- [5] J. P. Lehoczky, “Formulas for stopped diffusion processes with stopping times based on the maximum”, *Ann. Probab.*, **5**:4 (1977), 601–607.

М. А. Спиряев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: spiryayevmax@gmail.com

Поступило

14.03.2011